This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

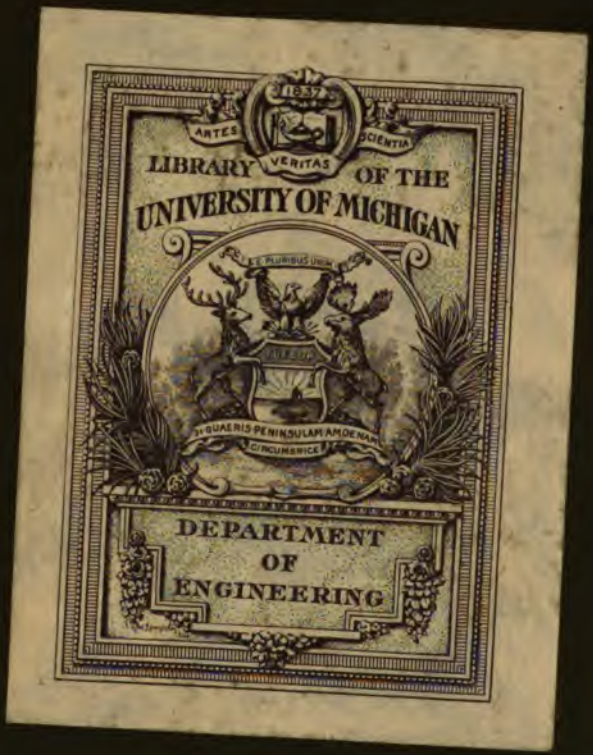
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 465310


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING

ENGINEERING
LIBRARY
TG
270
.M95
1901

H. F. B. MÜLLER-BRESLAU

GRAPHISCHE STATIK DER BAUKONSTRUKTIONEN.

DIE

GRAPHISCHE STATIK

DER

BAUKONSTRUKTIONEN

VON

HEINRICH F. B. MÜLLER-BRESLAU,

GEH. REGIERUNGSRATH UND PROFESSOR AN DER KGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN BERLIN.

Dritte wesentlich vermehrte Auflage.

Band II.

Erste Abtheilung.

Formänderung ebener Fachwerke. — Untersuchung der ebenen, statisch unbestimmten Fachwerke.

Mit 436 Textfiguren und 7 lithograph. Tafeln.

LEIPZIG,

Baumgärtner's Buchhandlung.

1903.

Druck von Grimme & Trömel in Leipzig.

Vorwort.

Die vorliegende Abtheilung der *Statik der Baukonstruktionen* beschäftigt sich mit einer der wichtigsten Anwendungen der Elasticitätslehre; sie stellt sich die Aufgabe, die Formänderungen ebener Fachwerke und die Theorie des statisch unbestimmten ebenen Fachwerks möglichst vollständig darzustellen.

Den Ausgangspunkt bildet hierbei das Gesetz der virtuellen Verrückungen und der aus diesem gefolgerte, zuerst von Maxwell für einen einfachen Sonderfall bewiesene und vom Verfasser erweiterte Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen*), eine *analytische* Grundlage, die auf den ersten Blick für ein Lehrbuch der *graphischen* Statik nicht recht geeignet erscheint. — Wer sich aber auf das Gebiet der Elasticitätslehre begiebt, ist immer gezwungen, gewisse Vorarbeiten durch Rechnung zu erledigen, und angesichts dieser Sach-

*) Ich habe diesen Satz zu Ehren des berühmten englischen Gelehrten den Maxwell'schen Satz genannt, mache aber darauf aufmerksam, dass die Abhandlung von Maxwell im Philosophical Magazine Bd. 27 (1864) S. 294 keineswegs jene Zurückführung aller Einflusslinien auf Biegungslinien enthält, durch welche die Untersuchung der statisch unbestimmten Systeme sich so ausserordentlich einfach und übersichtlich gestaltet hat. Die in diesem Buche zu diesem Zwecke benutzten Gewichte w habe ich in einer Reihe von in den Jahren 1883 und 1884 erschienenen Abhandlungen über die wichtigsten Trägersysteme eingeführt, und die allgemeine Deutung der Einflusslinien der Summen $\Sigma S_a S_a \rho$, $\Sigma S_a S_b \rho \cdots$ als Biegungslinien gab ich in der Zeitschrift des Hannoverschen Archit. u. Ing.-Ver. 1885, ohne hinsichtlich der Grössen X einschränkende Voraussetzungen zu machen; schliesslich habe ich in meinem Buche „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre u.s.w.", Leipzig 1886, die allgemeinen Elasticitätsgleichungen

$$L_a + \delta_a - \delta_{at} = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ba} - X_c \delta_{ca} - \cdots$$

aufgestellt. Ich hebe dies hervor, weil diese Gleichungen öfter benutzt und mit der Bemerkung „nach Maxwell" begleitet worden sind. Wer sich davon überzeugen will, dass der vorstehende Einspruch gerechtfertigt ist, möge die kurze Arbeit Maxwells nachlesen.

136010

lage liesse es sich kaum rechtfertigen, ein so vortreffliches Rüstzeug wie die neuere analytische Theorie beiseite zu legen und durch umständlichere Hilfsmittel zu ersetzen. Dem zeichnerischen Verfahren bleibt immer noch ein weites Feld: die Auftragung der Verschiebungspläne und die Benutzung dieser Liniengebilde zur Herleitung der Einflusslinien und Einflusszahlen, welche auf alle bei der Untersuchung eines gegebenen Fachwerks zu stellenden Fragen die bündigste Antwort geben.

Unser Buch ist folgendermassen gegliedert:

In der Einleitung werden die Grundgesetze der neueren analytischen Theorie unter der Voraussetzung hergeleitet, dass für den Baustoff eine Proportionalitätsgrenze besteht und die Beanspruchung innerhalb dieser Grenze liegt, eine Annahme, welche bei den hier ausschliesslich in Betracht kommenden Trägern aus Schweisseisen, Flusseisen und Stahl zulässig ist. Der Verfasser hat sich hierbei möglichster Kürze befleissigt, hofft aber, die Schwierigkeiten, welche diese allgemeinen Lehren dem Anfänger zu bieten pflegen, durch Einflechtung von leicht zu überschauenden Sonderfällen gehoben zu haben.

Der I. Abschnitt lehrt in den §§ 1 — 4 die verschiedenen Darstellungsweisen der Knotenpunktsverschiebungen ebener Fachwerke und zwar in erster Linie die zeichnerischen Verfahren, nebenbei aber auch den in vielen Fällen einfacheren rechnerischen Weg. Dieser wichtigste Theil des Buches ist besonders ausführlich behandelt worden; es wurden auch schwierigere Aufgaben mit Zuhilfenahme der Kinematik behandelt. § 5 enthält sodann als Fortsetzung der Einleitung eine Reihe von Aufgaben über das statisch unbestimmte Fachwerk und zeigt, dass sich die Ermittelung der statisch nicht bestimmbaren Grössen stets mit Hilfe von einfachen Verschiebungsplänen durchführen lässt und dass der vorgetragene Lehrstoff selbst bei Behandlung verwickelterer Fälle nicht im Stiche lässt.

Damit ist die Theorie des ebenen Fachwerks abgeschlossen. Der II. Abschnitt enthält lediglich Anwendungen; es werden die wichtigsten statisch unbestimmten Träger ausführlicher betrachtet, zuerst der Zweigelenkbogen, sodann die versteiften Stabbögen, der beiderseits eingespannte Bogen, der Balken auf mehreren Stützen, verschiedene seltenere Anordnungen statisch unbestimmter Balken-, Bogen- und Kettenbrücken und die mehrtheiligen Fachwerkbalken. Dieser für den praktischen Ingenieur bestimmte Theil des Buches hat in der neuen Auflage erhebliche Erweiterungen erfahren. Den

Schluss der reichhaltigen Aufgabensammlung bildet die Untersuchung eines viertheiligen, dreifach statisch unbestimmten Netzwerks; sie ist besonders wichtig, da Träger dieser Art für zerlegbare Brücken gewisse Vorzüge besitzen. Hier galt es, nicht allein durch Vorführung einer strengen Untersuchung die im I. Bande vorgetragene bequeme angenäherte Berechnung zu prüfen und zu bestätigen, sondern auch falsche Ansichten zu bekämpfen, die neuerdings auf diesem Gebiete laut geworden sind.

Alle Untersuchungen des II. Abschnitts sind als Beispiele zur Erläuterung der allgemeinen Theorie aufgefasst worden, ein Verfahren, welches der Verfasser in seinen Vorträgen an der hiesigen technischen Hochschule als vortheilhaft erkannt hat und welches die Bewältigung dieses wichtigen Lehrstoffs ohne grossen Zeitaufwand gestattet. Der Lernende hat in der That nur nöthig, ein einziges schwierigeres Beispiel sorgfältig durchzuarbeiten, um sich volle Sicherheit auf dem ganzen Gebiete zu erwerben. Dass diese auf die Beherrschung der allgemeinen Gesetze hinzielende Vortragsweise seitens des Studirenden anfangs etwas mehr geistige Anstrengung verlangt als die Beschränkung auf die einfachsten Sonderfälle, von denen jeder von Grund aus entwickelt wird, ist selbstverständlich. Dafür bietet sie aber auch mehr als eine Gebrauchsanweisung für die Behandlung leichter Aufgaben.

Berlin im Juni 1902.

H. Müller-Breslau.

Berichtigungen zu Band II, Abth. 1.

Seite 8, Zeile 1 v. o. lies § 34 statt § 38.
„ 8, Zeile 3 v. u. hinter Band I. ist einzuschalten: (2. Auflage.)
„ 19, Zeile 4 v. u. lies $X = 0$ statt $X = O$.
„ 31, Zeile 1 v. u. lies (32) statt (20).
„ 43, Zeile 7 v. u. lies $+ \tau_z \gamma_z$ statt $+ \tau_z \gamma_y$.
„ 46, Zeile 1 v. u. lies $\Sigma \int Q d\delta = \int\int (\ldots) \, dV$ anstatt $\Sigma \int Q d\delta = \int (\ldots) \, dV$.
„ 47, Zeile 10 bis 12 lies $d\gamma_x = \frac{1}{G} d\tau_x$ statt $= \frac{1}{G} \tau_x$.
$d\gamma_y = \frac{1}{G} d\tau_y$ statt $= \frac{1}{G} \tau_y$.
$d\gamma_z = \frac{1}{G} d\tau_z$ statt $= \frac{1}{G} \tau_z$.
„ 58, Zeile 1 v. o. lies Atti della academia delle scienze statt Atti delle Scienzi.
„ 59, Zeile 1 v. o. lies empfiehlt statt empfliehlt.
„ 64, Zeile 1 v. u. lies § 41 statt § 42.
„ 69, Fig. 45 ist der doppelt eingekreiste Punkt O nicht $\overline{O}$, der Punkt rechts daneben ist r', nicht r.
„ 74, Zeile 13 v. u. lies Abschnitt XIII statt Abschnitt XIV.
„ 80, Zeile 11 v. u. lies $(13 \cdot w)$ statt $13\,w)$.
„ 85, Zeile 6 v. o. lies Abschnitt XIII statt Abschnitt XIV.
„ 91, Fig. 62a lies $s_1\,(\sigma_1)$ statt $s\,(\sigma_1)$.
„ 91, Fig. 62b oben lies C' statt C_1.
„ 103, Zeile 18 v. u. lies: (Seite 95) statt Seite 95).
„ 109, Fig. 91b lies $-\mu_6$ und $+\mu_2$ statt μ_6 und μ_2.
„ 110, Fig. 93b lies $-\mu_6$ und $-\mu_7$ statt μ_6 und μ_7.
„ 119, lies Fig. 105 statt Fig. 106.
„ 121, Zeile 12 v. u. lies § 33 statt § 20.
„ 127, Zeile 2 v. o. lies § 45 und § 46 statt § 46 und § 47.
„ 127, Zeile 5 v. o. lies Anfang statt Anhang.
„ 127, Zeile 6 v. o. lies § 46 statt § 47.
„ 127, Zeile 10 v. u. lies $10000\,\Delta' u = -577$ statt $= -555$.
„ 142, Zeile 17 v. o. lies $A = A_0 - A'X$, $B = B_0 - B'X$ statt $A = A_0 - A'X'$, $B = B_0 - B'X'$.
„ 161, Zeile 5 v. o. lies *(I' II)* statt *(I' II')*.
„ 163, Zeile 21 v. o. lies $X_a = -1$ statt $X_b = -1$.
„ 169, Zeile 1 v. o. lies $G'LJ'$ statt $G'L'J'$.
„ 173, Zeile 1 v. u. lies u. s. w. statt u. s.
„ 176, Zeile 9 v. u. lies § 30, S. 242 statt § 35.
„ 177, Zeile 3 v. u. lies § 34 und 38 statt § 35 und 39.
„ 182, Zeile 11 v. o. lies § 40 statt § 41.
„ 192 u. 193. Die Literaturangaben unter 9, 10, 11 und 15 beziehen sich auf die in der neuen Auflage im Bd. I, Abschnitt XIII enthaltene kinematische Untersuchung des statisch bestimmten Fachwerks.
„ 209, Zeile 16 v. o. lies $410\,F_0$ statt $420\,F_0$.
„ 225, Zeile 5 v. o. Die Worte: „nach Band I, Anhang" sind zu streichen.
„ 256, Zeile 1 v. u. lies $p \cdot \lambda$ statt $p \cdot \gamma$.
„ 301, Zeile 17 v. o. lies $M_m'' = x_m$; $M_m''' = y_m$ statt
$M_m'' = \frac{x_m}{r_m}$; $M_m''' = \frac{y_m}{r_m}$.

Seite 301, Zeile 8 v. u. lies $X' = P \frac{M_w'}{\Sigma w_m'}$ statt $X' = P \frac{M_w'}{\Sigma w'}$.

„ 302, Zeile 10 v. o. lies 176 statt 175.

„ 302, Zeile 16 v. o. lies Füllungsstäben statt Füllungslinien.

„ 304, Zeile 5 v. o. lies Fig. 308 statt Fig. 207.

„ 313, Zeile 14 v. o. lies $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ statt $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$.

„ 331, Zeile 9 v. o. lies $h'_{m-1} = h_{m-1} - 0{,}30$ statt $h'_{m-1} = h_{m-1} = 0{,}30$.

„ 349, Zeile 8 v. o. $M_0 = 0{,}90\,\lambda$ ist zu streichen.

„ 349, Zeile 16 v. o. 0 ist zu streichen.

„ 353, Zeile 1 v. u. lies $\int_0^{l_1} \ldots = \frac{k_1^2 l_1}{2}(1+\alpha) - \ldots$ statt

$= \frac{k_1^2 l_2}{2}(1+\alpha) - \ldots$.

„ 367, Zeile 5 v. o. lies w_k statt w^k.

„ 398. Die Gleichungen auf den Zeilen 14, 17, 21 und 22, 26 erhalten die die Nummern 29 bis 32.

„ 399. Die Gleichungen auf den Zeilen 3 und 5 erhalten die Nummern 33 und 34.

„ 399, Fig. 377 lies L'_r und R'_r statt L' und R'.

„ 415, Zeile 6 v. o. fehlt hinter der Formel für X_b die Formel

$$X_c = P_m \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}}.$$

„ 425, Zeile 4 v. o. lies $\omega_D = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}$ statt $\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^3}$.

„ 448, Fig. 420 im Felde m bis $m+4$ lies (Δu) statt $[\Delta u]$.

„ 457, Fig. 422 fehlen bei der 0_1-Linie folgende Mafszahlen:

unter Punkt 4 $\begin{cases}(0{,}18)\\0{,}25\end{cases}$

„ „ 8 $\begin{cases}(0{,}12)\\0{,}13\end{cases}$

„ „ 12 $\begin{cases}(+0{,}09)\\0{,}00.\end{cases}$

Nachträgliche Berichtigungen zu Band I.

Seite 97, Zeile 7 und 8 v. unten lies $J_n = J + Fr^2 - 2\int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{y^3\,dx}{3}$

$= \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4} + \pi(R^2 - r^2)r^2 - \frac{16\,s^3\,l}{3 \cdot 5 \cdot 7}$.

„ 117, Zeile 18 v. u. lies Fig. 108 statt 107.

„ 119, Zeile 15 v. o. lies DE statt CE.

„ 123, Fig. 115 muss P_3 bis an den Polstrahl III gehen statt bis zur Schlusslinie s.

„ 130, Zeile 1 v. u. lies $max\ Q_p$ statt $mrx\ Q_p$.

„ 142, Zeile 5 v. u. lies $y = y_3 + (y_4 - y_3)\frac{\xi}{\lambda} = y_3\frac{\xi'}{\lambda} + y_4 \cdot \frac{\xi}{\lambda}$ statt

$y = y_3 + (y_4 - y_3)\frac{\xi'}{\lambda} = y_3\frac{\xi}{\lambda} + y_4\frac{\xi'}{\lambda}$.

Seite 143, Zeile 10 v. u. lies $(a'b')$ statt $(a'b)$.
„ 144, Zeile 14 v. u. lies G_s statt P_s.
„ 144, Zeile 13 v. u. lies $C'GD'$ statt $C'GD$.
„ 190, Zeile 3 v. u. lies M_{ok} statt M_k.
„ 191, Zeile 8 v. u. lies $E'DB'$ statt $E'DB$.
„ 203, Zeile 1 v. o. lies c_1 statt b_1.
„ 211, Zeile 17 v. o. lies C statt e.
„ 222, Zeile 12 v. u. lies No. 132 statt 133.
„ 248, Zeile 15 v. u. lies $Cp + D_g$ statt $Cp + \frac{p}{g} D_g$.
„ 259, Zeile 17 v. u. lies dritte statt zweite.
„ 267, Fig. 255 muss das Mafs x_3 bis zur Senkrechten durch Punkt 3 statt durch den Punkt 2 gehen.
„ 275, Zeile 13 v. o. lies Konst. $= \frac{l^2}{8f}$ statt $= \frac{8f}{l^2}$.
„ 288, Zeile 11 v. o. lies Fig. 282 und 283 statt Fig. 290 und 291.
„ 301, Zeile 7 v. o. lies Fig. 300 statt Fig. 295.
„ 310, Zeile 12 v. o. lies No. 85 statt No. 84.
„ 344, Zeile 2 v. u. lies Versehen statt Verfahren.
„ 401, Fig. 402(d) lies $\frac{p l'^2}{8}$ statt $\frac{p l'}{8}$.
„ 444, Zeile 6 v. o. lies unbekannten statt unkekannten.
„ 444, lauten die beiden ersten Gleichungen (8):
$$Y' = Y_o' + Y_a' Z_a + Y_b' Z_b + Y_c' Z_c + \ldots + Y_m' Z_m = 0$$
$$Y'' = Y_o'' + Y_a'' Z_a + Y_b'' Z_b + Y_c'' Z_c + \ldots + Y_m'' Z_m = 0$$
(Y_c' statt Y_c und Y_o'' statt Y_o''.
„ 462, Fig. 457 fehlen die punktierten Linien 6′ 7′ und (6′) (7′).
„ 477, Fig. 469 lies $\mathfrak{P}$ anstatt P.
„ 478, Zeile 7 v. o. lies (9) statt (2).
„ 481, Zeile 3 v. u. lies w statt ω.
„ 488, Fig. 481 muss das Mafs von der Senkrechten durch 2 bis zur Senkrechten durch Bx' statt x heissen.
„ 494, Zeile 1 v. o. lies $(IV)_1$ statt (IV_1).
„ 502, Fig. 499(a) lies 6′ und 9′ statt 6 und 9; ferner ist die unterste schraff. Fläche mit (d) statt (b) zu bezeichnen.
„ 503, Zeile 3 v. u. lies Fig. 499d statt Fig. 499c.
„ 505, Fig. 500c lies $-U_3$ statt $-U_1$.
„ 520, Zeile 1 und 9 von oben lies vierteilig statt zweiteilig.
„ 520, Zeile 4 v. o lies Fig. 512 statt 513.
„ 534, Zeile 4 v. o. und Zeile 19 v. o. lies 227 statt 225.
„ 535, Zeile 2 v. u. lies 227 statt 225.
„ 555, Zeile 9 v. o. lies 220 statt 209.

Tafel II, Fig. 197a sind die Pfeile von V_1 umzukehren.
„ II, Fig. 197b ist die oberste Last P statt $2P$.
„ IV, lies Seite 309 statt 380.
„ V, Fig. 345 ist das von Punkt C ausgehende Mafs $\frac{M_2}{\lambda}$, nicht $\frac{M_1}{\lambda}$.

Inhalt.

Einleitung.

Grundgesetze der Theorie der elastischen Träger.

Seite

A. Das Fachwerk 1
B. Gesetze für beliebige isotrope, feste Körper 38
Literatur zur Einleitung 52

I. Abschnitt.

Bestimmung der Formveränderungen ebener Fachwerke, mit Anwendungen auf die Untersuchung statisch unbestimmter und statisch bestimmter Träger.

§ 1. Verschiebungspläne nach dem Verfahren von Williot 57
§ 2. Darstellung der Formveränderung von Stabzügen mit gelenkartigen Knoten 86
§ 3. Die Biegungslinie als Seilpolygon betrachtet 99
§ 4. Einflusslinien und Einflusszahlen für elastische Verschiebungen . . 137
§ 5. Das statisch unbestimmte Fachwerk 140
§ 6. Allgemeines über das Auftragen der Einflusslinien 174
Literatur zum I. Abschnitt 192

II. Abschnitt.

Formeln, Regeln und Beispiele für die Berechnung der wichtigsten statisch unbestimmten Fachwerke.

§ 7. Ber Bogen mit zwei Gelenken 194
§ 8. Zweigelenkbogen mit gesprengter Zugstange und verwandte Trägerarten 243
§ 9. Kette, versteift durch einen Fachwerkbalken 265
§ 10. Einfach statisch unbestimmte Bogen- und Kettenbrücken mit mehreren Oeffnungen 289

Seite.
§ 11. Fachwerkbogen mit eingespannten Kämpfern 296
§ 12. Durchgehender Balken mit drei Stützpunkten 359
§ 13. Durchgehender Balken mit vier Stützpunkten 368
§ 14. Durchgehender Balken mit beliebig vielen Stützen 382
§ 15. Verschiedene Arten statisch unbestimmter Bogen-, Balken- und Kettenbrücken 402
§ 16. Beispiele für die Einführung eines statisch unbestimmten Hauptsystems 433
§ 17. Aufgaben über statisch unbestimmte mehrtheilige Fachwerkbalken 439
§ 18. Untersuchung der Formveränderung eines viertheiligen statisch bestimmten Netzwerks Mehrtens'scher Bauart 469
§ 19. Herleitung der Biegungslinien aus den Momentenlinien 473
Literatur zum II. Abschnitt 479

Einleitung

Grundgesetze der Theorie der elastischen Träger.

A. Das Fachwerk.

a. Voraussetzungen und Erklärungen. Elasticitätsbedingungen. Gesetz von der Zusammenzählung der einzelnen Wirkungen.

1. — Wird ein aus elastischen Stäben gebildetes und auf elastischen Stützen ruhendes Fachwerk der Einwirkung von äusseren Kräften und Temperaturänderungen ausgesetzt, so erfährt es vor Eintritt des Gleichgewichts, dessen schliessliches Zustandekommen vorausgesetzt werden möge, im Allgemeinen eine Formveränderung. Die Verschiebungen, welche die Knotenpunkte dabei erfahren, bezeichnet man als *elastische*, sobald sie nur eine Folge der Dehnbarkeit der Stäbe und der Elasticität der Widerlager sind. Ihre Werthe sind meistens so klein, dass es zulässig ist, sie als verschwindende Grössen zu behandeln und bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen sämmtliche Kräfte in den für starre Stäbe und Stützen gültigen Lagen zu denken.

Die folgenden Untersuchungen sind an die Annahme ganz allmählich wachsender Kräfte gebunden, setzen also voraus, dass der Gleichgewichtszustand eintritt, ohne dass Schwingungen entstehen. Sie beschäftigen sich mit ebenen und räumlichen Fachwerken, beschränken sich aber auf den Fall sehr kleiner und nur elastischer Formänderungen. Ihr erstes Ziel ist die Herleitung von allgemeinen Beziehungen zwischen den Aenderungen der Stablängen und den Verschiebungen der Knotenpunkte — Beziehungen, die nicht allein die Bestimmung der Gestalt des verschobenen Fachwerks möglich machen, sondern auch die Grundlage für die Ermittelung der Spannkräfte und Stützenwiderstände derjenigen statisch unbestimmten Fachwerke bilden werden, welche sich durch Beseitigung von Stäben oder Auflagerbedingungen in statisch bestimmte und ausschliesslich elastischen Formänderungen unterworfene Stabgebilde verwandeln lassen.

2. — Es wird zunächst angenommen, dass die äusseren Kräfte nur in den Knotenpunkten angreifen, mithin sämmtliche Stäbe ausschliesslich auf Zug oder auf Druck beansprucht werden. Die Gewichte der Stäbe sind hierbei auf die Knotenpunkte vertheilt zu denken. Alle gegebenen äusseren Kräfte werden *Lasten* genannt, zur Unterscheidung derselben von den an den Auflagern hervorgerufenen *Widerständen*. Eine Last werden wir allgemein mit P bezeichnen, hingegen den Buchstaben Q anwenden, wenn es dahingestellt sein soll, ob die damit gemeinte äussere Kraft eine Last oder ein Stützenwiderstand ist. Vor Einwirkung der äusseren Kräfte und der Temperaturänderungen seien sämmtliche Stäbe spannungslos.

Es wird vorausgesetzt, dass für den Baustoff eine Proportionalitätsgrenze besteht und die Beanspruchung innerhalb dieser Grenze liegt, eine Annahme, welche bei den hier ausschliesslich in Betracht kommenden Trägern aus Schweisseisen, Flusseisen und Stahl zulässig ist. Bedeutet dann

S die Spannkraft in irgend einem Stabe,

s die anfängliche Länge dieses Stabes,

Δs die Strecke, um welche s zunimmt (sie ist negativ, sobald sich der Stab verkürzt),

$\frac{\Delta s}{s}$ das *Verlängerungsverhältnis* des Stabes,

F den Querschnitt des prismatisch vorausgesetzten Stabes,

E die für alle Punkte des Stabes gleich gross angenommene Elasticitätsziffer (auch Elasticitätscoëfficient oder Elasticitätsmodul genannt),

t die für alle Punkte des Stabes gleiche Temperaturerhöhung,

ε das einer Temperaturerhöhung um 1° Cels. entsprechende Verlängerungsverhältnis,

$\sigma = \frac{S}{F}$ die im Stabe hervorgerufene *Spannung* — positiv, sobald der Stab gezogen wird, so ist

$$(1) \qquad \frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t = \frac{S}{EF} + \varepsilon t.$$

Schreibt man $\frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma + \varepsilon E t}{E}$, so erkennt man, dass die Temperaturerhöhung denselben Einfluss auf Δs besitzt, wie eine Zunahme der Spannung um $\varepsilon E t$, ein Gesetz, von dem wir später öfter Gebrauch machen wollen. Man darf im Mittel annehmen

für *Schweisseisen* $E = 2000000$ $^k/_{qcm}$

„ *Flusseisen* $E = 2150000$ „

für *Stahldraht* $E = 2150000\ ^k/_{qcm}$
„ *Flussstahl* $E = 2200000$ „
„ *Stahlguss* $E = 2150000$ „

ferner für

Schweisseisen	Flusseisen	Stahl
$\varepsilon = 0{,}0000121,$	$0{,}0000118,$	$0{,}0000124$
$\varepsilon E = 24\ ^k/_{qcm}$	$\varepsilon E = 25\ ^k/_{qcm}$	$\varepsilon E = 27\ ^k/_{qcm}$
$= 240\ ^t/_{qm}$	$= 250\ ^t/_{qm}$	$= 270\ ^t/_{qm}$

3. — Ein räumliches Fachwerk sei auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z bezogen. i und k seien irgend zwei durch einen Stab von der Länge s_{ik} verbundene Knotenpunkte. Die Koordinaten $(x_i y_i z_i)$, $(x_k\ y_k\ z_k)$ derselben mögen infolge der Formänderung des Fachwerks um $(\Delta x_i\ \Delta y_i\ \Delta z_i)$, $(\Delta x_k\ \Delta y_k\ \Delta z_k)$ zunehmen. Dann bestehen die Gleichungen:

(2) $$s_{ik}^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2 \text{ und}$$

(3) $$\begin{aligned}(s_{ik} + \Delta s_{ik})^2 &= [(x_k + \Delta x_k) - (x_i + \Delta x_i)]^2 + [(y_k + \Delta y_k) - (y_i + \Delta y_i)]^2 \\ &\quad + [(z_k + \Delta z_k) - (z_i + \Delta z_i)]^2 \\ &= [(x_k - x_i) + (\Delta x_k - \Delta x_i)]^2 + [(y_k - y_i) + (\Delta y_k - \Delta x_i)]^2 \\ &\quad + [(z_k - z_i) + (\Delta z_k - \Delta y_i)]^2\end{aligned}$$

und man erhält, wenn man (2) von (3) abzieht:

(4) $$\begin{aligned}2 s_{ik}\,\Delta s_{ik} + \Delta s^2_{ik} &= 2\,(x_k - x_i)\,(\Delta x_k - \Delta x_i) + (\Delta x_k - \Delta x_i)^2 \\ &\quad + 2\,(y_k - y_i)\,(\Delta y_k - \Delta y_i) + (\Delta y_k - \Delta y_i)^2 \\ &\quad + 2\,(z_k - z_i)\,(\Delta z_k - \Delta z_i) + (\Delta z_k - \Delta z_i)^2.\end{aligned}$$

Werden nun die Werthe Δx, Δy, Δz, Δs so klein vorausgesetzt, dass es zulässig ist, die kleinen Grössen zweiter Ordnung gegen diejenigen der ersten Ordnung zu vernachlässigen, so geht (4) über in

(5) $$\begin{aligned}2 s_{ik}\,\Delta s_{ik} &= 2\,(x_k - x_i)\,(\Delta x_k - \Delta x_i) + 2\,(y_k - y_i)\,(\Delta y_k - \Delta y_i) \\ &\quad + 2\,(z_k - z_i)\,(\Delta z_k - \Delta z_i),\end{aligned}$$

d. i. in eine Gleichung, welche man auch erhalten kann, indem man die Gleichung (2) differentiirt und das Differentialzeichen d durch das Zeichen Δ ersetzt; sie ist nur dann streng richtig, wenn die Δx, Δy, Δz, Δs unendlich klein sind.

Bedeuten α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} die Winkel, welche die Richtung des Stabes s_{ik} mit den Richtungen der Achsen x, y, z einschliesst, so ist:

$$x_k - x_i = s_{ik} \cos \alpha_{ik}; \qquad y_k - y_i = s_{ik} \cos \beta_{ik};$$
$$z_k - z_i = s_{ik} \cos \gamma_{ik}$$

(vergl. Fig. 1, welche sich auf ein ebenes Fachwerk bezieht) und es kann deshalb (5) umgeformt werden in

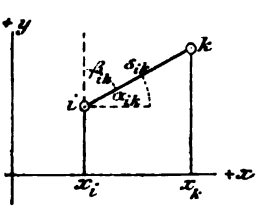


Fig. 1.

(6) $$\begin{aligned}\Delta s_{ik} &= (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i) \cos \beta_{ik} \\ &\quad + (\Delta z_k - \Delta z_i) \cos \gamma_{ik},\end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (1) in:

$$(7)\quad \frac{S_{ik}\,s_{ik}}{E_{ik}\,F_{ik}} + \varepsilon_{ik}\,t_{ik}\,s_{ik} = (\Delta x_k - \Delta x_i)\cos\alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i)\cos\beta_{ik} + (\Delta z_k - \Delta z_i)\cos\gamma_{ik}.$$

Wir nennen die Gleichung (7) eine *Elasticitätsbedingung*. Ist die Anzahl der Fachwerkstäbe $= r$, so lassen sich r Elasticitätsbedingungen aufstellen.

4. — Die Aufgabe der Theorie des Fachwerks besteht in der Ermittelung der Stützenwiderstände und Spannkräfte, sowie in der Aufsuchung der Gestalt des verschobenen Fachwerks. Der letztere Theil dieser Aufgabe ist als gelöst zu betrachten, sobald die Seitenverschiebungen Δx, Δy, Δz sämmtlicher Knotenpunkte bekannt sind.

Als gegeben wollen wir ausser den auf das Fachwerk wirkenden Lasten P und den Temperaturänderungen t vorläufig auch die Verschiebungen der Stützpunkte annehmen, denn diese können meistens nur geschätzt oder durch Beobachtung bestimmt werden; sie lassen sich in den seltensten Fällen durch die auf die Widerlager wirkenden Kräfte und die Temperaturänderungen der Stützen ausdrücken, da wichtige Ursachen jener Verschiebungen, wie das Nachgeben des Baugrundes und die Formänderung der Mauerwerkkörper, bislang noch sehr wenig erforscht sind.

Wir setzen zunächst voraus, dass an den Auflagerstellen keine Reibungswiderstände auftreten und unterscheiden dann drei Arten von Stützung:

a) Der Stützpunkt w wird auf einer Fläche geführt. Der Stützenwiderstand wirkt rechtwinklig zu der in w an jene Fläche gelegten Berührungsebene; seine Richtung ist gegeben, seine Grösse wird gesucht. Bei ruhendem Widerlager ist die Verschiebung von w in der Richtung des Auflagerdruckes $= 0$; im Gegenfalle möge dieselbe einen durch die Beobachtung gefundenen, gegebenen Werth annehmen.

b) Der Stützpunkt w wird auf einer Linie geführt; er kann sich in der Richtung der in w an jene Linie gelegten Tangente frei bewegen. Der in w angreifende Auflagerdruck liegt in der zur Tangente rechtwinkligen Ebene und muss durch Angabe zweier Seitenkräfte bestimmt werden. Bei ruhendem Widerlager sind die in die Richtungen dieser Seitenkräfte fallenden Seitenverschiebungen des Punktes w gleich Null. Giebt das Widerlager nach, so mögen jene Verschiebungen gegebene, durch Beobachtung gefundene Werthe besitzen.

c) Kann sich ein Stützpunkt w nach keiner Richtung hin frei bewegen, so ist zur Bestimmung des an demselben angreifenden Wider-

standes die Angabe von drei Seitenkräften erforderlich, und diesen Kräften stehen bei nachgebendem Widerlager drei beobachtete Seitenverschiebungen gegenüber.

Wie also die Stützung eines Punktes w immer beschaffen sein mag — stets ist die Anzahl der an dem Auflager auftretenden unbekannten äusseren Kräfte ebenso gross wie die Anzahl der gegebenen Seitenverschiebungen, welche letztere die *Auflagerbedingungen* genannt werden sollen.

Die Anzahl der Knotenpunkte sei $= k$, diejenige der Stäbe $= r$. Für jeden Knotenpunkt lassen sich drei *Gleichgewichtsbedingungen* aufstellen. Bedeuten nämlich Q_{xm}, Q_{ym}, Q_{zm} die den Achsen x, y, z parallelen Seitenkräfte der in irgend einem Knotenpunkte m angreifenden äusseren Kraft Q_m, ferner S_1, S_2, ... S_p die Spannkräfte in den von m ausgehenden Stäben und α_1, α_2, . . . α_p, β_1, β_2, . . . β_p, γ_1, γ_2, . . . γ_p die Neigungswinkel der Stabachsen gegen die Achsen x, y, z, so muss sein:

$$(8) \qquad \begin{cases} Q_{xm} + \sum_1^p S \cos \alpha = 0 \\ Q_{ym} + \sum_1^p S \cos \beta = 0 \\ Q_{zm} + \sum_1^p S \cos \gamma = 0. \end{cases}$$

Im Ganzen stehen beim räumlichen Fachwerk zur Verfügung:

$3k$ Gleichgewichtsbedingungen,

r Elasticitätsbedingungen von der Art der Gleichung (7),

a Auflagerbedingungen,

und diese Gleichungen enthalten als Unbekannte:

r Spannkräfte S,

a nach bestimmten Richtungen wirkende Stützenwiderstände,

$3k$ Seitenverschiebungen Δx, Δy, Δz von k Knotenpunkten.

(Beim ebenen Fachwerk tritt $2k$ an die Stelle von $3k$).

Die Anzahl der Unbekannten ist also ebenso gross wie die Anzahl der Gleichungen. Letztere sind durchweg vom ersten Grade; sie lassen sich eindeutig auflösen, sobald ihre Nennerdeterminante einen von Null verschiedenen Werth besitzt — was hier vorausgesetzt werden soll. Eine nähere Untersuchung dieser Nennerdeterminante ist überflüssig, weil später ein anderer, viel einfacherer Weg zur Lösung der gestellten Aufgabe eingeschlagen und aus der vorstehenden Untersuchung nur gefolgert werden soll,

dass sich die Spannkräfte S, ferner die nach bestimmten Richtungen wirkenden Stützenwiderstände C und die Seitenverschie-

bungen Δx, Δy, Δz darstellen lassen als lineare Funktionen der den Koordinatenachsen parallelen Seitenkräfte P_1, P_2, P_3 ... der Lasten, der Aenderungen t_1, t_2, t_3 ... der anfänglichen Stabtemperaturen und der nach bestimmten Richtungen erfolgenden Verschiebungen δ_{w1}, δ_{w2}, δ_{w3}, ... der Stützpunkte w.

Für jede der zu suchenden Unbekannten, die wir allgemein mit Z bezeichnen wollen, ergiebt sich hiernach ein Ausdruck von der Form:

$$(9) \qquad \begin{aligned} Z = {} & \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2 + \varkappa_3 P_3 + \dots \\ & + \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \mu_3 t_3 + \dots \\ & + \nu_1 \delta_{w1} + \nu_2 \delta_{w2} + \nu_3 \delta_{w3} + \dots, \end{aligned}$$

wobei $\varkappa$, μ, ν Werthe sind, welche von den Abmessungen und Richtungen der Stäbe, den Werthen E und ε, den Koordinaten x, y, z der Knotenpunkte und von der Art der Stützung des Fachwerks abhängen, nicht aber von den Grössen P, t, δ_w.

Ist insbesondere die Anzahl der Stäbe und der Auflagerkräfte zusammen $= 3k$ für das räumliche und $= 2k$ für das ebene Fachwerk, und besitzt die Nennerdeterminante der Gleichgewichtsbedingungen einen von Null verschiedenen Werth, so ist es möglich, sämmtliche S und C mit Hilfe dieser Gleichungen (oder mittels anderer bequemerer Verfahren, die für das ebene Fachwerk im ersten Bande mitgetheilt worden sind und für das räumliche im dritten Bande folgen werden) als lineare Funktionen der Lasten P darzustellen; sie sind dann unabhängig von den t und δ_w, und das Fachwerk ist ein statisch bestimmtes.

5. — Wird ein Fachwerk durch bestimmte Lasten P beansprucht, bestimmten Temperaturänderungen unterworfen, und erleiden die Stützpunkte bestimmte Verschiebungen, so sagen wir: *das Fachwerk wird von bestimmten Ursachen P, t, δ_w angegriffen*, und sprechen dann kurz von einer *bestimmten Angriffsweise des Fachwerks.*

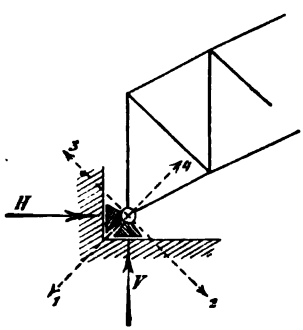


Fig. 2.

Erfolgt die Stützung stets in denselben Punkten und in jedem dieser Punkte immer auf dieselbe Art, so nennen wir das Fachwerk ein solches von *unveränderlicher Stützungsart.*

Beispiele für *veränderliche* Stützungsart bieten die Figuren 2 bis 4. An dem in Fig. 2 abgebildeten Auflager eines ebenen Fachwerks wirken einer Verschiebung des Stützpunktes in der Richtung des Pfeiles 1 zwei Widerstände V und H entgegen, einer Verschiebung in der Richtung 3 nur ein Widerstand V, einer solchen in der Richtung 3 nur ein Widerstand H, während sich der Punkt w in der Richtung 4 frei bewegen kann.

Der Fachwerkbalken in Fig. 3 wird bei geringer Belastung der Aussenfelder nur in zwei Punkten gestützt und ist dann statisch bestimmt. Infolge kleiner Senkungen der Enden kann er in einen auf vier Stützen ruhenden, mithin zweifach statisch unbestimmten Balken übergehen.

Fig. 3.

Eine mit der Angriffsweise veränderliche Art der Stützung kann auch durch grössere Reibungswiderstände verursacht werden. Erhält z. B. der in Fig. 4 dargestellte ebene Träger links ein festes und rechts ein bewegliches Auflager, und ist der an dem letzteren auftretende Reibungswiderstand gross genug, um eine Bewegung des Stützpunktes zu hindern, so ist der Träger statisch unbestimmt (Bogen mit zwei Gelenken). Sonst ist er statisch bestimmt, und es darf dann der in der Auflagerbahn wirkende Widerstand $C = fB$ angenommen werden, wo f die Reibungsziffer und B den zur Auflagerbahn rechtwinkligen Widerstand bedeutet. Der Sinn von C ist entgegengesetzt dem Sinne der Verschiebung des Stützpunktes w.

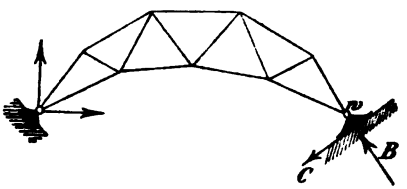


Fig. 4.

Lässt sich ein Fachwerk in Theile zerlegen, welche im Falle unelastischer Stäbe starr wären, und ist die gegenseitige Stützung dieser Theile von unveränderlicher Art, sind ferner sämmtliche Stäbe widerstandsfähig gegen Zug und Druck, so bezeichnen wir das Fachwerk als ein solches von *unveränderlicher Gliederung.*

Ein Beispiel von veränderlicher Gliederung in Folge wechselnder Art der gegenseitigen Stützung einzelner Theile zeigt Fig. 5. Dieselbe stellt zwei durch ein Gelenk G verbundene gegliederte Scheiben eines ebenen Fachwerks dar. Die Scheiben sind so geformt, dass sie sich in Folge einer sehr kleinen, im Sinne der beigefügten Pfeile erfolgenden Drehung in den Punkten m berühren, während sie bei Eintritt einer entgegengesetzten Drehung nur in G aufeinander wirken. Im zweiten Falle sind die beiden Punkte m als zwei verschiedene Knoten zu behandeln, und es ergeben sich für dieselben vier Gleichgewichtsbedingungen. Anderenfalls bilden sie einen einzigen Knotenpunkt, für den sich nur zwei Gleichgewichtsbedingungen aufstellen lassen.

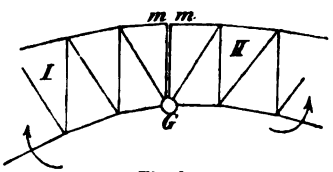


Fig. 5.

Eine veränderliche Gliederung liegt auch vor, wenn das Fachwerk Stäbe besitzt, die nur nach einer Richtung widerstandsfähig sind, die also aus Seilen oder Ketten bestehen und deshalb nur Zugkräfte aufnehmen können, oder die sich mit halbcylindrischen Endflächen gegen die in den Knoten angeordneten Gelenkbolzen stützen und in Folge dessen nur Widerstand gegen Druck leisten.

Das wichtigste Beispiel hierfür ist der im ersten Bande (§ 38) dieses Buches untersuchte Fachwerkbalken mit Gegendiagonalen. Die früher für diesen Träger aufgestellte Theorie ist durch die Bemerkung zu vervollständigen, dass zuweilen in allen oder einzelnen Feldern beide Diagonalen gleichzeitig gespannt werden, und der Träger in Folge dessen statisch unbestimmt wird, dass aber die genaueren Werthe der Spannkräfte von den früher angegebenen stets sehr wenig abweichen und die schärfere Berechnung deshalb unterbleiben darf.

Ein anderes Beispiel führt die Fig. 6 vor. Das hier abgebildete ebene Fachwerk ist im Allgemeinen fünffach statisch unbestimmt, weil es 36 Knotenpunkte und 74 Stäbe besitzt, mithin die Anzahl der Stäbe um 5 grösser ist als die Zahl $2 \cdot 36 - 3 = 69$, wo $3 =$ Anzahl der an den Widerlagern auftretenden Unbekannten*). Sind die Stäbe 1 bis 9 nur im Stande, Zugkräfte zu übertragen, und wird das Fachwerk so beansprucht, dass die Stäbe 2 und 3 spannungslos werden, so ist es für die fragliche Angriffsweise nur dreifach statisch unbestimmt. Werden auch noch 5, 7, 8 spannungslos, so treten 1, 4, 6, 9 ebenfalls ausser Thätigkeit (weil sonst Gleichgewicht an den Knoten e und f nicht möglich ist) und das Fachwerk geht in ein statisch bestimmtes über.

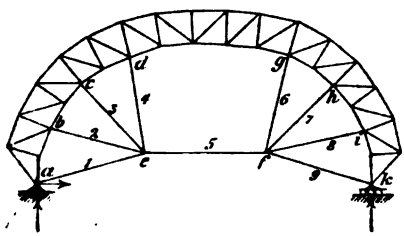


Fig. 6.

Die Untersuchung von Fachwerken mit veränderlicher Gliederung und Stützungsart kann grossen Schwierigkeiten begegnen, da es häufig nicht möglich ist, von vornherein die bei einer bestimmten Angriffsweise in Thätigkeit tretenden einseitig widerstehenden Stäbe zu bezeichnen und die augenblickliche Art der gegenseitigen Stützung einzelner Theile des Fachwerks, sowie die Art der Stützung durch die Widerlager anzugeben, so dass man vielfach auf den Weg des Versuchs angewiesen ist.

6. — Bei einem Fachwerke von unveränderlicher Gliederung und Stützungsart sind die Zahlen k, r, a (vergl. S. 5), ferner die in der Gleichung (9) auftretenden Werthe $\varkappa$, μ, ν unabhängig von der Angriffsweise. Wirken auf das Fachwerk einmal die Ursachen P', t', δ'_w, hierauf die Ursachen P'', t'', δ''_w, und entspricht den ersteren der Werth Z' der gesuchten Unbekannten, den letzteren der Werth Z'', so folgt aus den linearen Beziehungen (9), für den von den Ursachen P', t', δ'_w, P'', t'', δ''_w hervorgerufene Werth Z die Gleichung

$$Z = Z' + Z''.$$

*) Man darf den Träger auch als ein Gebilde betrachten, welches aus einer statisch bestimmten gegliederten Scheibe und 9 Stäben (1 bis 9) besteht. Dann erhält man nach Seite 230, Band I: $2(g' + 2g'' + 3g''' + \ldots) + r + a = 2 \cdot 0 + 9 + 3 = 12$, ferner $3s + 2k = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$. Wegen $12 - 7 = 5$ ist der Träger fünffach statisch unbestimmt.

Es ist also bei der Bestimmung der Spannkräfte S, sowie der nach bestimmten Richtungen wirkenden Auflagerkräfte und der nach bestimmten Richtungen gebildeten Seitenverschiebungen der Knotenpunkte zulässig die Einflüsse der einzelnen auf das Fachwerk wirkenden Ursachen getrennt zu ermitteln und schliesslich zusammen zu zählen — ein sehr wichtiges Gesetz, welches in der Folge *das Gesetz von der Zusammenzählung der einzelnen Wirkungen* genannt werden soll. Dasselbe gilt nur für Fachwerke von unveränderlicher Gliederung und Stützungsart.

Hat man aber bei Untersuchung eines *in bestimmter Weise angegriffenen* Fachwerks mit einseitig widerstehenden Stäben die wirkungslosen Stäbe ausgeschieden, so darf man auf das übrig bleibende Stabgebilde das eben bewiesene Gesetz anwenden. Hierbei dürfen die Einflüsse der einzelnen Ursachen auf die Spannkraft S eines nur gegen $\left\{\begin{matrix}\text{Zug}\\\text{Druck}\end{matrix}\right\}$ widerstandsfähigen Stabes $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ausfallen. Bedingung ist nur, dass sich für die Summe S sämmtlicher Beiträge ein $\left\{\begin{matrix}\text{positiver}\\\text{negativer}\end{matrix}\right\}$ Werth ergiebt. Auch wenn die Stützungsart veränderlich ist, darf jenes Gesetz — falls eine bestimmte Angriffsweise vorliegt — angewendet werden. Es ist dann zunächst die Art der augenblicklichen Stützung zu ermitteln, und diese Stützungsart muss der Berechnung sämmtlicher einzelnen Wirkungen zu Grunde gelegt werden. Dies gilt sowohl für die Stützung durch die Widerlager, als auch für die gegenseitige Stützung einzelner Theile des Fachwerks.

b. Gesetz der virtuellen Verschiebungen. Arbeitsgleichungen. Clapeyron'sches Gesetz.

7. — Um zu einer sehr einfachen und fruchtbaren Beziehung zwischen den Aenderungen Δs der Stablängen und den von denselben Ursachen herrührenden Verschiebungen der Fachwerksknoten zu gelangen, multipliciren wir die auf Seite 8 abgeleitete Gleichung

$$\Delta s_{ik} = (\Delta x_k - \Delta x_i)\cos\alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i)\cos\beta_{ik} + (\Delta z_k - \Delta z_i)\cos\gamma_{ik}$$

mit einer Spannkraft, welche im Stabe i—k durch irgend einen *nur gedachten* Belastungszustand des Fachwerks erzeugt sein möge, und die zur Unterscheidung von der *wirklichen* Spannkraft S_{ik} mit $\overline{S_{ik}}$ bezeichnet werden soll. Hierauf stellen wir eine ähnliche Gleichung für jeden Stab auf, addiren alle diese Gleichungen und erhalten:

$$\Sigma\overline{S_{ik}}\Delta s_{ik} = \Sigma[\overline{S_{ik}}(\Delta x_k - \Delta x_i)\cos\alpha_{ik} + \overline{S_{ik}}(\Delta y_k - \Delta y_i)\cos\beta_{ik} + \overline{S_{ik}}(\Delta z_k - \Delta z_i)\cos\gamma_{ik}],$$

wofür auch geschrieben werden darf:

$$(10)\quad \Sigma \overline{S_a} \Delta s_a = -\Sigma\,[(\overline{S_a}\cos\alpha_a \Delta x_i + \overline{S_a}\cos\beta_a \Delta y_i + \overline{S_a}\cos\gamma_a \Delta z_i) + (\overline{S_{ki}}\cos\alpha_{ki}\Delta x_k + \overline{S_{ki}}\cos\beta_{ki}\Delta y_k + \overline{S_{ki}}\cos\gamma_{ki}\Delta z_k)],$$

denn es ist $\cos\alpha_{ki} = -\cos\alpha_a$, $\cos\beta_{ki} = -\cos\beta_a$, $\cos\gamma_{ki} = -\cos\gamma_a$, hingegen $\overline{S_{ki}} = \overline{S_a}$. Man vergleiche die auf ein ebenes Fachwerk sich beziehende Figur 7, in welcher die $\overline{S}$ als Kräfte aufgefasst worden sind, welche an den Knotenpunkten angreifen, also den weggenommenen Stab ik ersetzen.

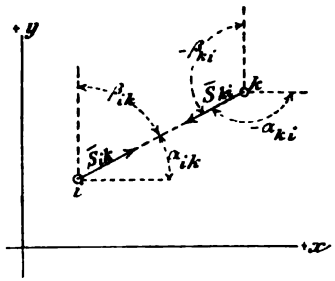


Fig. 7.

Das Bildungsgesetz der rechten Seite der Gleichung (10) lässt sich wie folgt aussprechen: Man zerlege die in i wirkende Kraft $\overline{S_a}$ in die den Achsen x, y, z, parallelen Seitenkräfte $\overline{S_a}\cos\alpha_a$, $\overline{S_a}\cos\beta_a$, $\overline{S_a}\cos\gamma_a$, multiplicire diese Kräfte der Reihe nach mit den Seitenverschiebungen Δx_i, Δy_i, Δz_i ihres Angriffspunktes i, verfahre in gleicher Weise mit sämmtlichen Kräften $\overline{S}$ und addire alle diese Produkte. Ordnet man nun die so erhaltene Summe nach den Knotenpunkten und bezeichnet die Ordnungsziffer eines beliebigen Knotens mit m, so gelangt man (wenn man auf der linken Seite den jetzt entbehrlichen Zeiger ik fortlässt) zu der Gleichung

$$(11)\quad \Sigma \overline{S}\Delta s = -\Sigma(\Delta x_m \Sigma_m \overline{S}\cos\alpha + \Delta y_m \Sigma_m \overline{S}\cos\beta + \Delta z_m \Sigma_m \overline{S}\cos\gamma),$$

in welcher sich die Summen $\Sigma_m \overline{S}\cos\alpha$, $\Sigma_m \overline{S}\cos\beta$, $\Sigma_m \overline{S}\cos\gamma$ über alle in m angreifenden Spannkräfte $\overline{S}$ erstrecken.

Die äusseren Kräfte des *gedachten* Belastungszustandes sollen, damit sie von den in Wirklichkeit auftretenden äusseren Kräften Q_m unterschieden werden, mit $\overline{Q_m}$ bezeichnet werden; sie mögen mit den Achsen x, y, z die Winkel $\overline{\xi_m}$, $\overline{\eta_m}$, $\overline{\zeta_m}$ einschliessen. *Hinsichtlich der Kräfte $\overline{Q}$ und $\overline{S}$ wird nur vorausgesetzt, dass sie miteinander im Gleichgewichte sind.* Für den Knotenpunkt m erhält man die Bedingungen:

$$(12)\quad \begin{cases} \overline{Q_m}\cos\overline{\xi_m} + \Sigma_m \overline{S}\cos\alpha = 0 \\ \overline{Q_m}\cos\overline{\eta_m} + \Sigma_m \overline{S}\cos\beta = 0 \\ \overline{Q_m}\cos\overline{\zeta_m} + \Sigma_m \overline{S}\cos\gamma = 0, \end{cases}$$

und es lässt sich nun (11) umformen in:

$$\Sigma \overline{Q_m}\,(\Delta x_m \cos\overline{\xi_m} + \Delta y_m \cos\overline{\eta_m} + \Delta z_m \cos\overline{\zeta_m}) = \Sigma \overline{S}\Delta s.$$

Diese Gleichung kann man aber noch kürzer fassen, wenn man beachtet, dass die Projection δ_m der wirklichen Verschiebung mm' des Knoten m auf die Richtung der gedachten Kraft $\overline{Q_m}$ durch die Formel

$$\delta_m = \Delta x_m \cos\overline{\xi_m} + \Delta y_m \cos\overline{\eta_m} + \Delta z_m \cos\overline{\zeta_m}$$

bestimmt ist. Es ergiebt sich dann die Gleichung:

$$(13) \qquad \Sigma \overline{Q}_m \delta_m = \Sigma \overline{S} \Delta s,$$

in welche die Verschiebung δ_m als positive oder negative Grösse einzuführen ist, je nachdem sie denselben oder den entgegengesetzten Sinn hat wie die Kraft $\overline{Q}_m$.

Das Produkt $\overline{Q}_m \delta_m$ lässt sich als diejenige mechanische Arbeit deuten, welche die Kraft $\overline{Q}_m$ verrichtet, wenn ihr Angriffspunkt m im Sinne von $\overline{Q}_m$ um die Strecke δ_m verschoben wird. Um nun auszudrücken, dass diese Verschiebung durch Ursachen erzeugt wird, welche von den Kräften $\overline{Q}$ ganz unabhängig sind, bezeichnet man δ_m als eine *virtuelle Verschiebung des Angriffspunktes m der Kraft* $\overline{Q}_m$ und nennt das Produkt $\overline{Q}_m \delta_m$ die *virtuelle Arbeit der Kraft* $\overline{Q}_m$. Ebenso bezeichnet man den Ausdruck $(-\overline{S}_{ik} \Delta s_{ik})$ als die virtuelle Arbeit der beiden in den Knotenpunkten i und k angreifenden, gegen einander gerichteten Kräfte $\overline{S}_{ik}$ (Fig. 7) und Δs_{ik} als die gegenseitige virtuelle Verschiebung ihrer Angriffspunkte.

Die Gleichung

$$\Sigma \overline{Q}_m \delta_m - \Sigma \overline{S} \Delta s = 0$$

drückt demnach den unter dem Namen *Princip der virtuellen Geschwindigkeiten* (oder besser: *Gesetz der virtuellen Verschiebungen*) bekannten Satz aus:

Die Summe der virtuellen Arbeiten sämmtlicher in den Knotenpunkten angreifenden äusseren und inneren Kräfte $\overline{Q}$ *und* $\overline{S}$ *ist im Falle einer verschwindend kleinen Formveränderung des Fachwerks gleich Null.*

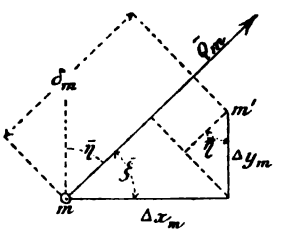


Fig. 8.

Dieser Satz ist zuerst von *Mohr* zur Berechnung des Fachwerks benutzt worden.

Man nennt auch das Produkt $(+\overline{S}_{ik} \Delta s_{ik})$ die *virtuelle Formänderungsarbeit* des durch die beiden Kräfte $\overline{S}_{ik}$ beanspruchten Stabes s_{ik} und den Ausdruck $\Sigma \overline{S} \Delta s$ die virtuelle Formänderungsarbeit des Fachwerks. Die Gleichung (13) sagt also aus: *dass die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte ebenso gross ist wie die virtuelle Formänderungsarbeit des Fachwerks.*

Die Anwendung dieses Gesetzes auf den wirklichen Belastungszustand und den wirklichen Formänderungszustand liefert die Gleichung:

$$(14) \qquad \Sigma Q_m \delta_m = \Sigma S \Delta s,$$

in welcher jetzt δ_m die Projektion des wirklichen Weges des Knotens m auf die Richtung von Q_m bedeutet.

Wir werden die Gleichungen (13) und (14) auch als *Arbeitsbe-*

dingungen oder *Arbeitsgleichungen* bezeichnen und z. B. die am häufigsten benutzte Gleichung (18) kurz die *Arbeitsgleichung für den Belastungszustand* $(\overline{Q})$ nennen, wobei wir dann stillschweigend voraussetzen, dass es sich um den wirklichen Verschiebungszustand handelt.

8. — Für die Folge ist es wichtig, die von den äusseren Kräften Q verrichtete mechanische Arbeit A zu bestimmen, und zwar für den Fall, dass das anfangs spannungslose Fachwerk keinen Temperaturänderungen unterworfen wird.

Die äusseren und inneren Kräfte wachsen allmählich von Null bis zu ihren Endwerthen Q und S an. Sind Q_x, S_x gleichzeitige Zwischenwerthe dieser Kräfte, und nehmen in dem Augenblicke, in welchem die Q_x und S_x wirken, die Verschiebungen δ und Δs um $d\delta$ und $d(\Delta s)$ zu, so ist nach (13):

$$\Sigma Q_x d\delta = \Sigma S_x d\Delta s,$$

und diese Gleichung gilt für jedes der unendlich kleinen Zeittheilchen, in welche sich die ganze Bewegungsdauer zerlegen lässt. Hieraus folgt aber $\left(\text{mit } \Delta s = \frac{Ss}{EF}\right)$:

$$(15)\quad \Sigma \int_0^Q Q_x d\delta = \Sigma \int_0^S S_x d\Delta s = \Sigma \int_0^S S_x \frac{dS_x s}{EF} = \Sigma \frac{S^2 s}{2\,EF} = \frac{1}{2} \Sigma S \Delta s.$$

Da nun nach (14)

$$\tfrac{1}{2} \Sigma S \Delta s = \tfrac{1}{2} \Sigma Q_m \delta_m$$

ist, so erhält man für die gesuchte Arbeit $A = \Sigma \int_0^Q Q_x d\delta$ den Ausdruck:

$$(16)\qquad A = \tfrac{1}{2} \Sigma Q_m \delta_m$$

und gelangt zu dem zuerst von *Clapeyron* bewiesenen Gesetze:

> *Wird ein anfänglich spannungsloses Fachwerk, dessen Temperatur sich in keinem Punkte ändert, von äusseren Kräften ergriffen, welche allmählich von Null aus anwachsen, so ist die mechanische Arbeit der äusseren Kräfte unabhängig von dem Gesetze, nach welchem diese Kräfte zunehmen und auch unabhängig von der Reihenfolge, in der die äusseren Kräfte am Fachwerke angebracht werden; sie ist stets halb so gross, als wenn sämmtliche Kräfte Q während der ganzen Formänderung ihre Endwerthe hätten.*

c. Anwendung der Gleichung $\Sigma \overline{Q}\delta = \Sigma \overline{S}\Delta s$ auf statisch bestimmte Fachwerke.

9. — Die Aenderungen Δs der Stablängen s eines statisch bestimmten Fachwerks seien bekannt; auch seien die durch Nachgeben der elastischen Widerlager entstandenen Verschiebungen der Stützpunkte gegeben. Zu lösen seien folgende Aufgaben:

1. Aufgabe. Gesucht ist die Strecke δ_{mm}, um welche sich die Entfernung zweier Knotenpunkte m und m_1 ändert.

Man nehme in m und m_1 zwei entgegengesetzt gleiche, zusammenfallende Kräfte von der Grösse *eins* an (Fig. 9) und wähle den Sinn derselben so, dass sie in Folge der Vergrösserung der Entfernung mm_1 um δ_{mm} die positive virtuelle Arbeit $1 \cdot \delta_{mm}$ verrichten. Hierauf bestimme man mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen die von jenen Kräften erzeugten Stützenwiderstände $\overline{C}$ und Spannkräfte $\overline{S}$ und schreibe für diesen *gedachten* Belastungszustand die Arbeitsgleichung $\Sigma \overline{Q}\delta = \Sigma \overline{S}\Delta s$ an. Bezeichnet man die virtuelle Arbeit der Kräfte $\overline{C}$ mit $\overline{L}$, so erhält man die Gleichung

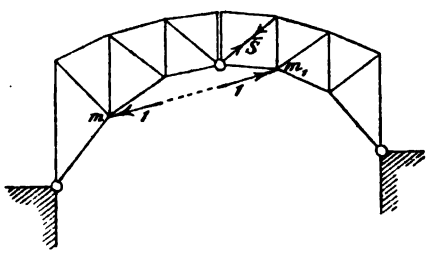


Fig. 9.

$$1 \cdot \delta_{mm} + \overline{L} = \Sigma \overline{S}\Delta s, \qquad (17)$$

aus welcher sich δ_{mm} unmittelbar berechnen lässt.

Die beiden in m und m_1 angreifenden Kräfte *Eins* mögen (nach *Mohr*) die *Belastungseinheit des Punktepaares* m, m_1 genannt werden und δ_{mm} die *gegenseitige Verschiebung des Punktepaares* m, m_1. Ist m_1 ein ausserhalb des Fachwerks liegender fester Punkt, so giebt die Gleichung (17) die Verschiebung δ_{mm} des Knotens m im Sinne $m_1 m$ an d. i. die Projektion des Weges des Knotens m auf die Richtung $m_1 m$. (Fig. 10 veranschaulicht den Fall zweier anfänglich senkrecht übereinander liegender Punkte m, m_1; sie stellt einen Theil eines *Gerber*'schen Balkens vor, dessen schwebender Theil (I) bei m ein bewegliches Auflager erhält.)

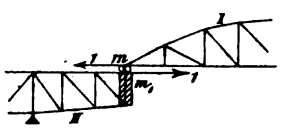


Fig. 10.

Es sei beispielsweise die Aufgabe gestellt, für den in der Figur 11 angegebenen Belastungszustand eines Bogenträgers mit drei Gelenken die wagerechte Verschiebung δ_h des Scheitelgelenkes G zu berechnen. In Folge der

Elasticität der Widerlager mögen sich die Kämpfergelenke A und B in wagerechter Richtung um ξ_1 beziehungsweise ξ_2 verschieben und in senkrechter Richtung um η_1 bezw. η_2. Die Richtungen dieser Verschiebungen sind in

Fig. 11.

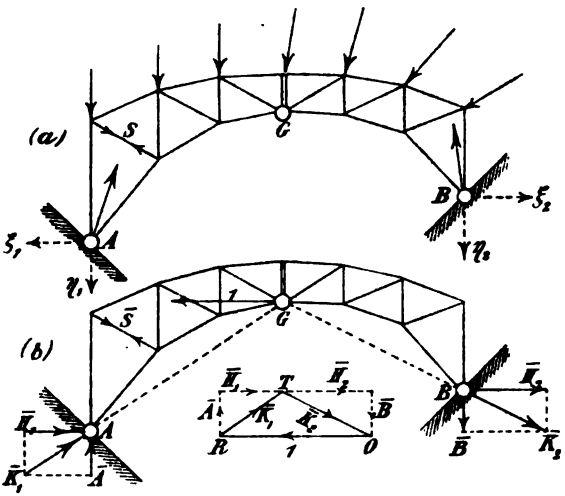


Fig. 12.

Fig. 11 durch gestrichelte Pfeile angedeutet worden. Es sollen Temperaturveränderungen berücksichtigt werden. Dann ist $\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s$, welcher Werth nach Ermittelung der ***wirklichen*** Spannkräfte S für jeden Stab des Fachwerks berechnet wird. Fig. 12 giebt den ***gedachten*** Belastungszustand an. Die Verschiebung δ_h soll nach links positiv gezählt werden, und es wurde daher in G eine nach links gerichtete Last Eins angenommen; diese ruft Kämpferdrücke $\overline{K_1}$ und $\overline{K_2}$ hervor, welche beziehungsweise die Richtungen AG und GB haben und durch das Kräftedreieck ORT bestimmt sind. Ihre wagerechten und senkrechten Seitenkräfte seien $= \overline{H_1}$, $\overline{H_2}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$. Die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte ist dann:

$$\overline{L} = -\overline{A}\eta_1 - \overline{H_1}\xi_1 + \overline{B}\eta_2 + \overline{H_2}\xi_2;$$

denn die Kräfte $\overline{A}$, $\overline{H_1}$ haben den entgegengesetzten Sinn wie die Verschiebungen η_1, ξ_1, während $\overline{B}$, $\overline{H_2}$ von gleichem Sinne sind wie die Verschiebungen η_2, ξ_2. Die Bedingung:

$$1 \cdot \delta_h + \overline{L} = \Sigma S \Delta s \text{ liefert}$$

$$\delta_h = \Sigma \overline{S}\left(\frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s\right) + \overline{A}\eta_1 + \overline{H_1}\xi_1 - B\eta_2 - H_2\xi_2.$$

In gleicher Weise kann man die senkrechte Verschiebung δ_v des Scheitelgelenkes G bestimmen und hierauf δ_h und δ_v zur Gesammtverschiebung des Punktes G zusammensetzen.

2. Aufgabe. Es wird die Aenderung δ_m des Winkels φ gesucht, welchen die beiden durch die Knotenpunkte i, k bezw. i_1, k_1 bestimmten Geraden (m) und (m_1) eines ebenen Fachwerks miteinander bilden. Fig. 13.

Um δ_m zu erhalten, wird die Gleichung $\Sigma \overline{Q}\delta = \Sigma \overline{S}\Delta s$ auf den

in der Figur 18 dargestellten *gedachten Belastungszustand* und den *wirklichen Verschiebungszustand* angewendet. In i und k sind zwei zur Geraden (m) rechtwinklige, entgegengesetzt gleiche Kräfte von der Grösse $\frac{1}{e}$ *) angenommen worden, und in i_1 und k_1 zwei zur

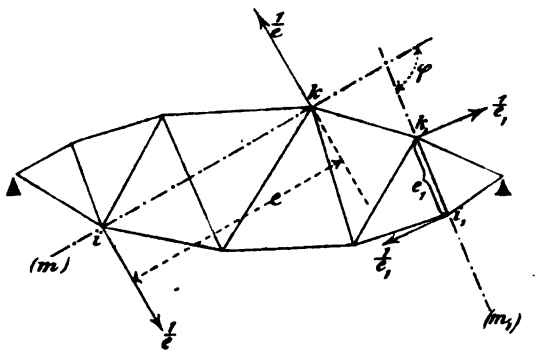


Fig. 13.

Geraden (m_1) rechtwinklige, entgegengesetzt gleiche Kräfte $\frac{1}{e_1}$. Der Sinn dieser Kräfte wurde so gewählt, dass die beiden Kräftepaare (deren Momente gleich $\frac{1}{e} e = 1$ und gleich $\frac{1}{e_1} e_1 = 1$ sind) in Folge Vergrösserung des Winkels φ um δ_m die positive Arbeit $1 \cdot \delta_m$ verrichten. Der Werth dieser Arbeit ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung.

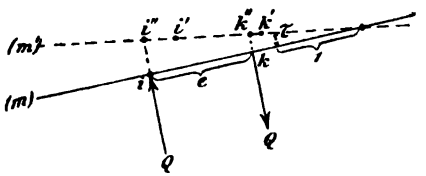


Fig. 14.

Dreht sich eine unbegrenzte Gerade (m), welche die Angriffspunkte i und k eines zur (m) rechtwinkligen Kräftepaares enthält (Fig. 14), um den verschwindend kleinen Winkel τ in die Lage (m'), und sind i', k' die schliesslichen Lagen von i, k, so nehme man, behufs Bestimmung der Arbeit des Kräftepaares, zunächst an, dass i und k die Kreisbogentheilchen ii'' und kk'' beschreiben, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Schnittpunkt von (m) und (m') ist. Hierauf verschiebe man i'' und k''

*) $\frac{1}{e} = 1 \frac{1}{e} =$ Krafteinheit $\times \frac{\text{Längeneinheit}}{e}$.

in die Lagen i' und k'. Während des ersten Theiles dieser verschwindend kleinen Bewegung verrichtet das Kräftepaar, dessen Moment $M = Qe$ sein möge, die Arbeit $Qii'' - Qkk'' = Qe\tau = M\tau$, und während des zweiten Theiles ist die geleistete Arbeit $= 0$, weil die Verschiebungen $i''i'$ und $k''k'$ rechtwinklig zu Q sind. Mithin giebt $M\tau$ die Gesammtarbeit des Kräftepaares an. Drehen sich also die Geraden (m) und (m_1) der Figur 13 im Sinne der in i und k beziehungsweise in i_1 und k_1 angreifenden Kräftepaare (deren Momente $= 1$ sind) um die Winkel τ und τ_1, so ist, wegen $\tau + \tau_1 = \delta_m$, die von beiden Paaren verrichtete Arbeit $= 1 \cdot \tau + 1 \cdot \tau_1 = 1\,\delta_m$, wobei δ_m als Bogenlänge für den Halbmesser 1 aufzufassen ist.

Bezeichnet man nun die virtuelle Arbeit der von den beiden Kräftepaaren etwa erzeugten Stützenwiderstände mit $\bar{L}$ und die Spannkräfte des gedachten Belastungszustandes mit $\bar{S}$, so ergiebt sich zur Bestimmung von δ_m die mit (17) der Form nach übereinstimmende Gleichung:

$$\delta_m + \bar{L} = \Sigma \bar{S} \Delta s .$$

Sind i_1 und k_1 zwei ausserhalb des Fachwerks gelegene feste Punkte, so liefert die vorstehende Gleichung den Drehungswinkel δ_m der Geraden m.

Die Aenderung δ_m des Winkels φ in Figur 13 nennen wir die *gegenseitige Drehung des Geradenpaares* (m) (m_1) und die vier in i, k, i_1, k_1 angreifenden Kräfte $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e_1}\right)$ fassen wir unter dem Namen *Belastungseinheit des Geradenpaares* (m) (m_1) zusammen. Es entsprechen diese Begriffe den auf Seite 13 erklärten, auf das Punktpaar m, m_1 sich beziehenden.

10. — Bei Lösung der beiden in No. 9 vorgeführten Aufgaben ist nach folgender Regel verfahren worden. Um die Verschiebung bezw. Drehung δ_m zu bestimmen, wurde das Fachwerk so belastet gedacht, dass die angenommenen Lasten zusammen die virtuelle Arbeit $1 \cdot \delta_m$ verrichten. Auf diesen gedachten Belastungszustand und auf den wirklichen Verschiebungszustand wurde die Bedingung $\Sigma \bar{Q} \delta_m = \Sigma \bar{S} \Delta s$ angewendet und eine Gleichung erhalten, aus welcher sich δ_m unmittelbar berechnen liess.

Nach dieser Regel lassen sich nun die verschiedenartigsten Aufgaben lösen.

Soll beispielsweise für ein ebenes Fachwerk die Aenderung δ_m der in bestimmter Richtung gemessenen Entfernung mf eines Knotens m von einer durch zwei Knoten i und k gehenden Geraden (m_1) ermittelt werden, so denke man das Fachwerk auf die in Fig. 15 an-

gegebene Weise belastet. Die in m angenommene Last Eins hat die Richtung fm; die ihr parallelen, in i und k wirksamen Kräfte $1\frac{e_1}{l}$ und $1\frac{e}{l}$ besitzen eine mit der Geraden mf zusammenfallende, von m nach f gerichtete Mittelkraft von der Grösse *eins*. Die gesammte virtuelle Arbeit dieser drei Lasten ist $= 1 \cdot \delta_m$, und es ergiebt sich daher nach Berechnung der von diesen Lasten hervorgerufenen Spannkräfte $\overline{S}$

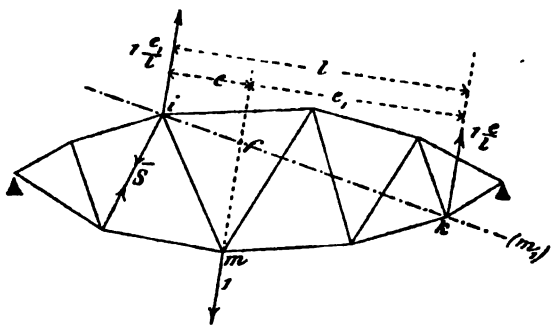


Fig. 15.

und Stützenwiderstände (welche letztere die Arbeit $\overline{L}$ verrichten mögen) die Arbeitsbedingung:

$$1 \cdot \delta_m + \overline{L} = \Sigma \overline{S} \Delta s,$$

welche dieselbe Form hat wie die Gleichung (17).

Noch verschiedenartiger sind die bei räumlichen Fachwerken zu stellenden und mit Hilfe der oben angegebenen Regel lösbaren Aufgaben. Wir begnügen uns damit, eine derselben anzuführen. Es sei die Aenderung der Länge des Lothes gesucht, welches von einem Knotenpunkte m auf die durch irgend drei Knotenpunkte h, i, k bestimmte Ebene $[m_1]$ gefällt ist und dessen Fusspunkt f sein möge. Man nehme in m eine von f nach m gerichtete Last Eins an, ferner drei in h, i, k angreifende, zur Ebene $[m_1]$ rechtwinklige Lasten, deren Mittelkraft in die Gerade mf fällt, von m nach f gerichtet ist und die Grösse eins besitzt. Die Gesammtarbeit der vier Lasten ist dann $= 1 \cdot \delta_m$, und das oben angegebene Verfahren ermöglicht wieder die unmittelbare Berechnung von δ_m.

d. Anwendung der Gleichung $\Sigma \overline{Q} \delta = \Sigma \overline{S} \Delta s$ auf statisch unbestimmte Fachwerke.

11. — Wir leiten die Berechnung der statisch unbestimmten Fachwerke durch Lösung einer einfachen Aufgabe ein, wenden aber hierbei ein ganz allgemeines, stets zum Ziele führendes Verfahren an.

Es soll der in Fig. 16 dargestellte, über drei Oeffnungen gespannte, ebene Bogenträger untersucht werden. Bei A und D sind feste, bei B und C bewegliche Auflagergelenke angeordnet. In den auf wagerechten Geraden geführten Stützpunkten B und C greifen senkrechte Widerstände B und C an. Die senkrechten und wagerechten Seitenkräfte der in A und D wirksamen Auflagerkräfte seien A und H, beziehungsweise D und X_a.

Die Anzahl der an den Auflagern auftretenden unbekannten Kräfte ist $= 6$, die Anzahl der Stäbe $= 83$, diejenige der Knotenpunkte $= 43$.

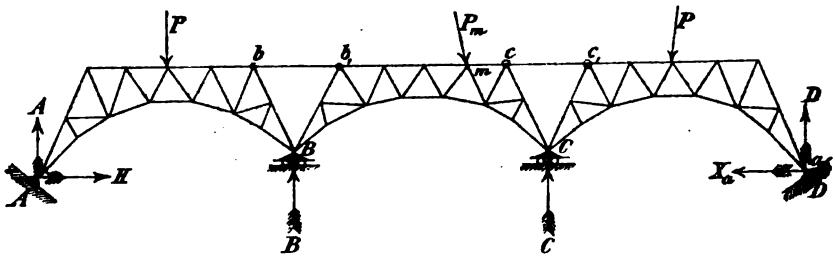


Fig. 16.

Da $6 + 83 > 2 \cdot 43$ ist, so ist das Fachwerk (Bd. I Absch. XIII) statisch unbestimmt, und zwar ist es dreifach statisch unbestimmt, weil $6 + 83 - 2 \cdot 43 = 3$ ist*). Werden drei der zu berechnenden Unbekannten zunächst als gegeben angenommen, z. B. die Auflagerkraft X_a (deren Angriffspunkt die Ordnungsziffer a erhalten möge) und die Spannkräfte X_b und X_c der beiden Stäbe bb_1 und cc_1, so lassen sich die übrigen Spannkräfte und Auflagerkräfte für jeden Belastungszustand mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen eindeutig berechnen. Zu diesem Zwecke wird das Fachwerk durch Beseitigung der beiden Stäbe bb_1 und cc_1 und durch Umwandlung des festen Auflagergelenkes D in ein auf wagerechter Bahn verschiebbares statisch bestimmt gemacht, und hierauf werden, damit der Spannungszustand des Fachwerks ungeändert bleibt, die Spannkräfte X_b, X_c der beseitigten Stäbe als äussere Kräfte wieder hinzugefügt. Auch wird in a die wagerechte Kraft X_a angebracht. Fig. 17. Die Kräfte X_a, X_b, X_c *in Fig. 17 werden vorübergehend zu den Lasten gerechnet.*

Das in Fig. 17 dargestellte statisch bestimmte Fachwerk nennen

*) Man erkennt auch ohne weiteres, dass der aus drei gegliederten Scheiben und zwei Stäben bb_1, cc_1 bestehende Träger statisch bestimmt wäre, wenn nur drei Stützenwiderstände vorhanden wären. Nun treten aber deren 6 auf, so dass eine dreifache Unbestimmtheit vorliegt.

wir das *Hauptsystem* des fraglichen Trägers; seine Stäbe heissen die *Hauptstäbe* oder auch die *nothwendigen Stäbe*, während bb_1 und cc_1 in Fig. 16 *überzählige Stäbe* genannt werden. In gleicher Weise unterscheidet man *nothwendige und überzählige Auflagerkräfte*. Eine überzählige Auflagerkraft ist X_a in Fig. 16.

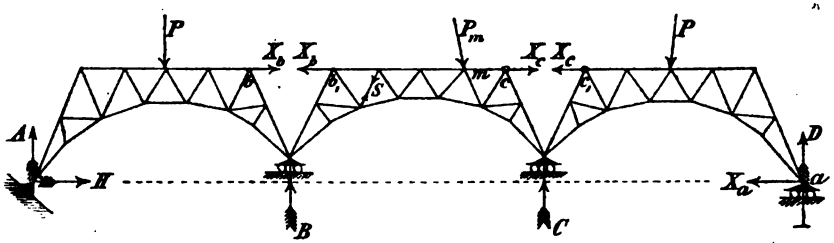


Fig. 17.

Die Spannkraft S in irgend einem Hauptstabe ist, da sämmtliche Gleichgewichtsbedingungen vom ersten Grade sind, eine lineare Funktion der Kräfte P, X_a, X_b, X_c; sie lässt sich in der Form darstellen:

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c , \tag{18}$$

worin S_a, S_b, S_c sowohl von den Lasten P als auch von den Kräften X unabhängig sind, während S_0 eine Funktion ersten Grades der gegebenen Lasten P ist. Die Werthe S_0, S_a, S_b, S_c können wie folgt gedeutet werden.

Das Glied S_0 stellt diejenige Spannkraft vor, welche in dem fraglichen Stabe entsteht, sobald X_a, X_b, X_c gleich Null angenommen werden, sobald also nur die Lasten P auf das Hauptnetz wirken, ein Be-

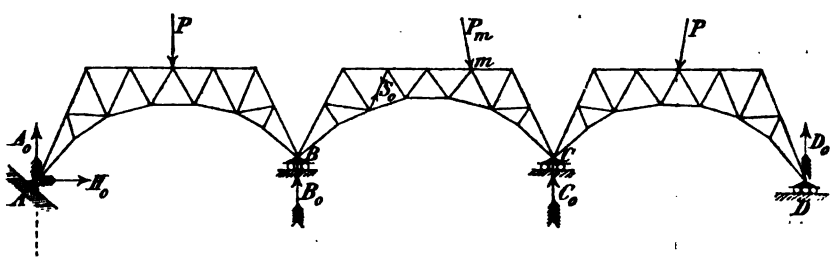


Fig. 18.

lastungszustand, welcher in Fig. 18 dargestellt worden ist und in der Folge kurz der „*Zustand* $X = 0$“ heissen möge.

S_a darf als diejenige Spannkraft aufgefasst werden, welche in dem fraglichen Stabe erzeugt wird, sobald sämmtliche Lasten P und ebenso die Grössen X_b, X_c gleich Null angenommen werden, während $X_a = -1$

gesetzt wird. Dieser Belastungszustand möge der „*Zustand* $X_a = -1$“ heissen; er ist in der Fig. 19 angegeben worden. Die im Punkte a angreifende wagerechte *Last* $X_a = -1$ ruft an den Auflagern des Hauptnetzes Widerstände hervor, über deren Grösse die Fig. 19 Aufschluss giebt. (Der bei A erzeugte Widerstand muss die Richtung BA und eine wagerechte Seitenkraft von der Grösse 1 haben; seine senkrechte Seitenkraft besitzt deshalb die Grösse $1 \cdot \frac{e}{l_1}$. Ebenso schliesst man auf den senkrechten Widerstand bei D und findet dann die in B und C angreifenden Auflagerkräfte.)

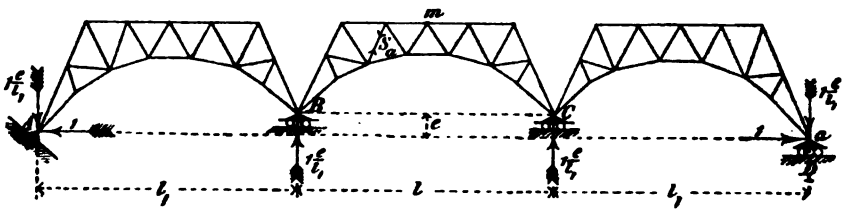


Fig. 19.

In gleicher Weise können S_b und S_c als die den Belastungszuständen: $X_b = -1$ und $X_c = -1$ entsprechenden Spannkräfte betrachtet werden. Diese beiden Zustände sind in den Figuren 20 und 21 dargestellt worden. Grösse und Richtung der Auflagerkräfte sind den Figuren zu entnehmen. Im Belastungsfalle Fig. 20 sind die Stäbe des Theiles CD spannungslos, im Belastungsfalle Fig. 21 diejenigen des Theiles AB.

Alle diese Spannkräfte S_0, S_a, S_b, S_c lassen sich mit Hilfe der im ersten Bande unseres Buches entwickelten Verfahren bestimmen, worauf S gegeben ist durch Gleichung (18), während für die nothwendigen Auflagerkräfte A, B, C, H die folgenden Werthe gefunden werden:

$$(19)\quad \begin{cases} A = A_0 + X_a \frac{e}{l_1} - X_b \frac{h}{l_1} \text{*)} \\ B = B_0 - X_a \frac{e}{l_1} + X_b \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l}\right) - X_c \frac{h}{l} \\ C = C_0 - X_a \frac{e}{l_1} - X_b \frac{h}{l} + X_c \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l}\right) \\ D = D_0 + X_a \frac{e}{l_1} - X_c \frac{h}{l_1} \\ H = H_0 + X_a. \end{cases}$$

*) Den Zuständen $X_a = -1$; $X_b = -1$: $X_c = -1$ müssen entsprechen: $A = -\frac{e}{l_1}$; $A = +\frac{h}{l_1}$; $A = 0$. Vergl. Fig. 19, 20, 21. Auf dieselbe Weise prüfe man die Ausdrücke für B, C, D, H.

Die Aufgabe der Berechnung des Fachwerks ist jetzt auf diejenige zurückgeführt: „*die statisch nicht bestimmbaren Grössen* X_a, X_b, X_c *zu ermitteln*", und diese Aufgabe kann man in einfacher Weise lösen, indem man die Arbeitsbedingung $\Sigma\bar{Q}\delta = \Sigma\bar{S}\Delta s$ der Reihe nach auf die drei gedachten Belastungszustände: $X_a = -1$; $X_b = -1$; $X_c = -1$ und — in allen drei Fällen — auf den wirklichen Verschiebungszustand anwendet. Man gelangt dann zu drei Gleichungen ersten Grades, welche nur die Unbekannten X_a, X_b, X_c enthalten.

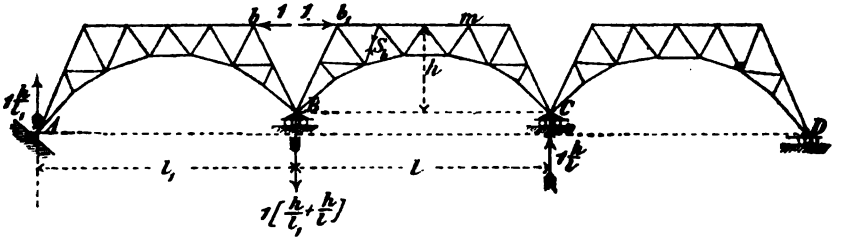


Fig. 20.

Nehmen wir an, dass sich in Folge der Nachgiebigkeit der Widerlager

Stützpunkt A in senkrechter Richtung um δ_A nach abwärts verschiebt,
" A " wagerechter " " δ_H " links,
" B " senkrechter " " δ_B " abwärts,
" C " " " " δ_C " "
" D " " " " δ_D " "
" D " wagerechter " " δ_a " rechts,

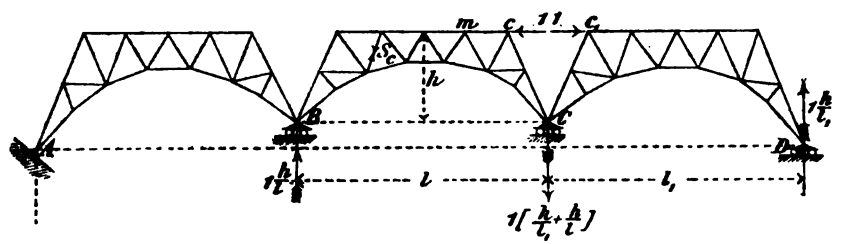


Fig. 21.

so lautet die Arbeitsgleichung für den Zustand $X_a = -1$ (Fig. 19):

(I) $$L_a + 1 \cdot \delta_a = \Sigma S_a \Delta s, \text{ wobei}$$

$$L_a = 1 \frac{e}{l_1} (\delta_A - \delta_B - \delta_C + \delta_D) + 1 \cdot \delta_H$$

die virtuelle Arbeit der an den Auflagern des statisch bestimmten Hauptnetzes angreifenden Stützenwiderstände bedeutet.

Für den Zustand $X_b = -1$ ergiebt sich, wenn δ_b die Aenderung der Länge s_b des überzähligen Stabes bb_1 bezeichnet;

(II) $$L_b + 1 \cdot \delta_b = \Sigma S_b \Delta s, \text{ wo}$$

$L_b = -1 \frac{h}{l_1} \delta_A + 1 \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l}\right) \delta_B - 1 \frac{h}{l} \delta_C$ = virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte, und für den Zustand $X_c = -1$ (wenn δ_c = Aenderung der Stablänge $\overline{cc_1} = s_c$)

(III) $$L_c + 1 \cdot \delta_c = \Sigma S_c \Delta s, \text{ wo}$$

$$L_c = -1 \frac{h}{l} \delta_B + 1 \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l}\right) \delta_C - 1 \frac{h}{l_1} \delta_D.$$

Wird $\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s$ gesetzt und zur Abkürzung die Bezeichnung

$$\rho = \frac{s}{EF}$$

eingeführt, so gehen mit Berücksichtigung von (18) die Gleichungen (I), (II), (III) über in:

(20)
$$\begin{cases} L_a + \delta_a = \Sigma S_a S_o \rho - X_a \Sigma S_a^2 \rho - X_b \Sigma S_a S_b \rho - X_c \Sigma S_a S_c \rho + \Sigma S_a \varepsilon t s \\ L_b + \delta_b = \Sigma S_b S_o \rho - X_a \Sigma S_b S_a \rho - X_b \Sigma S_b^2 \rho - X_c \Sigma S_b S_c \rho + \Sigma S_b \varepsilon t s \\ L_c + \delta_c = \Sigma S_c S_o \rho - X_a \Sigma S_c S_a \rho - X_b \Sigma S_c S_b \rho - X_c \Sigma S_c^2 \rho + \Sigma S_c \varepsilon t s. \end{cases}$$

Die auf der rechten Seite stehenden Summen erstrecken sich über sämmtliche nothwendigen Stäbe.

Bezeichnet man nun mit F_b, F_c die Querschnitte der beiden überzähligen Stäbe, mit E_b, E_c die Elasticitätsziffern, mit t_b, t_c die Temperaturänderungen, und mit ε_b, ε_c die Verlängerungsverhältnisse für $t = 1^0$, so hat man in die Gleichungen (20) zu setzen:

(21) $$\delta_b = \frac{X_b s_b}{E_b F_b} + \varepsilon_b t_b s_b; \qquad \delta_c = \frac{X_c s_c}{E_c F_c} + \varepsilon_c t_c s_c,$$

und ist jetzt im Stande, die Unbekannten X_a, X_b, X_c zu berechnen, vorausgesetzt, dass die Formänderungen der Stützen bekannt oder als Funktionen von X darstellbar sind. Dass die letztere Aufgabe meistens auf unüberwindliche Schwierigkeiten stösst, wurde bereits auf Seite 3 angeführt und begründet. In Folge dessen begnügt man sich in der Regel damit, bei der Untersuchung neuer Arten statisch unbestimmter Träger festzustellen, welchen Einfluss die gegenseitigen Verschiebungen der Stützpunkte auf den Spannungszustand des Trägers ausüben. Ist dieser Einfluss ein wesentlicher und schädlicher, so dürfen die fraglichen Träger nur dann ausgeführt werden, wenn auf nahezu unverschiebliche Stützen gerechnet werden darf; sie sind z. B. bei unsicherem Baugrunde zu verwerfen; auch ist in diesem Falle bei der Aufstellung der Träger besonders darauf zu achten, dass die Stützpunkte genau die in der Rechnung vorausgesetzte Lage erhalten.

Zuweilen aber ist es möglich, die Formänderungen der Widerlager bei der Berechnung der Träger theilweise zu berücksichtigen. Wird z. B. der in der Fig. 16 dargestellte Träger bei B und C durch Säulen von der Länge h' gestützt, und entsprechen diesen Säulen die Werthe E', F', t', ε', so ist bei Vernachlässigung der Formänderung der Grundpfeiler und des Baugrundes zu setzen:

δ_B = der durch den Druck B erzeugten Verkürzung der Säule, vermindert um die Dehnung dieser Säule in Folge der Temperaturerhöhung, d. i.

$$\delta_B = \frac{B h'}{E' F'} - \varepsilon' t' h'$$

und ebenso ist einzuführen:

$$\delta_C = \frac{C h'}{E' F'} - \varepsilon' t' h'.$$

Nun drückt man B und C mittels (19) durch X_a, X_b, X_c aus und löst schliesslich die Gleichungen (20) nach den drei Unbekannten X auf.

12. — Die in den Gleichungen (20) stehenden Summenausdrücke lassen sich auf eine sehr einfache und für die Folge sehr nützliche Weise deuten. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit

δ_{ma} die Verschiebung, welche der Angriffspunkt m irgend einer Last P_m in der Richtung von P_m erfährt, sobald auf das statisch bestimmte Hauptnetz nur die Belastung $X_a = -1$ wirkt [Zustand $X_a = -1$ (Fig. 19)],

δ_{mb} desgleichen die Verschiebung von m im Sinne von P_m und in Folge von $X_b = -1$ (Fig. 20),

δ_{mc} desgleichen die Verschiebung von m im Sinne von P_m und in Folge von $X_c = -1$ (Fig. 21),

ferner mit

δ_{aa} die nach rechts positiv gezählte wagerechte Verschiebung des Punktes a, für den Fall, dass auf das statisch bestimmte Hauptnetz nur die Belastung $X_a = -1$ wirkt,

δ_{ab} die wagerechte Verschiebung von a in Folge von $X_b = -1$,

δ_{ac} „ „ „ „ a „ „ „ $X_c = -1$,

weiter mit

δ_{bb} die gegenseitige Verschiebung des Punktpaares b, b_1 d. i. die Aenderung der Strecke bb_1 für den Fall, dass auf das statisch bestimmte Hauptnetz nur die Last $X_a = -1$ wirkt,

δ_{bb} die Aenderung der Strecke bb_1 in Folge von $X_b = -1$,

δ_{bc} „ „ „ „ bb_1 „ „ „ $X_c = -1$,

δ_{cc} „ „ „ „ cc_1 „ „ „ $X_a = -1$,

δ_{cb} die Aenderung der Strecke cc_1 in Folge von $X_b = -1$,
δ_{cc} „ „ „ „ cc_1 „ „ „ $X_c = -1$,
schliesslich mit

δ_{at} die nach rechts positive, wagerechte Verschiebung des Punktes a, für den Fall, dass das statisch bestimmte, unbelastete Hauptnetz nur einer Temperaturänderung unterworfen wird,

δ_{bt} die in diesem Falle entstehende Aenderung der Strecke bb_1,
δ_{ct} „ „ „ „ „ „ „ „ cc_1;
sodann setzen wir fest, dass bei der Ermittelung aller hier aufgeführten Verschiebungen δ die Stützen des statisch bestimmten Hauptnetzes vollkommen starr angenommen werden sollen.

Jetzt schreiben wir die Arbeitsbedingung für den Belastungszustand $X = 0$ (Fig. 18) an, setzen in dieselbe die dem Zustande $X_a = -1$ (welcher die Spannkräfte S_a und Aenderungen $\Delta s_a = \frac{S_a s}{EF}$ hervorruft) entsprechenden Verschiebungen ein, und erhalten

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = \Sigma S_0 \Delta s_a = \Sigma S_0 \frac{S_a s}{EF},$$

woraus, mit $\frac{s}{EF} = \rho$:

$$\Sigma S_0 S_a \rho = \Sigma P_m \delta_{ma}; \tag{22}$$

und ebenso finden wir:

$$\Sigma S_0 S_b \rho = \Sigma P_m \delta_{mb}; \quad \Sigma S_0 S_c \rho = \Sigma P_m \delta_{mc}.$$

Wird die Arbeitsbedingung für den Belastungszustand $X_a = -1$ angeschrieben, und werden in dieselbe der Reihe nach die den Zuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ entsprechenden Verschiebungen eingeführt, so entstehen die Gleichungen

$$1 \cdot \delta_{aa} = \Sigma S_a \Delta s_a; \quad 1 \cdot \delta_{ab} = \Sigma S_a \Delta s_b; \quad 1 \cdot \delta_{ac} = \Sigma S_a \Delta s_c,$$

und aus diesen folgt

$$\left\{\begin{array}{lll} \Sigma S_a S_a \rho = \delta_{aa}; & \Sigma S_a S_b \rho = \delta_{ab}; & \Sigma S_a S_c \rho = \delta_{ac}. \\ \text{Ebenso wird erhalten:} & & \\ \Sigma S_b S_a \rho = \delta_{ba}; & \Sigma S_b S_b \rho = \delta_{bb}; & \Sigma S_b S_c \rho = \delta_{bc}; \\ \Sigma S_c S_a \rho = \delta_{ca}; & \Sigma S_c S_b \rho = \delta_{cb}; & \Sigma S_c S_c \rho = \delta_{cc}; \end{array}\right. \tag{23}$$

Schliesslich liefern die für die Belastungszustände $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ angeschriebenen und jedesmal auf die nur von den Temperaturänderungen herrührenden Verschiebungen angewandten Arbeitsbedingungen die Gleichungen:

$$\Sigma S_a \varepsilon t s = 1 \cdot \delta_{at}; \quad \Sigma S_b \varepsilon t s = 1 \cdot \delta_{bt}; \quad \Sigma S_c \varepsilon t s = 1 \cdot \delta_{ct}. \tag{24}$$

Die drei Bedingungen (20) lassen sich nun umformen in:

$$(25)\quad \begin{cases} L_a + \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} + \delta_{at} \\ L_b + \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} + \delta_{bt} \\ L_c + \delta_c = \Sigma P_m \delta_{mc} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} + \delta_{ct}, \end{cases}$$

und hierin ist nach Gleichung (23):

$$(26)\qquad \delta_{ab} = \delta_{ba}; \qquad \delta_{ac} = \delta_{ca}; \qquad \delta_{bc} = \delta_{cb}.$$

Die Gleichungen (25) werden sich später in vielen Fällen als sehr nützlich erweisen, da sich die Verschiebungen δ der Knotenpunkte der meisten Fachwerke in sehr einfacher Weise durch Zeichnung feststellen lassen. Wir werden die Figuren, welche diese Verschiebungen liefern, in der Folge *Verschiebungspläne* nennen. (Vergleiche Abschnitt I.) Um die Unbekannten X_a, X_b, X_c mit Hilfe der Gleichungen (25) bestimmen zu können, genügt es, für das statisch bestimmte Hauptnetz vier Verschiebungspläne zu zeichnen, den ersten für den Belastungszustand $X_a = -1$, den zweiten für den Zustand $X_b = -1$, den dritten für $X_c = -1$ und schliesslich den vierten für das unbelastete und nur Temperaturänderungen ausgesetzte Hauptnetz.

13. — Das in No. 9 zur Berechnung eines statisch unbestimmten Fachwerks benutzte Verfahren führt stets zum Ziele; dasselbe besteht darin, die Spannkräfte der überzähligen Stäbe und die überzähligen Stützenwiderstände mit Hilfe von Arbeitsbedingungen von der Art der Gleichung (13) zu bestimmen. Zuweilen stellt es sich nun als zweckmässiger heraus, zunächst andere Werthe als Unbekannte einzuführen und die überzähligen Stabkräfte und Auflagerkräfte als lineare Funktionen dieser *statisch nicht bestimmbaren Grössen* darzustellen. So könnte man z. B. bei Untersuchung des Trägers in Fig. 16 an Stelle der in den Stäben bb_1 und cc_1 auftretenden Spannkräfte, die auf die Drehpunkte B und C bezogenen Momente $S_{b-b1} \cdot h$ und $S_{c-c1} \cdot h$ dieser Kräfte (die sogenannten Stützenmomente) zu Unbekannten wählen und mit Hilfe von Arbeitsbedingungen berechnen.

Man darf also allgemeiner aussprechen:

Sämmtliche Spannkräfte S und nach bestimmten Richtungen wirkenden Auflagerkräfte C eines statisch unbestimmten Fachwerks lassen sich auf die Form bringen:

$$(27)\qquad \begin{aligned} S &= S_0 - S'X' - S''X'' - S'''X''' - \cdots \\ C &= C_0 - C'X' - C''X'' - C'''X''' - \cdots \end{aligned}$$

wobei X', X'', X''' .... gewisse statisch nicht bestimmbare Grössen bedeuten, während S_0, S', S'' ...., C_0, C', C'' .... Werthe vorstellen, welche von den Unbekannten X unabhängig sind. Insbesondere bedeuten S_0 und C_0 die Spannkräfte und Auflagerkräfte des statisch bestimmten Hauptnetzes, in welches das Fachwerk übergeht, sobald sämmtliche Grössen X verschwin-

den; sie sind geradlinige Funktionen der Lasten P, während die $S', S'' \ldots, C', C'' \ldots$ von den P unabhängig sein sollen. Beispielsweise lassen sich S' und C' als diejenigen Werthe deuten, welche die Spannkräfte und Auflagerkräfte annehmen, sobald sämmtliche Lasten P und sämmtliche X verschwinden, ausgenommen X', welchem der Werth (-1) beizulegen ist — ein Belastungszustand, welcher kurz der Zustand $X' = -1$ genannt werden soll.

Weiter darf man sagen:

Die durch die Ursache $X' = -1$ hervorgerufenen Auflagerkräfte C' und Spannkräfte S' sind miteinander im Gleichgewicht, und ebenso sind die C'' im Gleichgewichte mit den S'', die C''' mit den S''' u. s. w.

In Folge dieser Auffassung gelten die Gleichungen (27) nicht nur für die nothwendigen, *sondern auch für die überzähligen* Stäbe und Auflagerkräfte. Ist z. B. X'' die Spannkraft in einem überzähligen Stabe, so entsprechen diesem die Werthe:

$$S_0 = 0,\ S' = 0,\ S'' = -1,\ S''' = 0,\ S'''' = 0 \text{ u. s. w.}$$

und es folgt dann $S = X''$.

Schreibt man nun die Arbeitsbedingung (13) der Reihe nach für die Belastungszustände

$$X' = -1;\ X'' = -1;\ X''' = -1;\ \ldots.$$

an und wendet sie jedesmal auf den wirklichen Verschiebungszustand an, so gelangt man zu den Gleichungen:

$$(28) \qquad L' = \Sigma S' \Delta s;\ L'' = \Sigma S'' \Delta s;\ L''' = \Sigma S''' \Delta s;\ \ldots.$$

in denen $L', L'', L''', \ldots$ die beziehungsweise von den Auflagerkräften $C', C'', C''', \ldots$ verrichteten virtuellen Arbeiten bedeuten.

Die Anzahl der Gleichungen (28) ist ebenso gross wie die Anzahl der statisch nicht bestimmbaren Grössen. Führt man ein:

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s,$$

drückt S mit Hilfe der ersten der Gleichungen (27) aus und setzt schliesslich zur Abkürzung: $\frac{s}{EF} = \rho$, so gelangt man zu den Bedingungen:

$$(29) \quad \begin{cases} L' - \Sigma S' \varepsilon t s = \Sigma S_0 S' \rho - X' \Sigma S'^2 \rho - X'' \Sigma S' S'' \rho - X''' \Sigma S' S''' \rho - \ldots \\ L'' - \Sigma S'' \varepsilon t s = \Sigma S_0 S'' \rho - X' \Sigma S'' S' \rho - X'' \Sigma S''^2 \rho - X''' \Sigma S'' S''' \rho - \ldots \\ L''' - \Sigma S''' \varepsilon t s = \Sigma S_0 S''' \rho - X' \Sigma S''' S' \rho - X'' \Sigma S''' S'' \rho - X''' \Sigma S'''^2 \rho - \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Alle in diesen Gleichungen stehenden Summenausdrücke erstrecken sich über *sämmtliche* Stäbe des Fachwerks, über die nothwendigen *und* überzähligen.

Auf den letzten Satz ist besonders zu achten. Wendet man z. B. die Gleichungen (29) auf den in No. 11 untersuchten und in der Fig. 16 dargestellten Träger an, und setzt man $X' = X_a$, $X'' = X_b$, $X''' = X_c$, so entsprechen dem überzähligen Stabe bb_1 die Werthe:

$$S_0 = 0;\quad S' = 0;\quad S'' = -1;\quad S''' = 0$$

und dem überzähligen Stabe cc_1 die Werthe:

$$S_0 = 0;\quad S' = 0;\quad S'' = 0;\quad S''' = -1.$$

Für jeden nothwendigen Stab ist $S' = S_a$; $S'' = S_b$; $S''' = S_c$.

Die Summen $\Sigma S''^2\rho$, $\Sigma S'''^2\rho$. $\Sigma S''\varepsilon ts$, $\Sigma S'''\varepsilon ts$ unterscheiden sich von den in den Gleichungen (20) stehenden Summen: $\Sigma S_b^2\rho$, $\Sigma S_c^2\rho$, $\Sigma S_b\varepsilon ts$, $\Sigma S_c\varepsilon ts$ (*welche letztere sich nur auf die nothwendigen Stäbe beziehen*) um die den *überzähligen* Stäben entsprechenden Glieder. Es ist also

$$\Sigma S''^2\rho = \Sigma S''^2\frac{s}{EF} = \Sigma S_b^2\frac{s}{EF} + \frac{1\cdot s_b}{E_bF_b} = \Sigma S_b^2\rho + \frac{s_b}{E_bF_b};$$

$$\Sigma S'''^2\rho = \Sigma S_c^2\rho + \frac{s_c}{E_cF_c};$$

$$\Sigma S''\varepsilon ts = \Sigma S_b\varepsilon ts - 1\cdot\varepsilon_b t_b s_b;\quad \Sigma S'''\varepsilon ts = \Sigma S_c\varepsilon ts - 1\cdot\varepsilon_c t_c s_c.$$

Hingegen ist $\Sigma S_0 S''\rho = \Sigma S_0 S_b\rho$; $\Sigma S''S'''\rho = \Sigma S_b S_c\rho$, weil für jeden überzähligen Stab $S_0 = 0$ und entweder $S' = 0$ oder $S'' = 0$ ist, und ebenso folgt, dass in allen übrigen Summen S' durch S_a ersetzt werden darf, S'' durch S_b und S''' durch S_c.

Bei der Berechnung von L' ist die im Belastungsfalle $X_a = -1$ am Stützpunkte a angreifende wagerechte Kraft 1 zu den Auflagerkräften zu rechnen, weil X_a eine Auflagerkraft ist, und es folgt deshalb $L' = L_a + 1\cdot\delta_a$, während $L'' = L_b$ und $L''' = L_c$ ist.

Formt man nun die Gleichungen (29) für den vorliegenden Fall auf diese Weise um, und beachtet noch, dass

$$\delta_b = \frac{X_b s_b}{E_bF_b} + \varepsilon_b t_b s_b \quad\text{und}\quad \delta_c = \frac{X_c s_c}{E_cF_c} + \varepsilon_c t_c s_c$$

ist, so erhält man die auf Seite 22 abgeleiteten Gleichungen (20).

Bei der Anwendung der Gleichungen (29) kommt es hauptsächlich darauf an, die von den Lasten P abhängigen Summen möglichst schnell zu bestimmen. In der Regel wird es sich empfehlen, den in No. 12 eingeschlagenen Weg zu wählen und zu setzen:

(30) $$\Sigma S_0 S'\rho = \Sigma P_m\delta_m';\quad \Sigma S_0 S''\rho = \Sigma P_m\delta_m'';\quad \text{u. s. w.}$$

wobei δ_m', δ_m'' .... diejenigen Verschiebungen bedeuten, welche der Angriffspunkt m irgend einer Last P_m in der Richtung von P_m erfährt, sobald auf das Fachwerk beziehungsweise nur die Ursache $X' = -1$ oder nur die Ursache $X'' = -1$, u. s. w. wirkt.

Alle übrigen (S_0 nicht enthaltenden) Summenausdrücke sind unabhängig von den Lasten; sie brauchen also nur einmal bestimmt zu werden und werden häufig am schnellsten durch Rechnung gefunden,

nachdem man die Spannkräfte S', S'' . . . . berechnet oder mit Hilfe von Kräfteplänen ermittelt hat. Es lassen sich aber diese Summen auch auf dem in No. 13 angegebenen Wege als Verschiebungen deuten und dann oft mit Hilfe einfacher Verschiebungspläne angeben.

14. — Hat man die statisch nicht bestimmbaren Grössen X auf dem in No. 11 bis 13 beschriebenen Wege ermittelt und hierauf mit Hilfe der Gleichungen (18) bezw. (27) die Spannkräfte S berechnet, so kann man die Aenderungen Δs sämmtlicher Stablängen s angeben und ist nun im Stande, alle die in No. 9 und 10 behandelten Aufgaben zu lösen und zwar genau nach dem früher benutzten Verfahren. Dasselbe besteht in der Anwendung der Gleichung $\Sigma \overline{Q}_m \delta_m = \Sigma \overline{S} \Delta s$ auf den wirklichen Verschiebungszustand und auf einen gedachten Belastungszustand, welcher letzterer so zu wählen ist, dass die virtuelle Gesammtarbeit der Lasten $= 1 \cdot \delta_m$ ist, wobei δ_m die gesuchte gegenseitige Verschiebung eines Punktpaares m, m_1 oder die gesuchte gegenseitige Drehung eines Geradenpaares u. s. w. bedeutet. Hierbei ist zu beachten, dass zwischen den gedachten äusseren und inneren Kräften $\overline{Q}$ und $\overline{S}$ nur Gleichgewicht zu bestehen braucht, dass also die Spannkräfte in den überzähligen Stäben und die überzähligen Auflagerkräfte gleich Null gesetzt werden dürfen.

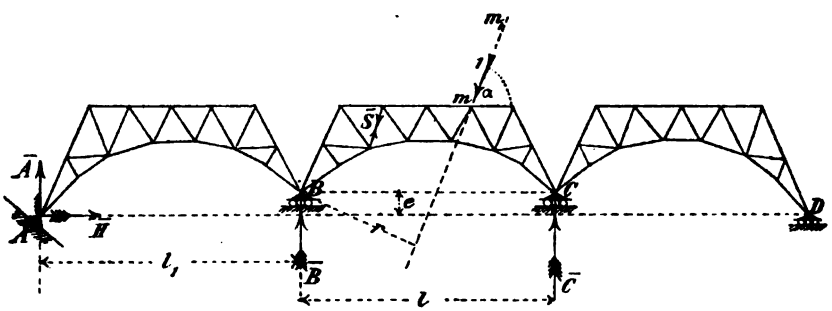


Fig. 22.

Es liege beispielsweise der in Fig. 16 dargestellte Bogenträger vor. Gesucht sei die Verschiebung δ_m, welche irgend ein dem mittleren Bogen angehörender Knotenpunkt m in der Richtung $m_1 m$ erfährt. Die auf Seite 21 angegebenen Verschiebungen der Stützpunkte sollen berücksichtigt werden.

Zuerst wird der Träger durch Beseitigung der überzähligen Stäbe und Auflagerbedingungen statisch bestimmt gemacht (Fig. 22). Hierauf wird in m eine von m_1 nach m gerichtete Last von der Grösse *eins*

angebracht und zur Berechnung der durch diese Last an den Auflagern des Hauptnetzes hervorgerufenen Widerstände $\overline{A}$, $\overline{B}$, ... geschritten. Bildet $m_1 m$ mit der Wagerechten den Winkel α, und ist der lothrechte Abstand des Stützpunktes B von der mm_1 gleich r, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\overline{H} = 1 \cdot \cos\alpha; \quad \overline{A}l_1 - \overline{H}e = 0$$
$$\overline{C}l - 1 \cdot r = 0; \quad \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = 1 \cdot \sin\alpha$$

und aus diesen findet man:

$$\overline{A} = 1\frac{e\cos\alpha}{l_1}; \quad \overline{C} = 1\frac{r}{l};$$
$$\overline{B} = 1 \cdot \left(\sin\alpha - \frac{e\cos\alpha}{l_1} - \frac{r}{l}\right).^{*})$$

Nun bestimmt man die von den äusseren Kräften 1, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{H}$ in den Stäben des Hauptnetzes hervorgerufenen Spannkräfte $\overline{S}$ und schreibt die Arbeitsgleichung an:

$$1 \cdot \delta_m - \overline{A}\delta_A - \overline{B}\delta_B - \overline{C}\delta_C - \overline{H}\delta_H = \Sigma\overline{S}\Delta s,$$

in welche die *wirklichen* Aenderungen Δs der Stablängen einzuführen sind. Es ist also zu setzen:

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon ts \text{ wo } S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c.$$

Auf diesem Wege erhält man stets δ_m als lineare Funktion der Lasten P, der Temperaturänderungen t, der statisch nicht bestimmbaren Grössen X und der nach bestimmten Richtungen erfolgenden Verschiebungen der Stützpunkte. Da nun zwischen den X, P, t, ebenfalls nur Beziehungen ersten Grades bestehen, so folgt, dass im Falle unveränderlicher Gliederung und Stützungsart das in No. 6 ausgesprochene Gesetz von der Zusammenzählung der einzelnen Wirkungen für alle diejenigen Grössen δ_m gilt, welche sich mittels einer Bedingung von der Form $1 \cdot \delta_m + \overline{L} = \Sigma\overline{S}\Delta s$ bestimmen lassen.

15. — Es möge noch darauf hingewiesen werden, dass bei der Auswahl der als überzählig zu bezeichnenden Stäbe und Auflagerbedingungen innerhalb gewisser Grenzen nach Willkür verfahren werden darf.

Führt man z. B. die Widerstände der beiden Mittelstützen des in der Fig. 23 dargestellten durchgehenden Balkens als statisch nicht be-

*) Wir empfehlen dem Leser, diese Kräfte auch durch Zeichnung zu bestimmen.

stimmbare Grössen (X) ein, so erhält man das in der Fig. 24 abgebildete Hauptnetz; dasselbe ist ein einfacher Balken. Hingegen gelangt man zu dem aus drei Einzelbalken bestehenden Hauptnetze (Fig. 25)

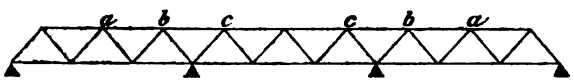


Fig. 23.

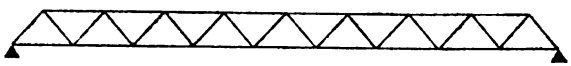


Fig. 24.

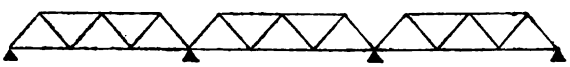


Fig. 25.

Fig. 26.

oder zu dem einen *Gerber*'schen Balken vorstellenden Hauptnetze (Fig. 26), je nachdem man die beiden Stäbe bc oder die beiden Stäbe ab als überzählig bezeichnet.

Auch ist hervorzuheben, dass bei der Ermittelung der Verschiebungen δ_m andere Hauptnetze gebildet werden dürfen, wie bei der Bestimmung der Spannkräfte.

e. Der Maxwell'sche Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen und das Gesetz von Betti.

16. — Wir betrachten ein auf starren Stützen ruhendes, ebenes oder räumliches Fachwerk von unveränderlicher Gliederung und Stützungsart (Seite 6) und setzen einen spannungslosen Anfangszustand voraus. Auch nehmen wir an, dass keine Temperaturänderungen entstehen. Es gilt dann das auf Seite 12 nachgewiesene *Clapeyron*'sche Gesetz, und es ergiebt sich für die mechanische Arbeit A der äusseren Kräfte der nur von den Lasten P abhängige Ausdruck:

$$(31) \qquad A = \tfrac{1}{2}\Sigma P\delta = \tfrac{1}{2}(P_a\delta_a + P_b\delta_b + \cdots + P_m\delta_m + \cdots),$$

in welchem bis jetzt unter P_a, P_b, . . . P_m . . . Einzellasten verstanden wurden und unter δ_a, δ_b, . . . δ_m . . . die wirklichen Verschiebungen

der Angriffspunkte a, b, ... m . . . . derselben, im Sinne der P_a, P_b, . . . P_m . . . —

Für die Folge ist es nun nützlich, den Buchstaben P und δ eine allgemeinere Bedeutung beizulegen und unter jedem der in der Gleichung auftretenden Produkte $\frac{1}{2} P\delta$ die mechanische Arbeit einer ganzen Gruppe von Lasten zu verstehen.

Solche Gruppen lassen sich leicht an der Hand der Untersuchungen in No. 9 und No. 10 bilden.

Werden z. B. die beiden Lasten *Eins* in der Fig. 9 mit P_m multiplicirt (wobei man natürlich entweder *Eins* oder P_m als Zahl zu betrachten hat), so entsteht eine Lastengruppe, deren Beitrag zur Arbeit A gleich $\frac{1}{2} P_m \delta_m$ ist, wenn δ_m die gegenseitige Verschiebung des Punktpaares m, m_1 bedeutet.

Multiplicirt man die vier Lasten in Fig. 13 mit P_m, so erhält man eine Gruppe, deren entsprechendes δ_m gleich der im Bogenmass ausgedrückten gegenseitigen Drehung des Geradenpaares (m), (m_1) ist.

In gleicher Weise lässt sich aus der Figur 15 durch Multiplikation der dort angenommenen Lasten mit P_m eine Lastengruppe ableiten, deren zugehöriges δ_m gleich der Aenderung der Entfernung mf ist.

Die vorliegenden Beispiele dürften genügen, um die Bildung von Lastengruppen zu erläutern, und es sei nur noch hervorgehoben, dass jede am Fachwerk vorkommende Last stets nur einer einzigen Gruppe zugewiesen werden darf. Der Kürze wegen nennen wir eine solche Gruppe von Kräften eine *Belastung* und das entsprechende δ *den Weg dieser Belastung*. Unter anderem werden wir in der Folge öfter von der Belastung P_m eines Punktpaares m, m_1 oder eines Geradenpaares (m), (m_1) sprechen, Belastungen, die nach der vorstehenden Erklärung durch Multiplikation der auf Seite 13 und 16 eingeführten *Belastungseinheiten* jener Paare mit P_m entstehen.

Sämmtliche δ sind lineare Funktionen der Belastungen P; sie lassen sich daher auf die Form bringen:

$$(32)\qquad \begin{cases} \delta_a = \delta_{aa} P_a + \delta_{ab} P_b + \cdots + \delta_{am} P_m + \cdots \\ \delta_b = \delta_{ba} P_a + \delta_{bb} P_b + \cdots + \delta_{bm} P_m + \cdots \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_m = \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \cdots + \delta_{mm} P_m + \cdots \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

wobei die mit einem Doppelzeiger behafteten Werthe δ unabhängig sind von den Belastungen P. Um diese Werthe zu deuten, setze man in irgend einer der Gleichungen (20) sämmtliche P gleich Null, mit

Ausnahme eines einzigen, dem man den Werth Eins beilege. Dann ergiebt sich beispielsweise δ_{mb} als derjenige Werth, welchen der Weg δ_{mm} für den Fall annimmt, dass auf das Fachwerk nur die Belastung $P_b = 1$ wirkt.

17. — Wir setzen jetzt voraus, dass nur zwei Belastungen auftreten, etwa P_m und P_n. Die entsprechenden Wege sind

$$\delta_m = \delta_{mm} P_m + \delta_{mn} P_n$$
$$\delta_n = \delta_{nm} P_m + \delta_{nn} P_n.$$

Wird zuerst nur die Belastung P_m aufgebracht, so ist der Weg derselben $= \delta_{mm} P_m$, und es verrichtet deshalb die von Null aus allmählich anwachsende Belastung P_m die mechanische Arbeit $\frac{1}{2} \delta_{mm} P_m^2$. Fügt man die ebenfalls von Null aus anwachsende Belastung P_n hinzu, so nimmt die Arbeit der äusseren Kräfte erstens um $\frac{1}{2} \delta_{nn} P_n^2$ zu, weil die wachsende Belastung P_n den Weg $\delta_{nn} P_n$ zurücklegt, und zweitens um $P_m(\delta_{mn} P_n)$, weil der Weg der bereits vorhandenen Belastung P_m die Vergrösserung $\delta_{mn} P_n$ erfährt. Im Ganzen entsteht:

$$A = \tfrac{1}{2} \delta_{mm} P_m^2 + \tfrac{1}{2} \delta_{nn} P_n^2 + \delta_{mn} P_m P_n.$$

Wird zuerst die Belastung P_n aufgebracht und nachher P_m, so ergiebt sich durch Vertauschung von m und n:

$$A = \tfrac{1}{2} \delta_{nn} P_n^2 + \tfrac{1}{2} \delta_{mm} P_m^2 + \delta_{nm} P_n P_m.$$

Nach dem Clapeyron'schen Gesetze müssen aber die beiden für A gewonnenen Ausdrücke übereinstimmen, und es folgt daher die wichtige Gleichung:

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}. \tag{33}$$

Dieselbe wurde zuerst von *Maxwell* bewiesen und soll in der Folge stets als *Maxwell'scher Lehrsatz* angeführt werden.

Von den vielen Sätzen, welche sich aus der Gleichung (33) ergeben, sind die folgenden für die späteren Untersuchungen von besonderer Bedeutung.

1. Die gegenseitige Verschiebung δ_{mn} eines Punktpaares m, m_1 in Folge der Belastungseinheit eines anderen Punktpaares n, n_1 ist ebenso gross wie die gegenseitige Verschiebung δ_{nm} des Punktpaares n, n_1 in Folge der Belastungseinheit des Punktpaares m, m_1.

2. Die gegenseitige Drehung δ_{mn} eines Geradenpaares $(m), (m_1)$ in Folge der Belastungseinheit eines anderen Geradenpaares $(n), (n_1)$ ist ebenso gross wie die gegenseitige Drehung δ_{nm} des Geradenpaares $(n), (n_1)$ in Folge der Belastungseinheit des Geradenpaares $(m), (m_1)$.

3. Die gegenseitige Verschiebung eines Punktepaares m, m_1 in Folge der Belastungseinheit eines Geradenpaares (n), (n_1) ist ebenso gross wie die gegenseitige Drehung des Geradenpaares (n), (n_1) in Folge der Belastungseinheit des Punktepaares m, m_1.

Die Sätze (2) und (3) beziehen sich auf ein ebenes Fachwerk. Die Erklärungen der Begriffe: Punktpaar, Geradenpaar, Belastungseinheit eines Punkt- oder Geradenpaares finden sich auf Seite 18 und 16.

Noch sei ein Beispiel angeführt, welches besonders geeignet sein dürfte, von der Fruchtbarkeit des Maxwell'schen Satzes zu überzeugen. Man darf nämlich mit Hinweis auf die Figuren 27 und 28, welche ein und dasselbe Fachwerk auf verschiedenartige Weise belastet darstellen, aussprechen: Die

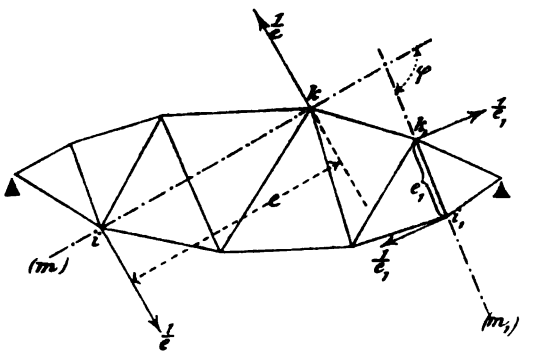


Fig. 27.

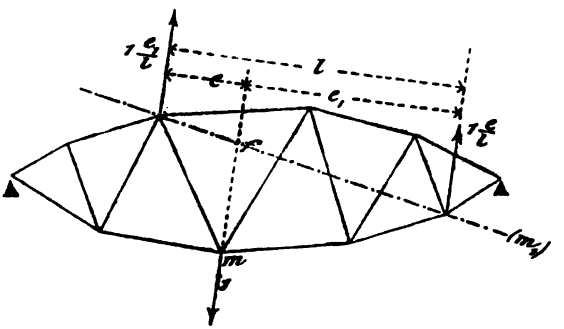


Fig. 28.

Strecke, um welche sich der Abstand mf in Fig. 28 ändert, sobald auf das Fachwerk nur die in der Fig. 27 angenommenen Lasten $\frac{1}{e}$ und $\frac{1}{e_1}$ wirken, ist ebenso gross wie die im Bogenmaass ausgedrückte Aenderung, welche der Winkel φ (Fig. 27) erfährt, falls das Fachwerk auf die in Fig. 28 angegebene Art belastet wird. (Die gleichbezeichneten Strecken e, e_1 der Figuren 27 und 28 brauchen nicht gleich gross zu sein.)

18. — Zu einem anderen Beweise für den Maxwell'schen Satz führt die folgende Betrachtung.

Ein Fachwerk, welches den in No. 16 angeführten Voraussetzungen genügt, werde von beliebigen Belastungen P_m ergriffen. In Folge dessen entstehen Spannkräfte S_m und Aenderungen der Stablängen um $\Delta s_m = \frac{S_m s}{EF}$.

Nach Entfernung der P_m mögen andere Belastungen P_n auf das Fachwerk wirken und die Spannkräfte S_n sowie die Längenänderungen $\Delta s_n = \frac{S_n s}{EF}$ hervorbringen.

Es bedeute nun (δ_{mn}) den Werth, welchen der Weg δ_m irgend einer Belastung P_m annimmt, wenn auf das Fachwerk nur die Belastungen P_n wirken, ferner (δ_{nm}) den nur durch die Belastungen P_m hervorgerufenen Weg irgend einer Belastung P_n. Die Werthe δ wurden durch Klammern ausgezeichnet, da sie eine andere Bedeutung haben als die früher erklärten δ_{mn} und δ_{nm}, deren ersteres z. B. den Werth von δ_m für den Fall vorstellte, dass nur *eine* Belastung P_n wirkt und diese die Grösse *Eins* besitzt.

Schreibt man nun die Arbeitsbedingung (13) einmal an

für den Kräftezustand (P_m, S_m) und den hiervon unabhängigen Verschiebungszustand $[(\delta_{mn})\,\Delta s_n]$

und hierauf

für den Kräftezustand (P_n, S_n) und den hiervon unabhängigen Verschiebungszustand $[(\delta_{nm})\,\Delta s_m]$,

so erhält man die Gleichungen:

$$\Sigma P_m\,(\delta_{mn}) = \Sigma S_m\,\Delta s_n = \Sigma S_m \frac{S_n s}{EF} \quad \text{und}$$

$$\Sigma P_n\,(\delta_{nm}) = \Sigma S_n\,\Delta s_m = \Sigma S_n \frac{S_m s}{EF}$$

und gelangt zu dem zuerst von *Betti* nachgewiesenen Gesetze

$$\Sigma P_m\,(\delta_{mn}) = \Sigma P_n\,(\delta_{nm}). \tag{34}$$

Wirkt auf das Fachwerk das eine mal nur eine Belastung $P_m = 1$, sodann nur eine Belastung $P_n = 1$, so entsteht aus (34):

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}$$

und hieraus folgt, dass der *Maxwell*'sche Satz nur ein besonderer Fall des viel allgemeineren, aber erst später entdeckten *Betti*'schen Satzes ist.

19. — Um die Anwendung des Maxwell'schen Satzes auf die Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke zu erläutern, behandeln wir

zunächst die in No. 11 und 13 bereits auf anderem Wege gelöste Aufgabe: *die überzählige Auflagerkraft X_a und die Spannkräfte X_b, X_c der überzähligen Stäbe des in der Fig. 16 dargestellten Bogenträgers zu bestimmen.*

Es sollen sowohl Temperaturänderungen als auch die auf Seite 21 angeführten Verschiebungen der Stützpunkte berücksichtigt werden.

Wir rechnen (wie in Fig. 17 auf Seite 19) die Kräfte X_a, X_b, X_c zu den auf das Hauptnetz wirkenden *Lasten* und erhalten für die Wege δ_a, δ_b, δ_c der Belastungen X_a, X_b, X_c die Werthe:

$$(35)\quad \begin{cases} \delta_a = \Sigma P_m \delta_{am} - \delta_{aa} X_a - \delta_{ab} X_b - \delta_{ac} X_c + \delta_{at} + \delta_{aw} \\ \delta_b = \Sigma P_m \delta_{bm} - \delta_{ba} X_a - \delta_{bb} X_b - \delta_{bc} X_c + \delta_{bt} + \delta_{bw} \\ \delta_c = \Sigma P_m \delta_{cm} - \delta_{ca} X_a - \delta_{cb} X_b - \delta_{cc} X_c + \delta_{ct} + \delta_{cw}. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet:

δ_{am} den Einfluss der Ursache $P_m = 1$ auf den Weg δ_a,
δ_{aa} desgl. den Einfluss der Ursache $X_a = -1$,
δ_{ab} „ „ „ „ „ $X_b = -1$,
δ_{ac} „ „ „ „ „ $X_c = -1$,
δ_{at} desgl. den Einfluss von Temperaturänderungen,
δ_{aw} „ „ „ „ Verschiebungen der Stützpunkte,

und ebenso lassen sich die übrigen, mit Doppelzeigern behafteten Werthe δ deuten.

Um δ_{aw} zu bestimmen, wird die Arbeitsbedingung für den Belastungszustand $X_a = -1$ (Fig. 19) angeschrieben und dabei jedem Stabe die Längenänderung $\Delta s = 0$ beigelegt. Es ergiebt sich dann

$$1 \cdot \delta_{aw} + 1 \cdot \delta_H + 1 \cdot \frac{e}{l_1} (\delta_A - \delta_B - \delta_C + \delta_D) = 0$$

und hieraus und aus ähnlichen, für die Belastungszustände $X_b = -1$, $X_c = -1$ aufgestellten Gleichungen folgt

$\delta_{aw} = -L_a$; $\delta_{bw} = -L_b$; $\delta_{cw} = -L_c$ (vergl. Seite 22).

Setzt man nun diese Werthe in (35) ein und beachtet, dass die Buchstaben der Doppelzeiger miteinander vertauscht werden dürfen, dass also $\delta_{am} = \delta_{ma}$, $\delta_{bm} = \delta_{mb}$, $\delta_{cm} = \delta_{mc}$, $\delta_{ab} = \delta_{ba}$, ... ist, so gelangt man zu den auf Seite 25 erhaltenen Gleichungen (25).

Der eben eingeschlagene Weg führt immer zum Ziele. Man darf aussprechen:

Jedes statisch unbestimmte Fachwerk lässt sich durch Beseitigung von überzähligen Stäben und Auflagerkräften in ein statisch bestimmtes Fachwerk (Hauptnetz genannt) verwandeln. Auf dieses Hauptnetz wirken ausser den gegebenen Lasten P_m und den Temperaturänderungen noch gewisse vorläufig unbekannte Belastungen X_a, X_b, X_c, X_d ...

deren Wege δ_a, δ_b, δ_c, δ_d . . ., jedoch bestimmten Bedingungen unterworfen sind. Es gelten die Gleichungen:

$$(86)\quad \begin{cases} L_a - \delta_{at} + \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - \delta_{aa} X_a - \delta_{ba} X_b - \delta_{ca} X_c - \delta_{da} X_d - \dots \\ L_b - \delta_{bt} + \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - \delta_{ab} X_a - \delta_{bb} X_b - \delta_{cb} X_c - \delta_{db} X_d - \dots \\ L_c - \delta_{ct} + \delta_c = \Sigma P_m \delta_{mc} - \delta_{ac} X_a - \delta_{bc} X_b - \delta_{cc} X_c - \delta_{dc} X_d - \dots \\ L_d - \delta_{dt} + \delta_d = \Sigma P_m \delta_{md} - \delta_{ad} X_a - \delta_{bd} X_b - \delta_{cd} X_c - \delta_{dd} X_d - \dots \\ \cdot \end{cases}$$

welche eine schnelle Berechnung der statisch nicht bestimmbaren Grössen X gestatten, sobald sich die den Belastungszuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$, . . . entsprechenden Formänderungen des Hauptnetzes bequem darstellen lassen, und ebenso die von den Temperaturänderungen herrührenden Werthe δ_{at}, δ_{bt}, ... Begegnet die Ermittelung dieser Verschiebungen Schwierigkeiten, so wende man die in No. 11 und 13 abgeleiteten Gleichungen (20) oder (29) an.

f. Einfluss unrichtiger Ablängung überzähliger Stäbe. Künstliche Anspannung.

20. — Die bisherigen Untersuchungen setzten voraus, dass jeder Stab genau diejenige Länge erhält, welche dem spannungslosen Zustande des Fachwerks entspricht. In statisch unbestimmten Fachwerken können jedoch geringfügige Fehler bei der Ablängung der überzähligen Stäbe wesentliche Aenderungen der Spannkräfte zur Folge haben.

Soll z. B. in ein aus 5 Stäben gebildetes ebenes Viereck (Fig. 29) ein sechster Stab ab eingefügt werden, welcher die zu geringe Länge ab_1 besitzt, so ist dieser Stab vorher so anzuspannen, dass er sich um $b_1 b$ verlängert. In Folge dessen aber wird er auf das ursprüngliche Fachwerk in a und b gewisse Kräfte ausüben, welche in den Stäben desselben Spannungen hervorrufen.

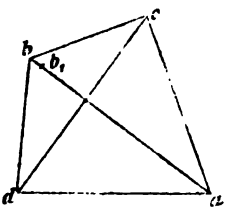


Fig. 29.

Damit man die früher entwickelten Gleichungen auch unmittelbar zur Berechnung von statisch unbestimmten Fachwerken benutzen kann, deren überzählige Stäbe wegen unrichtiger Ablängung mit Anfangsspannungen eingesetzt werden müssen, stelle man sich vor, es seien jene Herstellungsfehler durch Abkühlung beziehungsweise Erwärmung der unrichtig bearbeiteten Stäbe beseitigt worden und zwar *vor* Einfügung dieser Stäbe in das Fachwerk. Die Länge s eines Stabes, dessen Temperatur um t' zunimmt, wächst um $\varepsilon t' s$, und es muss deshalb die Temperatur eines um ωs zu kurzen

Stabes um $t' = \frac{\omega}{\varepsilon}$ erhöht, diejenige eines um ωs zu langen Stabes um $t' = \frac{\omega}{\varepsilon}$ erniedrigt werden.

Nach Einsetzen sämmtlicher Stäbe denke man die ursprünglichen Stabtemperaturen wieder hergestellt, schreibe also den erwärmten Stäben die Temperaturänderung $(-t')$, den abgekühlten die Temperaturerhöhung $(+t')$ zu. Man erkennt dann, dass man den fraglichen Bearbeitungsfehlern Rechnung trägt, wenn man die in die früheren Entwickelungen eingeführten Temperaturänderungen t für die um ωs zu langen oder zu kurzen Stäbe um $t' = \frac{\omega}{\varepsilon}$ vergrössert beziehungsweise verkleinert.

Werden überzählige Stäbe absichtlich mit unrichtigen Längen eingesetzt, so bezeichnet man das Stabgebilde als ein *Fachwerk mit künstlicher Anspannung*.

g. Ausnahmefälle.

21. — Alle vorstehenden Entwickelungen sind an die Voraussetzung gebunden, dass es zulässig sei, bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die Formänderung des Fachwerks zu vernachlässigen; sie gelten also nur für Stabgebilde, deren Knoten sehr geringe Verschiebungen erleiden, und führen, auf Träger von ungenügender Steifigkeit (z. B. mangelhaft versteifte Kettenbrücken) angewendet, mitunter zu ganz unrichtigen Ergebnissen. Es giebt aber auch Fälle, in denen bereits sehr geringe elastische Formänderungen die angenäherte Berechnungsweise unbrauchbar machen, und hierzu gehören die im ersten Bande, Abschnitt XIII, als Fachwerke von unendlich kleiner Verschiebbarkeit bezeichneten Stabgebilde, deren Knotenpunkte sich selbst dann gegeneinander (wenn auch nur unendlich wenig) verschieben würden, wenn sämmtliche Stäbe und Stützen starr wären. Ein besonders einfaches Fachwerk dieser Art stellt Fig. 30 dar. Die Achsen der beiden wagerechten Stäbe ac und bc fallen in dieselbe Gerade. a und b sind feste Auflagergelenke. Die um a und b mit den Halbmessern s geschlagenen Kreise haben ein Bogenelement gemein, innerhalb dessen sich c frei bewegen kann. Wird das Fachwerk durch eine senk-

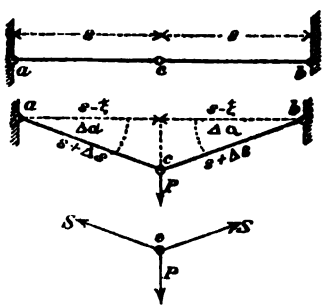


Fig. 30.

rechte Last P beansprucht, und verschiebt sich jedes der beiden Auflagergelenke um die gleiche wagerechte Strecke ξ, so entstehen in den Stäben ac und bc gleich grosse Spannkräfte S. Man erhält:

$$2S \sin \Delta\alpha = P;$$

$$\sin \Delta\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \Delta\alpha}; \quad \cos \Delta\alpha = \frac{s - \xi}{s + \Delta s}; \quad \Delta s = \frac{Ss}{EF}; \text{ also}$$

$$4S^2 \left[1 - \frac{E^2 F^2 (s - \xi)^2}{s^2 (EF + S)^2} \right] = P^2,$$

und diese Gleichung liefert für S einen bestimmten endlichen Werth, welcher desto grösser ist, je grösser E und F sind. Werden die Widerlager und die Stäbe vollkommen starr angenommen, so ergiebt sich (wegen $\xi = 0$; $\Delta s = 0$; $\sin \Delta\alpha = 0$) für die Spannkraft S, selbst bei sehr kleiner Last P, der unrichtige Werth $S = \infty$.

Zu einem ähnlichen Ergebnisse führt die genauere Berechnung des auf Seite 208 und 211 des ersten Bandes angeführten Paskal'schen Sechsecks. Gleichgewicht tritt hier selbst bei starren Stäben im Allgemeinen erst nach einer gegenseitigen Verschiebung der Knotenpunkte ein. Da diese Formänderung aber unendlich klein ist, so darf bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die ursprüngliche Gestalt des Fachwerks beibehalten werden, und es ergeben sich dann (nach Band I, Abschnitt XIII) für die Spannkräfte S unendlich grosse oder unbestimmte Werthe. Werden aber die elastischen Verschiebungen berücksichtigt, so liefern die Gleichgewichtsbedingungen für jede Spannkraft S einen ganz bestimmten endlichen Werth. Immerhin ist es rathsam, derartige bereits ausgeführte Fachwerke zu vermeiden, wegen der verhältnissmässig grossen Anstrengungen, welche die Stäbe selbst bei geringer Belastung erleiden.

B. Gesetze für beliebige isotrope, feste Körper.

a. Voraussetzungen und Erklärungen. Gesetz der virtuellen Verschiebungen.

22. — Wir werden in diesem Buche ausser Fachwerken noch Träger untersuchen, die aus irgendwie miteinander befestigten geraden oder krummen Stäben zusammengesetzt sind und *Stabwerke* genannt werden mögen. Die Theorie derselben leiten wir durch Entwickelung einiger Gesetze ein, welche für beliebige feste Körper, die nur elastische, verschwindend kleine Formänderungen erleiden, gelten.

23. — An irgend einer Stelle eines im Gleichgewichte befindlichen festen Körpers denken wir uns ein unendlich kleines Theilchen abge-

grenzt. Die auf die Seitenflächen desselben wirkenden Kräfte sollen *Flächenkräfte* genannt und insbesondere als *innere Kräfte* oder *Oberflächenkräfte* bezeichnet werden, je nachdem die durch sie beanspruchten Flächen im Innern des Körpers liegen oder zur Oberfläche gehören; ausser ihnen wird an dem Körpertheilchen im Allgemeinen noch eine auf die Masse desselben wirkende äussere Kraft angreifen, welche eine *Massenkraft* heisst (z. B. die Erdanziehung, Ergänzungskräfte der relativen Bewegung).

Nehmen wir nun an, es erleide ein anfänglich im Gleichgewichte befindlicher Körper durch Hinzutreten äusserer Kräfte und durch Temperaturänderung eine Umgestaltung. Dieselbe hört auf, sobald sich ein neuer Gleichgewichtszustand gebildet hat und bestehen bleibt; während ihrer Erzeugung werden die Flächenkräfte des betrachteten Körpertheilchens eine bestimmte Arbeitssumme verrichten, und von dieser ist besonders derjenige Theil von Wichtigkeit, der nur von der Formänderung des Körpertheilchens abhängig ist, der also verschwindet, wenn sich das Theilchen bewegt, ohne seine Gestalt zu ändern. Man nennt diesen Theil der Gesammtarbeit der Flächenkräfte *die Formänderungsarbeit des Körpertheilchens;* ihre Integration über den ganzen Körper liefert die Formänderungsarbeit des Körpers. Bei der Berechnung dieser Arbeit ist zu beachten, dass die Flächenkräfte, deren schliessliche Werthe wir ganz allgemein mit R bezeichnen wollen, sich im Verlaufe jener Umgestaltung ändern.

Denkt man sich hingegen die Flächenkräfte während der ganzen Dauer der Formänderung mit ihren Endwerthen R wirkend und bestimmt die von den R geleistete Formänderungsarbeit unter der Voraussetzung einer *willkürlichen* Formänderung, die man sich zwar als möglich vorstellen kann, die aber nicht von den die Kräfte R erzeugenden, sondern von irgend welchen anderen Ursachen herrührt, so erhält man einen Ausdruck dA_v, welcher die *virtuelle Formänderungsarbeit* des Körpertheilchens heisst, während jene willkürliche, mögliche Umgestaltung eine *virtuelle Formänderung* genannt werden soll.

Wir fassen jetzt eine unendliche kleine virtuelle Formänderung eines im Gleichgewichte befindlichen Körpers und insbesondere die Bewegung und Umgestaltung eines Körpertheilchens ins Auge und bezeichnen die virtuelle Arbeit der auf dieses Körpertheilchen wirkenden Massenkraft mit dA_m, diejenige der Flächenkräfte mit dA_f. Letztere Arbeit besteht aus zwei Theilen; der eine, dA_v, hängt nur von der Umgestaltung des Körpertheilchens ab, der andere, nämlich $dA_f - dA_v$ von der Bewegung des Massenmittelpunktes und der Drehung des Körpertheilchens um diesen Punkt. Somit stellt $dA_m + dA_f - dA_v$ diejenige virtuelle Arbeit vor, welche sämmtliche auf das Körper-

theilchen wirkenden Kräfte verrichten, wenn dessen Bewegung ohne eine Formveränderung vor sich geht. Diese Arbeit muss aber = Null sein, da die Mittelkraft der auf das Körpertheilchen wirkenden Kräfte (des vorausgesetzten Gleichgewichtszustandes wegen) zu Anfang = Null ist und auch während der ganzen Dauer der gedachten unendlich kleinen Bewegung bis auf eine verschwindende Grösse den Werth Null behält.

Es folgt mithin $dA_m + dA_f = dA_e$ und, wenn entsprechende Gleichungen für sämmtliche Körpertheilchen gebildet und hierauf addirt werden,

$$A_m + A_f = A_e. \tag{37}$$

Da sich nun in dem Ausdrucke A_f die Arbeiten der *inneren* Flächenkräfte gegenseitig tilgen, weil auf die Flächen, in denen aneinander grenzende Körpertheilchen zusammenhängen, bei gleichen Verschiebungen entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken, so leuchtet ein, dass A_f die *virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte,* mithin $A_f + A_m$ die *virtuelle Arbeit sämmtlicher äusseren Kräfte* vorstellt, und es drückt deshalb die Gleichung (37) das Gesetz aus:

> *Bei einer verschwindend kleinen virtuellen Formänderung eines im Gleichgewichte befindlichen Körpers ist die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte gleich der virtuellen Formänderungsarbeit.*

Die Ableitung dieses Satzes nimmt an, dass alle anfänglich sich deckenden Seitenflächen von aneinander grenzenden Körpertheilchen auch während des ganzen Verlaufs der Formänderung sich decken, weil nur dann die Arbeiten der auf diese Flächen wirkenden Kräfte sich aufheben. Besteht nun der betrachtete Körper aus mehreren einander berührenden Theilen, von denen jeder einzelne der gemachten Annahme entspricht, und finden gegenseitige Verschiebungen von anfänglich zusammenliegenden Berührungsflächen je zweier Theile statt, so müssen, wenn das bewiesene Gesetz gelten soll, alle diese Flächen zur Oberfläche gezählt werden, d. h. es sind die auf diese Flächen wirkenden Kräfte, soweit sich ihre Arbeiten nicht tilgen, zu den äusseren Kräften zu rechnen. So sind z. B. bei aufeinander reibenden Theilen eines Körpers die an den Berührungsstellen wirkenden Reibungswiderstände als äussere Kräfte aufzufassen.

24. — Um einen allgemeinen Ausdruck für A_e abzuleiten, beziehen wir den Körper auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem und denken an irgend einer Stelle, aber innerhalb eines Körpertheiles, dessen Spannungen sich *stetig* ändern, ein Parallelopipedon von den anfänglichen Kantenlängen dx, dy, dz abgegrenzt.

Die Spannung in der zur x-Achse senkrechten, den Punkt (x, y, z) enthaltenden Seitenfläche $dydz$ sei in die Seitenspannungen

σ_x, parallel der x-Achse und positiv, wenn im Sinne von $(-x)$ wirkend,
τ_{xy}, „ „ y- „ „ „ „ „ „ „ „ $(-y)$ „
τ_{xz}, „ „ z- „ „ „ „ „ „ „ „ $(-z)$ „

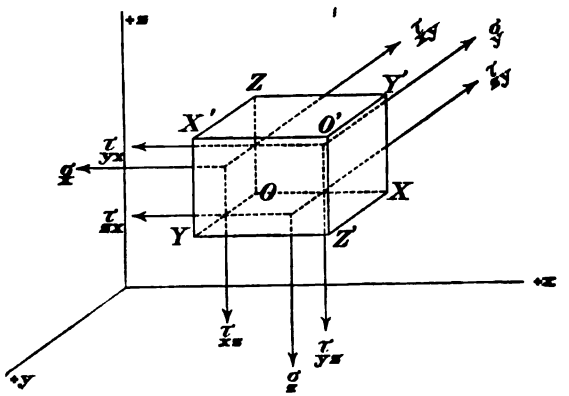


Fig. 31.

zerlegt, und in gleicher Weise mögen die Spannungen in den dem Punkte (x, y, z) anliegenden Seitenflächen $dz\,dx$ und $dx\,dy$ durch ihre Seitenspannungen

$$\sigma_y, \quad \tau_{yz}, \quad \tau_{yx},$$
$$\sigma_z, \quad \tau_{zx}, \quad \tau_{zy}$$

gegeben werden. Die σ sind Zug- oder Druckspannungen, die τ Schubspannungen (Band I, Seite 56).

Durch Multiplikation dieser Spannungen mit den entsprechenden Flächeninhalten gelangt man zu den Kräften, welche jene Flächen beanspruchen. Auf die Fläche $dy\,dz$ wirken z. B. die drei Kräfte:

$$\sigma_x dy\,dz, \quad \tau_{xy} dy\,dz, \quad \tau_{xz} dy\,dz.$$

Wird die Momentensumme aller am Parallelopipedon $dx\,dy\,dz$ angreifenden Kräfte in Bezug auf die der y-Achse parallele Schwerachse des Körpertheilchens gleich Null gesetzt und hierbei davon abgesehen, dass sich die Spannungen in gegenüberliegenden Seitenflächen um Differentiale unterscheiden, weil die Berücksichtigung dieser Unterschiede zu unendlich kleinen Grössen der vierten Ord-

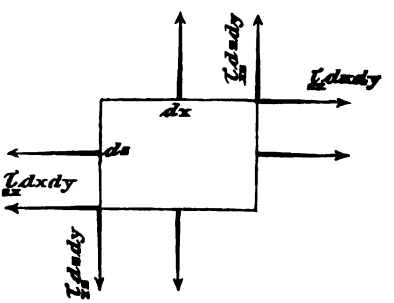


Fig. 32.

nung führen würde, welche gegen die der dritten Ordnung verschwinden, so erhält man, (mit Hinweis auf Fig. 32, in der die Projektion des Körpertheilchens auf die (zx)-Ebene dargestellt ist) die Gleichung:

$$(\tau_{xz}\,dx\,dy)\,dz = (\tau_{zx}\,dy\,dz)\,dx \quad \text{(vergl. auch Band I, § 12),}$$

und hieraus und aus ähnlichen Momentengleichungen für die der x-Achse und z-Achse parallelen Schwerachsen des Körpertheilchens folgt:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx},$$

weshalb die kürzere Bezeichnung eingeführt werden soll:

$$\tau_x = \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_y = \tau_{zx} = \tau_{xz}; \quad \tau_z = \tau_{xy} = \tau_{yx},$$

wobei zu bemerken ist, dass

$$\tau_x \perp dx; \ \tau_y \perp dy; \ \tau_z \perp dz.$$

Es ändere sich nun die anfängliche Länge dx um die Strecke $\Delta dx = \Delta'\left(\frac{dx}{2}\right) + \Delta''\left(\frac{dx}{2}\right)$ so zwar, dass sie die dem Punkte (x, y, z) anliegende Fläche gegen den Massenmittelpunkt M im Sinne der $(-x)$ um $\Delta'\left(\frac{dx}{2}\right)$ verschiebt und die gegenüber liegende Fläche im Sinne der $(+x)$ um $\Delta''\left(\frac{dx}{2}\right)$. Die auf jene Flächen wirkenden Kräfte:

$$\sigma_x\,dy\,dz \quad \text{und} \quad \left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx}\,dx\right) dy\,dz$$

liefern dann zur virtuellen Formänderungsarbeit den Beitrag:

$$\sigma_x\,dy\,dz\,\Delta'\left(\frac{dx}{2}\right) + \left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx}\,dx\right) dy\,dz\,\Delta''\left(\frac{dx}{2}\right)$$

und hierfür darf man nach Streichung der kleinen Grösse vierter Ordnung: $\frac{d\sigma_x}{dx}\,dx\,dy\,dz\,\Delta''\left(\frac{1}{2}\,dx\right)$ setzen:

$$\sigma_x\,dy\,dz\,\Delta dx = \sigma_x \frac{\Delta dx}{dx}\,dV$$

worin $dV = dx\,dy\,dz$ den Inhalt des Körpertheilchens bedeutet.

Hieraus und aus ähnlichen Betrachtungen folgt: Aendern sich die anfänglichen Längen dx, dy, dz um Strecken Δdx, Δdy, Δdz und bezeichnet man die in der Folge *Dehnungen* genannten Verlängerungsverhältnisse mit

$$(38) \qquad \varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz},$$

so ist der von den Spannungen σ_x, σ_y, σ_z abhängige Theil der virtuellen Formänderungsarbeit dA_v des Körpertheilchens $(dx\,dy\,dz)$ gleich

$$(39) \qquad (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z)\, dV.$$

Gleichzeitig mit den Dehnungen entstehen Winkeländerungen und in Folge dessen leisten auch die Schubkräfte Arbeit. Es sei, mit Bezugnahme auf Fig. 31

γ_x die Aenderung des Winkels YOZ,
γ_y „ „ „ „ ZOX,
γ_z „ „ „ „ XOY.

Man nennt γ_x, γ_y, γ_z, die *Gleitungen* im Punkte x, y, z; sie seien positiv oder negativ, je nachdem sie Verkleinerungen oder Vergrösserungen der Winkel YOZ, ZOX, XOY vorstellen. Bei Berechnung der in Folge der Gleitungen von den Schubkräften verrichteten virtuellen Formänderungsarbeit darf man wieder die Spannungsunterschiede in den einander gegenüber liegenden Flächen vernachlässigen und den Punkt xyz an Stelle des Massenmittelpunktes als ruhend annehmen.

Aendert sich der Winkel YOZ um γ_x, so verschiebt sich die Fläche YO' im Sinne OZ gegen die Fläche OY' um $\gamma_x dy$, wobei die in YO' und senkrecht zu dx wirksame Schubkraft $\tau_x dx\,dz$ die virtuelle Arbeit $\tau_x dx\,dz\,\gamma_x dy$ verrichtet, oder es verschiebt sich die Fläche ZO' im Sinne OY gegen die Fläche OZ' um die Strecke $\gamma_x dz$, bei welcher Bewegung die in ZO' und senkrecht zu dx wirkende Schubkraft $\tau_x dx\,dy$ die Arbeit $\tau_x dx\,dy\,\gamma_x dz$ leistet. In beiden Fällen wird die Arbeit

$$\tau_x \gamma_x dx\,dy\,dz = \tau_x \gamma_x dV$$

erhalten, und ebenso ergeben sich für die den Gleitungen γ_z, γ_y entsprechenden Arbeiten die Ausdrücke $\tau_y \gamma_y dV$ und $\tau_z \gamma_z dV$, so dass die gesammte virtuelle Formänderungsarbeit der an dem Theilchen $(dx\,dy\,dz)$ angreifenden Flächenkräfte gleich

$$dA_v = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z)\, dV$$

ist. Für den ganzen Körper erhält man:

$$(40) \qquad A_v = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z)\, dV.$$

Bei unstetigen Spannungen muss der Körper in Theile zerlegt werden, innerhalb welcher alle Spannungen stetig sind. Die Werthe A_v werden für die einzelnen Theile gesondert berechnet und schliesslich addirt.

Setzt man (nach N. 23) A_i gleich der virtuellen Arbeit der äusseren Kräfte Q, so erhält man:

$$(41) \qquad \Sigma Q_m \delta_m = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) dV,$$

wo δ_m die den Dehnungen ε_x, ε_y, ε_z und Gleitungen γ_x, γ_y, γ_z entsprechende Verschiebung des Angriffspunktes m der Kraft Q_m im Sinne von Q_m bedeutet, d. i. die Projektion des Weges von m auf die Richtung von Q_m. Zu erinnern ist daran, dass bei Ableitung der Gleichung (41) hinsichtlich der äusseren und inneren Kräfte nur die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen vorausgesetzt wurde, und dass die Dehnungen, die Gleitungen und die ihnen entsprechenden Verschiebungen δ von den Kräften Q und den Spannungen σ und τ unabhängig zu denken sind und von irgend welchen anderen Ursachen herrühren können.

25. — Wir setzen jetzt fest, dass ε_x, ε_y, ε_z, γ_x, γ_y, γ_z die bei einer gegebenen Angriffsweise des Körpers entstehenden *wirklichen Dehnungen* und *Gleitungen* sind, bezeichnen mit $\overline{Q}$, $\overline{\sigma_x}$, $\overline{\sigma_y}$, $\overline{\sigma_z}$, $\overline{\tau_x}$, $\overline{\tau_y}$, $\overline{\tau_z}$ die äusseren Kräfte und Spannungen eines nur *gedachten* Belastungszustandes, wenden auf den letzteren und auf den wirklichen Formänderungszustand die Gleichung (41) an, und erhalten die Beziehung:

$$(42) \qquad \Sigma \overline{Q}_m \delta_m = \int (\overline{\sigma_x} \varepsilon_x + \overline{\sigma_y} \varepsilon_y + \overline{\sigma_z} \varepsilon_z + \overline{\tau_x} \gamma_x + \overline{\tau_y} \gamma_y + \overline{\tau_z} \gamma_z) dV,$$

welche der für das Fachwerk abgeleiteten Gleichung (13) gegenüber zu stellen ist, und in welcher δ_m die Projektion des wirklichen Weges des Punktes m auf die gedachte Kraft $\overline{Q}_m$ bedeutet.

Die wirklichen Dehnungen und Gleitungen sollen hier nur für den isotropen (d. h. in allen Punkten gleichbeschaffenen) Körper angegeben werden. Es wird ein spannungsloser Anfangszustand angenommen. Die anfängliche Temperatur ändere sich im Punkte (x, y, z) um t.

Die Seite dx des Körpertheilchens $(dx\,dy\,dz)$ erleidet, wenn die Spannung σ_x allein wirkt, die Dehnung $\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}$, während die Temperaturänderung den Einfluss $\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon t$ erzeugt und in Folge von σ_y und σ_z entsteht: $\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{\sigma_y + \sigma_z}{mE}$, wobei $\frac{1}{m}$ die Werthziffer der Querdehnung (abgerundet $\frac{1}{3}$ für Eisen und Stahl) bedeutet.*) Das Zusammenwirken aller Ursachen ruft die Dehnung hervor:

---

*) Vergl. Band I, § 12.

$$(48)\qquad \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\sigma_y + \sigma_z}{mE} + \varepsilon t \text{ und ebenso ergiebt sich:} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\sigma_z + \sigma_x}{mE} + \varepsilon t, \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{mE} + \varepsilon t, \end{cases}$$

während die nur von den Schubspannungen abhängigen Gleitungen die Werthe annehmen:

$$(44)\qquad \gamma_x = \frac{\tau_x}{G}, \quad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G}, \quad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G},$$

wobei

$$(45)\qquad G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

die *Schub-Elasticitätsziffer* (auch *Gleitmodul* genannt) bedeutet.*)

b. Anwendung der Gleichung (42).

26. — Wir werden bei Berechnung der Stabwerke die Gleichung (42) in derselben Weise benutzen wie die Gleichung (13) bei Untersuchung des Fachwerks. Zunächst werden wir die nach bestimmten Richtungen wirkenden Seitenkräfte C der Stützenwiderstände sowie die Spannungen σ und τ als lineare Funktionen der gegebenen Lasten P und gewisser statisch nicht bestimmbarer Grössen X', X'', X''' . . . darstellen, und zwar in der Form:

$$(46)\qquad \begin{cases} C = C_0 - C'X' - C''X'' - C'''X''' - \dots \\ \sigma_x = \sigma_{x0} - \sigma_x'X' - \sigma_x''X'' - \sigma_x'''X''' - \dots \\ \sigma_y = \sigma_{y0} - \sigma_y'X' - \sigma_y''X'' - \sigma_y'''X''' - \dots \\ \sigma_z = \sigma_{z0} - \sigma_z'X' - \sigma_z''X'' - \sigma_z'''X''' - \dots \\ \tau_x = \tau_{x0} - \tau_x'X' - \tau_x''X'' - \tau_x'''X''' - \dots \\ \tau_y = \tau_{y0} - \tau_y'X' - \tau_y''X'' - \tau_y'''X''' - \dots \\ \tau_z = \tau_{z0} - \tau_z'X' - \tau_z''X'' - \tau_z'''X''' - \dots \end{cases}$$

Die mit dem Zeiger 0 behafteten Werthe sind Funktionen ersten Grades der Lasten P und unabhängig von den Grössen X', X'', ... Die Werthe C', C'' . . . , σ', σ'' . . . , τ', τ'' . . . sind unabhängig von den P und X.

Es bedeuten:

---

*) Vergl. u. A. *Grashof*, Theorie der Elasticität und Festigkeit, 2. Auflage, Berlin 1878, Seite 24 und 80.

C', σ', τ' die Stützenwiderstände und Spannungen für den Zustand $X' = -1$,
C'', σ'', τ'' die Stützenwiderstände und Spannungen für den Zustand $X'' = -1$ u. s. w.

Wird nun die Gleichung (42) der Reihe nach auf die Belastungszustände: $X' = -1$, $X'' = -1$, . . . angewendet und jedesmal auf den wirklichen Verschiebungszustand, so ergeben sich die zur Berechnung der Grössen X', X'', . . . ausreichenden Bedingungen:

$$(47)\quad \begin{cases} L' = \int (\sigma_x' \varepsilon_x + \sigma_y' \varepsilon_y + \sigma_z' \varepsilon_z + \tau_x' \gamma_x + \tau_y' \gamma_y + \tau_z' \gamma_z)\, dV \\ L'' = \int (\sigma_x'' \varepsilon_x + \sigma_y'' \varepsilon_y + \sigma_z'' \varepsilon_z + \tau_x'' \gamma_x + \tau_y'' \gamma_y + \tau_z'' \gamma_z)\, dV \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

unter L', L'' . . . die den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, . . . entsprechenden virtuellen Arbeiten der Auflagerkräfte verstanden.

27. — Wird die durch bestimmte Dehnungen und Gleitungen ε_x, ε_y, ε_z, γ_x, γ_y, γ_z bedingte gegenseitige Verschiebung δ_m zweier Punkte m und m_1 des Körpers gesucht, so bringe man in m und m_1 zwei entgegengesetzt gleiche, in die Gerade mm_1 fallende und von einander weg gerichtete Kräfte *Eins* an (Fig. 9) und stelle für diesen gedachten Belastungszustand und für den wirklichen Verschiebungszustand die Gleichung (42) auf. Man erhält:

$$(48)\quad 1 \cdot \delta_m + \overline{L} = \int (\overline{\sigma}_x \varepsilon_x + \overline{\sigma}_y \varepsilon_y + \overline{\sigma}_z \varepsilon_z + \overline{\tau}_x \gamma_x + \overline{\tau}_y \gamma_y + \overline{\tau}_z \gamma_z)\, dV,$$

worin $\overline{\sigma}$, $\overline{\tau}$ und $\overline{C}$ Spannungen und Stützenwiderstände bedeuten, welche mit der Belastungseinheit des Punktepaares m, m_1 im Gleichgewichte sind.

Auf diese Weise lassen sich alle die Aufgaben behandeln, welche in No. 9, 10, 14 für das Fachwerk gelöst worden sind.

c. Das Clapeyron'sche Gesetz und die Sätze von Maxwell und Betti.

28. — Es wird vorausgesetzt, dass die äusseren und inneren Kräfte allmählich von Null aus wachsen, dass also auch die Umgestaltung des Körpers allmählich vor sich geht, ohne das Schwingungen entstehen. Für jede der unendlich kleinen Formänderungen, in welche sich die ganze Formänderung zerlegen lässt, gilt die Gleichung (42) und es ergiebt sich daher die Beziehung

$$(49)\quad \Sigma \int Q d\delta = \int (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z)\, dV,$$

wo Q, σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z die Werthe der äusseren Kräfte und Spannungen in dem Augenblicke bedeuten, in welchem die Verschiebungen δ um $d\delta$ zunehmen und die Dehnungen und Gleitungen um $d\varepsilon_x$, $d\varepsilon_y$, $d\varepsilon_z$, $d\gamma_x$, $d\gamma_y$, $d\gamma_z$.

Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (48) giebt die *mechanische Arbeit der äusseren Kräfte* Q an, der Ausdruck rechts die *wirkliche Formänderungsarbeit* A des Körpers. Behält der Körper in jedem Punkte die anfängliche Temperatur, ist also $t = 0$, so ergiebt sich:

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(d\sigma_x - \frac{1}{m}d\sigma_y - \frac{1}{m}d\sigma_z\right); \qquad d\gamma_x = \frac{1}{G}\tau_x,$$

$$d\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(d\sigma_y - \frac{1}{m}d\sigma_z - \frac{1}{m}d\sigma_x\right); \qquad d\gamma_y = \frac{1}{G}\tau_y,$$

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(d\sigma_z - \frac{1}{m}d\sigma_x - \frac{1}{m}d\sigma_y\right); \qquad d\gamma_z = \frac{1}{G}\tau_z, \text{ also}$$

$$\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z$$
$$= \frac{1}{E}\left[\sigma_x d\sigma_x + \sigma_y d\sigma_y + \sigma_z d\sigma_z - \frac{1}{m}d(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)\right]$$
$$+ \frac{1}{G}[\tau_x d\tau_x + \tau_y d\tau_y + \tau_z d\tau_z]$$

und hieraus durch Integration:

$$(50) \quad A = \frac{1}{2}\int\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m}(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)\right]\frac{dV}{E}$$
$$+ \frac{1}{2}\int(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)\frac{dV}{G}.$$

Nun gilt aber auch andererseits die Gleichung:

$$\Sigma Q\delta = \int(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_x\gamma_x + \tau_y\gamma_y + \tau_z\gamma_z)\,dV,$$
$$= \int\left[\sigma_x\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right) + \sigma_y\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m}\right)\right.$$
$$\left. + \sigma_z\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right)\right]\frac{dV}{E} + \int(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)\frac{dV}{G},$$

und diese lässt sich leicht umformen in

$$\Sigma Q\delta = 2A.$$

Da nun, nach (50), $\Sigma\int Qd\delta = A$ ist, so ergiebt sich:

$$\Sigma \int Q d\delta = \Sigma \frac{Q\delta}{2}$$

und hieraus folgt, dass das in No. 8 für das Fachwerk bewiesene *Clapeyron'sche Gesetz* auch für den isotropen festen Körper gilt.

Aus der Gültigkeit des Clapeyron'schen Gesetzes folgt aber auch ohne weiteres diejenige des in No. 17 für den Fall $t = 0$ und $L = 0$ abgeleiteten *Maxwell'schen Lehrsatzes.*

29. — Um den Maxwell'schen Satz noch auf eine ähnliche Weise wie in No. 18 als besonderen Fall des allgemeineren Gesetzes von *Betti* herzuleiten, nehmen wir an, dass auf den Körper zuerst beliebige Belastungen P_m wirken. Den Körper denken wir durch drei einander rechtwinklig schneidende Flächen-Schaaren in unendlich kleine Theilchen zerlegt, in deren Seitenflächen nur Normalspannungen auftreten, welche dann Hauptspannungen heissen und mit σ_1', σ_2', σ_3' bezeichnet werden sollen. Die entsprechenden Dehnungen sind (wegen $t = 0$)

$$(51) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1' = \left[\sigma_1' - \frac{1}{m}(\sigma_2' + \sigma_3')\right]\frac{1}{E} \\ \varepsilon_2' = \left[\sigma_2' - \frac{1}{m}(\sigma_3' + \sigma_1')\right]\frac{1}{E} \\ \varepsilon_3' = \left[\sigma_3' - \frac{1}{m}(\sigma_1' + \sigma_2')\right]\frac{1}{E}; \end{cases}$$

die Gleitungen sind $= 0$.

Jetzt ersetzen wir die Belastungen P_m durch andere Belastungen P_n, behalten aber die vorhin angenommene Zerlegung des Körpers bei. Es treten dann Normalspannungen σ_1'', σ_2'', σ_3'' auf, und diese erzeugen Dehnungen:

$$(52) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1'' = \left[\sigma_1'' - \frac{1}{m}(\sigma_2'' + \sigma_3'')\right]\frac{1}{E} \\ \varepsilon_2'' = \left[\sigma_2'' - \frac{1}{m}(\sigma_3'' + \sigma_1'')\right]\frac{1}{E} \\ \varepsilon_3'' = \left[\sigma_3'' - \frac{1}{m}(\sigma_1'' + \sigma_2'')\right]\frac{1}{E}. \end{cases}$$

Ausserdem werden durch die P_n Schubspannungen τ'' und Gleitungen γ'' hervorgerufen.

Bezeichnen wir nun mit (δ_{mn}) den Weg irgend einer Belastung P_m für den Fall, dass auf den Körper nur die Belastungen P_n wirken, und mit (δ_{nm}) den Weg irgend einer Belastung P_n in Folge ausschliesslicher Wirkung der P_m, und wenden wir die Gleichung (42) zuerst an

auf den Belastungszustand (P_m) und den hiervon unabhängigen, den Belastungen P_n entsprechenden Verschiebungszustand,

sodann:

auf den Belastungszustand (P_n) und den hiervon unabhängigen, den P_m entsprechenden Verschiebungszustand,

so erhalten wir, da die Stützenwiderstände, der Voraussetzung gemäss, keine Arbeit verrichten, die Gleichungen:

$$\Sigma P_m(\delta_{mn}) = \int (\sigma_1' \varepsilon_1'' + \sigma_2' \varepsilon_2'' + \sigma_3' \varepsilon_3'')\, dV$$

$$\Sigma P_n(\delta_{nm}) = \int (\sigma_1'' \varepsilon_1' + \sigma_2'' \varepsilon_2' + \sigma_3'' \varepsilon_3')\, dV,$$

bei deren Aufstellung zu beachten ist, dass den Gleitungen γ'' die Schubspannungen $\tau' = 0$ gegenüberstehen und den Schubspannungen τ'' die Gleitungen $\gamma' = 0$. (In der ersten Veröffentlichung dieses Beweises in des Verfassers Buch: „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre u. s. w." Seite 176 wurden die σ'' irrthümlich als Hauptspannungen bezeichnet.)

Mit Hilfe von (51) und (52) lässt sich nun leicht nachweisen, dass

$$\sigma_1' \varepsilon_1'' + \sigma_2' \varepsilon_2'' + \sigma_3' \varepsilon_3'' = \sigma_1'' \varepsilon_1' + \sigma_2'' \varepsilon_2' + \sigma_3'' \varepsilon_3'$$

ist, und deshalb auch

$$\Sigma P_m(\delta_{mn}) = \Sigma P_n(\delta_{nm}).$$

Hieraus aber folgt, wie auf Seite 34, als besonderer Fall:

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}.$$

d. Die Castigliano'schen Sätze.

30. — Betrachtet man die statisch nicht bestimmbaren Grössen X (welche sich stets auf Kräfte zurückführen lassen) ebenso wie die P als unabhängige Veränderliche der Gleichungen (46), d. h. rechnet man die X vorübergehend zu den Belastungen, so dürfen die Werthe $\sigma', \sigma'', \ldots \tau', \tau'', \ldots$ als Differentialquotienten der σ und τ aufgefasst werden; denn es ist

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X'} = -\sigma_x'; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial X'} = -\sigma_y'; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial X'} = -\sigma_z'; \quad \frac{\partial \tau_x}{\partial X'} = -\tau_x' \ldots \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichungen (47) lassen sich dann auf die gemeinsame Form bringen

$$-L_X = \int \left(\varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial X} + \varepsilon_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial X} + \gamma_x \frac{\partial \tau_x}{\partial X} + \gamma_y \frac{\partial \tau_y}{\partial X} + \gamma_z \frac{\partial \tau_z}{\partial X} \right) dV, \tag{53}$$

wobei X irgend eine der statisch nicht bestimmbaren Grössen und L_X die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand $X = -1$ bedeutet. Führt man für die Dehnungen und Gleitungen die durch (43) und (44) gegebenen Werthe ein, so gelangt man zu dem übersichtlichen Gesetze:

$$\frac{\partial A_t}{\partial X} - L_X = 0, \tag{54}$$

wo

$$A_t = A + \int (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\, \varepsilon t\, dV \tag{55}$$

und A gleich der wirklichen Formänderungsarbeit ist. (Siehe Gleichung 50.)

Verrichten die Stützenwiderstände keine Arbeit ($L_X = 0$) und findet an keiner Stelle des Körpers eine Aenderung der anfänglichen Temperatur statt ($t = 0$), so geht (54) über in

$$\frac{\partial A}{\partial X} = 0 \tag{56}$$

und diese Gleichung sagt aus:

> *dass die statisch nicht bestimmbaren Grössen X die Formänderungsarbeit A, welche als Funktion der zuerst unabhängig veränderlich gedachten Werthe X darzustellen ist, zu einem Minimum machen.*

Dieses *Gesetz der kleinsten Formänderungsarbeit* ist zuerst von *Castigliano* scharf bewiesen worden.

Setzt man in Gleichung (41):

$$\Sigma Q_m \delta_m = \Sigma P_m \delta_m + L,$$

wobei $\Sigma P_m \delta_m$ die virtuelle Arbeit der Belastungen P_m und L diejenige der Stützenwiderstände bedeutet, und beachtet, dass Gleichung (41) auch für den Fall gilt, dass die δ, ε_x, ε_y, ε_z, τ_x, τ_y, τ_z von den Kräften Q unabhängig sind, so findet man durch theilweise Differentiation jener Gleichung nach P_m, bei unveränderlich angenommener Formänderung:

$$\delta_m + \frac{\partial L}{\partial P_m} = \int \Big(\varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial P_m} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial P_m} + \varepsilon_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial P_m} + \gamma_x \frac{\partial \tau_x}{\partial P_m} + \gamma_y \frac{\partial \tau_y}{\partial P_m} + \gamma_z \frac{\partial \tau_z}{\partial P_m} \Big)\, dV$$

und diese Beziehung lässt sich umformen in

$$\delta_m = \frac{\partial A_t}{\partial P_m} - \frac{\partial L}{\partial P_m}; \tag{57}$$

sie liefert, falls die Stützenwiderstände keine Arbeit leisten und $t = 0$

ist, das ebenfalls von *Castigliano* bewiesene Gesetz:

$$\delta_m = \frac{\partial A}{\partial P_m}. \tag{58}$$

Dasselbe lässt sich auch wie folgt ableiten. Auf einen Körper mögen die Belastungen P_a, P_b, ... P_m, ... wirken; ihre Wege seien δ_a, δ_b, . . . δ_m, . . . (vergl. Seite 81). Im Falle $L = 0$ und $t = 0$ ist

$$\begin{aligned}
\delta_a &= \delta_{aa} P_a + \delta_{ab} P_b + \ldots + \delta_{am} P_m + \ldots \\
\delta_b &= \delta_{ba} P_a + \delta_{bb} P_b + \ldots + \delta_{bm} P_m + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_m &= \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \ldots + \delta_{mm} P_m + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wächst P_m um ∂P_m, während die übrigen Belastungen ungeändert bleiben, so nehmen δ_a, δ_b, . . . δ_m . . . zu um

$$\partial\delta_a = \delta_{am}\partial P_m; \quad \partial\delta_b = \delta_{bm}\partial P_m; \ldots \partial\delta_m = \delta_{mm}\partial P_m; \ldots$$

und die Formänderungsarbeit A, welche ebenso gross ist wie die mechanische Arbeit der äusseren Kräfte, wächst um

$$\partial A = P_a\partial\delta_a + P_b\partial\delta_b + \ldots + P_m\partial\delta_m + \ldots$$

Man erhält

$$\partial A = (\delta_{am} P_a + \delta_{bm} P_b + \ldots + \delta_{mm} P_m + \ldots)\,\partial P_m,$$

wofür man (nach dem Gesetze: $\delta_{mm} = \delta_{mm}$) auch schreiben darf:

$$\frac{\partial A}{\partial P_m} = \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \ldots + \delta_{mm} P_m + \ldots = \delta_m.$$

Da die Gleichung (41) hinsichtlich der äusseren und inneren Kräfte nur die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen verlangt, so ist es erlaubt, bei Anwendung der Formeln (57) und (58) die statisch nicht bestimmbaren Grössen X als willkürliche Veränderliche aufzufassen. Differentiirt man also nach P_m, so darf man nicht nur alle übrigen Belastungen sondern auch sämmtliche X als unveränderlich ansehen.

Wendet man die *Castigliano*'schen Sätze auf das Fachwerk an (welches ja nur ein besonderer Fall des eben untersuchten Körpers ist) so hat man zu setzen:

$$A_i = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF} + \Sigma \varepsilon t S s. \tag{59}$$

Literatur zur Einleitung.

1. **Lamé,** *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides,* Paris 1852 und 1866 (2. Auflage).

2. **Clerk Maxwell,** *On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames,* Philosophical Magazine, Band 27 (1864), Seite 294. Diese Abhandlung enthält die erste allgemeine Theorie des statisch unbestimmten Fachwerks, allerdings nur für den Fall eines spannungslosen Anfangszustandes und unter der Voraussetzung, dass keine Temperaturänderungen eintreten. Die Grundlage bildet das in unserem Buche (Seite 32) der Maxwell'sche Lehrsatz genannte Gesetz, welches aber nur für Verschiebungen, nicht auch für Drehungen bewiesen wird.

3. **Mohr,** *Beitrag zur Theorie des Fachwerks,* Zeitschr. des Hannov. Arch. und Ing.-Vereins 1874 und 1875 fortgesetzt im Civilingenieur 1885. In dieser Arbeit wird, vom Gesetze der virtuellen Verschiebungen ausgehend, die erste vollständige Theorie des statisch unbestimmten Fachwerks aufgestellt und dabei auch der Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen entwickelt, letzterer zwar auch nur für Verschiebungen, jedoch in einer Weise, welche die Verallgemeinerung dieses Satzes durch blosse Aenderung der Bedeutung der Buchstaben möglich macht.

4. **Castigliano,** *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques,* Turin (bei Negro) 1879. An der Spitze dieses hervorragenden Werkes steht der mit Hilfe des Clapeyron'schen Gesetzes entwickelte Satz von der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit (Gleichung 58 auf Seite 51 unseres Buches) sowie der aus diesem folgende Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit. Castigliano wendet sein Verfahren auch auf die Untersuchung von Stabgebilden an, welche auf Biegung, Torsion und Abscheerung beansprucht werden.

5. **Fränkel,** entwickelt in der Abhandlung: *Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben,* (Zeitschrift des Hannov. Arch. u. Ing.-Vereins 1882) — unabhängig von Castigliano — den Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit, und zwar ebenfalls zuerst für das Fachwerk, dann aber auch für den isotropen festen Körper.

6. **Castigliano,** *Intorno ad una proprietà dei sistemi elastici,* Atti delle Scienzi di Torino, Band 17 (1882) Seite 705; enthält die erste allgemeine (d. h. für den beliebig geformten isotropen elastischen Körper giltige) Entwickelung des Maxwell'schen Satzes, sowie einen Bericht über das auf Seite 34 u. 48 unseres Buches abgeleitete Gesetz von **Betti.** Letzteres schliesst den Maxwell'schen Satz als besonderen Fall ein und wird von Betti in der Form gegeben:

$$\int_S \rho\,(Xu' + Yv' + Zw')\,dS + \int_s (Lu' + Mv' + Nw')\,ds$$
$$= \int_S \rho\,(X'u + Y'v + Z'w)\,dS + \int_s (L'u + M'v + N'w)\,ds.$$

Dabei bedeuten: $\rho\,XdS$, $\rho\,YdS$, $\rho\,ZdS$ die an einem Körpertheilchen $dS = dx\,dy\,dz$ angreifenden, den Koordinatenachsen x, y, z parallelen Massenkräfte (ρ = Dichtigkeit an der Stelle xyz), ferner Lds, Mds, Nds die auf ein Oberflächentheilchen ds wirkenden ebenfalls den Koordinatenachsen x, y, z parallelen äusseren Kräfte, und u, v, w die von allen diesen Kräften herrührenden Verschiebungen eines Punktes (xyz) im Sinne der x, y, z, während u', v', w' durch die Kräfte $\rho\,X'dS$, $\rho\,Y'dS$, $\rho\,Z'dS$, $L'ds$, $M'ds$, $N'ds$ erzeugt werden.

7. **Swain,** *On the application of the principle of virtual velocities to the determination of the deflection and stresses of frames.* Journal of the Franklin Institute, 1883, Febr. bis April. Seite 102, 194, 250.

8. **Melan,** *Ueber den Einfluss der Wärme auf elastische Systeme.* Wochenschrift des österreich. Arch. u. Ing.-Ver. 1883, S. 183 u. 202. Erweiterung des Castigliano'schen Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit.

9. **Müller-Breslau,** *Der Satz von der Abgeleiteten der ideellen Formänderungsarbeit.* Zeitschr. des Arch. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1884, S. 211. Erweiterung der Sätze Castigliano's.

10. **Krohn,** *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Anwendung derselben zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkträger;* Zeitschrift des Hannov. Arch. u. Ing.-Vereins 1884. Herleitung des Maxwell'schen Satzes und Anwendung desselben auf die Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke.

11. **Melan,** *Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Stabsysteme.* Zeitschrift des österreich. Arch. u. Ing.-Ver. 1884, S. 100.

12. **Weyrauch,** *Arbeitsbedingungen für statisch unbestimmte Systeme.* Wochenblatt für Arch. u. Ing. 1884, S. 200.

13. **Müller-Breslau,** *Bedingungsgleichungen für statisch unbestimmte Körper.* Wochenblatt für Arch. u. Ing. 1884.

14. **Weyrauch,** *Theorie elastischer Körper.* Leipzig (bei Teubner) 1884.

15. **Müller-Breslau,** *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen,* Leipzig 1886 (Baumgärtner's Buchhandlung). Hier wird darauf hingewiesen, dass der Maxwell'sche Satz nicht nur für Verschiebungen, sondern auch für Drehungen gilt.

16. **Forchheimer,** *Die Gegenseitigkeit der Verschiebungen,* Zeitschr. des österreich. Ing. u. Arch. Vereins 1886; giebt u. A. eine sehr übersichtliche, auf das Clapeyron'sche Gesetz sich stützende und auf Seite 32 dieses Buches wiedergegebene Ableitung des Maxwell'schen Satzes, von der dasselbe gilt wie von der Beweisführung Mohr's.

17. **Land.** *Die Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen* u. s. w. Wochenblatt für Baukunde 1887. Seite 14.

ERSTE ABTHEILUNG.

Formänderung ebener Fachwerke. — Untersuchung der ebenen, statisch unbestimmten Fachwerke.

I. Abschnitt.

Bestimmung der Formveränderungen ebener Fachwerke, mit Anwendungen auf die Untersuchung statisch unbestimmter und statisch bestimmter Träger.

§ 1.

Verschiebungspläne nach dem Verfahren von Williot.

31. — Ein statisch bestimmtes ebenes Fachwerk sei durch gegebene Lasten beansprucht und gegebenen Temperaturänderungen ausgesetzt. Die in den Stäben hervorgerufenen Spannkräfte S, welche (nach Seite 6) von den Temperaturänderungen unabhängig sind, seien mit Hilfe der im ersten Bande unseres Buches entwickelten Verfahren gefunden, auch seien die Aenderungen Δs sämmtlicher Stablängen s mittels der Gleichung

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s \quad \text{(vergl. S. 2)}$$

berechnet. Gesucht seien die Verschiebungen der Knotenpunkte. — So lautet die Aufgabe, deren geometrische Lösung das Ziel unserer nächsten Untersuchungen ist.

Die Knotenpunkte werden wir mit kleinen Buchstaben, welche die Stelle von Ordnungsziffern vertreten, bezeichnen, die Stäbe hingegen mit arabischen Ziffern. Die Längen der Stäbe 1, 2, ... seien $= s_1, s_2, \ldots$; für ihre Aenderungen $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots$ mögen, um übersichtliche Figuren zu erhalten, die kürzeren Zeichen $\Delta 1, \Delta 2, \ldots$ eingeführt werden.

Wir beginnen mit der Behandlung des einfachsten und wichtigsten, fast alle Anwendungen umfassenden Falles, nämlich mit der Untersuchung eines Fachwerks, welches man in der Weise erzeugen kann, dass man zu einem Stabdreieck *abc* (Fig. 33) zwei neue Stäbe fügt,

die in einem neuen Knoten d miteinander verbunden sind, hierauf an zwei beliebige Knoten dieses Stabgebildes wieder zwei neue Stäbe mit einem neuen Knoten e anschliesst, u. s. f. Die Bestimmung der durch *gegebene* Aenderungen der Stablängen hervorgerufenen Verschiebungen der Knotenpunkte eines derartigen Fachwerks stützt sich auf die Lösung der folgenden Aufgabe.

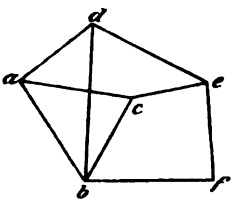


Fig. 33.

32. Erste Hauptaufgabe. Der Knotenpunkt c ist mit den Knoten a und b durch zwei Stäbe 1 und 2 verbunden, deren Längen s_1 und s_2 sich um die gegebenen Strecken $\Delta 1$ und $\Delta 2$ ändern, während sich die Punkte a und b in die neuen Lagen a' und b' bewegen. Gesucht ist die Verschiebung cc' des Punktes c (der mit a und b nicht in derselben Geraden liegen darf). Fig. 34a.

Um die neue Lage von c durch Zeichnung zu bestimmen, löse man bei c die Verbindung beider Stäbe, verschiebe den Stab 1 parallel

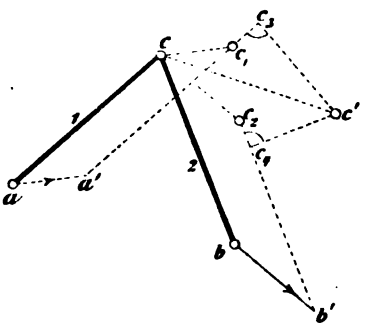


Fig. 34a.

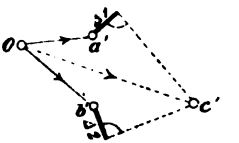


Fig. 34b.

mit sich selbst in die Lage $a'c_1$ und den Stab 2 parallel mit sich selbst in die Lage $b'c_2$. Hierauf ändere man die Längen der Stäbe in der vorgeschriebenen Weise. Wird z. B. der Stab 1 gedehnt, der Stab 2 verkürzt, so verlängere man $a'c_1$ um $c_1c_3 = \Delta 1$ und bringe von $b'c_2$ die Strecke $c_2c_4 = \Delta 2$ in Abzug. Nun schlage man mit den neuen Stablängen $a'c_3$ und $b'c_4$ als Halbmesser Kreisbögen, deren Mittelpunkte a' und b' sind. Der Schnittpunkt c' jener Bögen giebt die gesuchte neue Lage des Punktes c an. In dem hier vorausgesetzten Falle verschwindend kleiner Verschiebungen dürfen die Kreisbögen c_3c' und c_4c' durch die auf den Geraden $a'c_3$ und $b'c_4$ errichteten Lothe ersetzt werden.

Es empfliehlt sich nun, die Verschiebung cc' in einer besonderen Figur und in *gehöriger Vergrösserung* darzustellen. Von einem beliebig gewählten Punkte O aus (welcher der *Ursprung* oder der *Pol* genannt wird, Fig. 34b) trage man die gegebenen Verschiebungen $Oa' = aa'$ und $Ob' = bb'$ der Punkte a und b nach Grösse, Richtung und Sinn auf. An die *Polstrahlen* Oa' und Ob' füge man in a' und b' die den Stäben 1 und 2 parallelen Längenänderungen $\Delta 1$ und $\Delta 2$ und errichte in den Endpunkten der letzteren Lothe, deren Schnittpunkt c' dann die verlangte Verschiebung des Punktes c bestimmt; dieselbe wird nach Grösse, Richtung und Sinn durch den Polstrahl Oc' dargestellt.

Besonders zu achten ist auf den Sinn, in welchem die Längenänderungen $\Delta 1$ und $\Delta 2$ anzutragen sind. Man merke Folgendes:

Ist der Knoten c mit a durch einen Stab 1 verbunden, welcher gedehnt wird, so verschiebt sich c gegen a im Sinne ac, und es muss desshalb $\Delta 1$ an a' im Sinne ac gefügt werden.

Ist der Knoten c mit b durch einen Stab 2 verbunden, welcher verkürzt wird, so verschiebt sich c gegen b im Sinne cb, und es muss deshalb $\Delta 2$ an b' im Sinne cb angetragen werden.

Durch wiederholte Lösung der eben behandelten Aufgabe ist man im Stande, die Verschiebungen der Knotenpunkte einer gegliederten Scheibe von der in No. 31 beschriebenen Art für den Fall zu bestimmen, dass die Richtungslinie eines Stabes (der im allgemeinen einem der beiden Dreiecke abc und abd, Fig. 33, angehören muss) ungeändert bleibt und die Verschiebung eines Punktes der Mittellinie dieses Stabes gleich

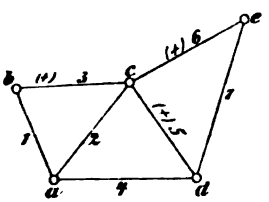


Fig. 35a.

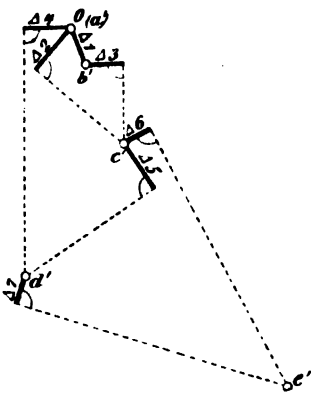


Fig. 35b.

Null ist. Als Beispiel wählen wir das in der Figur 35a dargestellte Fachwerk und setzen voraus, dass der Punkt a und die Richtung des

Stabes 1 festliegen. Die in der Figur mit dem Zeichen (+) versehenen Stäbe 3, 5, 6 mögen Dehnungen, alle übrigen aber Verkürzungen erleiden.

Punkt O in Fig. 35b ist der beliebig angenommene Pol. Die Verschiebung von a ist gleich Null, mithin fällt der Punkt a' mit O zusammen. Die Verschiebung Ob' des Punktes b ist gleich der Verkürzung $\Delta 1$ des Stabes 1. Der Knoten c wird mit a durch den Stab 2 und mit b durch den Stab 3 verbunden, er nähert sich a um $\Delta 2$ und entfernt sich von b um $\Delta 3$. Trägt man also an a' im Sinne ca die Strecke $\Delta 2 \parallel 2$ an und an b' im Sinne bc die Strecke $\Delta 3 \parallel 3$ und errichtet auf diesen Strecken in ihren Endpunkten Lothe, so bestimmt deren Schnittpunkt die Verschiebung Oc' des Punktes c. Der Knoten d ist mit a und c durch 4 bezieh. 5 verbunden, seine Verschiebung Od' erhält man, wenn man $\Delta 4 \parallel 4$ an a' im Sinne da anträgt, ferner $\Delta 5 \parallel 5$ an c' im Sinne cd, und auf $\Delta 4$ und $\Delta 5$ in deren Endpunkten Lothe errichtet, deren Schnittpunkt der Punkt d' ist. Auf dieselbe Weise wird Punkt e' bestimmt.

Die Figur 35b, deren Polstrahlen Ob', Oc', ... nach Grösse, Richtung und Sinn die Verschiebungen der Knoten b, c, ... darstellen, nennen wir den *Verschiebungsplan* des Fachwerks $abcde$ oder auch — nach dem Erfinder des vorstehenden Verfahrens — einen *Williot*'schen Verschiebungsplan.

33. Zusammensetzung der Verschiebungen in Folge von zwei getrennt betrachteten, verschwindend kleinen Bewegungen. — Bewegung einer starren Scheibe. Will man die Formveränderung einer irgendwie gestützten, gegliederten Scheibe, die aber äusserlich statisch bestimmt sein möge, untersuchen, so nehme man zuerst die Richtung eines Stabes und einen Punkt der Achse dieses Stabes als festliegend an, zeichne den Verschiebungsplan auf die vorhin beschriebene Weise, und ertheile hierauf der Scheibe — *die jetzt als starr anzusehen ist* — eine Bewegung, durch welche die wirklichen Auflagerbedingungen erfüllt werden. Den Weg, den irgend ein Knotenpunkt m in Folge dieser zweiten Bewegung zurücklegt, stelle man durch einen Polstrahl $m''O$ (Fig. 36) dar, der *nach* dem Pole hinzeigt, weil hierdurch die Zusammensetzung dieser Verschiebung mit der zuerst gefundenen elastischen Verschiebung Om' erleichtert wird. Denn es giebt nun die Strecke $m''m'$ nach Grösse, Richtung und Sinn den Weg des Knotens m für den Fall an, dass die beiden getrennt betrachteten Bewegungen gleichzeitig erfolgen.

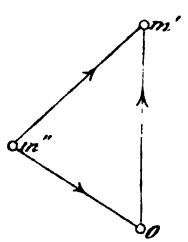


Fig. 36.

Die Verschiebungen der Punkte einer starren Scheibe erhält man unmittelbar durch Anwendung des Satzes, dass sich jede verschwindend kleine Bewegung einer starren Figur auf eine Drehbewegung um einen festen Punkt $\mathfrak{P}$ zurückführen lässt. Stellen nämlich die Polstrahlen $a''O$, $b''O$, $c''O$, . . . (Fig. 37) nach Grösse, Richtung und Sinn die Verschiebungen der Knoten a, b, c, . . . dar, so muss sein

(I) $\quad a''O \perp a\mathfrak{P}; \quad b''O \perp b\mathfrak{P}; \quad c''O \perp c\mathfrak{P}; \ldots\ldots;$

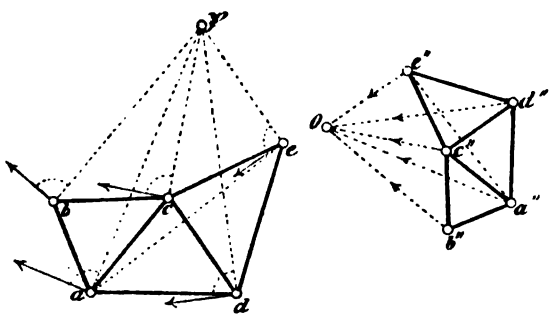


Fig. 37.

denn die Richtung der Verschiebung eines jeden Punktes einer starren Figur ist rechtwinklig zu der Geraden, welche diesen Punkt mit dem augenblicklichen Drehpunkte verbindet, und weiter ergiebt sich

(II) $\quad \overline{a''O} : \overline{b''O} : \overline{c''O} : \ldots\ldots = \overline{a\mathfrak{P}} : \overline{b\mathfrak{P}} : \overline{c\mathfrak{P}} : \ldots\ldots;$

weil sich die Verschiebungen der Punkte a, b, c, . . . zu einander verhalten wie die entsprechenden Geschwindigkeiten und die letzteren wie die Entfernungen der Punkte vom Drehpol $\mathfrak{P}$.

Aus den Beziehungen (I) und (II) folgt aber:

1. Verbindet man die Punkte a'', b'', . . . des Verschiebungsplanes so durch gerade Linien, dass jedem Fachwerkstabe ik eine Gerade $i''k''$ entspricht, so bilden diese Geraden eine Figur, welche der sich bewegenden starren Scheibe ähnlich ist.

2. Die Verbindungsgerade zweier beliebiger Punkte m, n der Scheibe ist rechtwinklig zu der Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte m'', n''. (Es ist beispielsweise in Fig. 37: $a''b'' \perp ab$; $a''e'' \perp ae$.)

Hat man also mit Hilfe der Auflagerbedingungen zwei Punkte der Figur $a''b''c''$ . . . bestimmt, so ist man im Stande diese Figur zu zeichnen.

Es sei noch hervorgehoben, dass sich die vorstehenden Ergebnisse auch aus den in No. 32 entwickelten Gesetzen ableiten lassen. Werden beispielsweise die Aenderungen $\Delta 5$, $\Delta 6$, $\Delta 7$ der Seiten des Stabdreiecks cde in Fig. 35a gleich Null angenommen, so entspricht diesem Dreieck in der Fig. 35b ein ähnliches Dreieck $c'd'e'$, dessen Seiten rechtwinklig zu den entsprechenden Seiten des Dreiecks cde sind. Auch aus Fig. 34 folgt ohne weiteres, dass der Verbindungsgeraden zweier starr mit einander verbundener Punkte a und c (wegen $\Delta 1 = 0$) im Verschiebungsplane eine zu ac rechtwinklige Gerade $a'c'$ entspricht.

34. Fachwerkträger mit einem festen und einem beweglichen Auflagergelenk. Gesucht ist der Verschiebungsplan des in der Fig. 38a dargestellten Trägers, der bei a ein festes und bei g ein auf schräger Bahn geführtes Auflagergelenk besitzt. Die mit dem Zeichen (+) versehenen Stäbe mögen Verlängerungen erleiden.

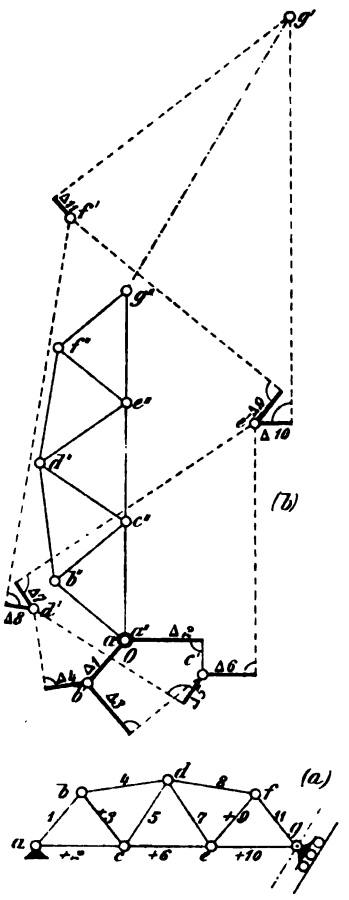


Fig. 38.

Wird zuerst die Richtung des Stabes 1 als festliegend vorausgesetzt, so lassen sich die von den gegebenen Aenderungen der Stablängen herrührenden elastischen Verschiebungen Ob', Oc', . . . Og' der Knotenpunkte b, c, . . . g auf die in No. 32 beschriebene Weise bestimmen. Dieselben müssen noch mit denjenigen Verschiebungen $b''O$, $c''O$, . . . $g''O$ zusammengesetzt werden, welche die Knotenpunkte erfahren, wenn das starre Fachwerk so um a gedreht wird, dass sich für den auf einer festen Geraden geführten Punkt g eine Gesammtverschiebung $g''g'$ ergiebt, welche zu dieser Geraden parallel ist. Die von den Punkten a'', b'', c'', . . . g'' gebildete, der Figur $abcdefg$ ähnliche Figur $a''b''c''d''e''f''g''$ ist demnach durch die Bedingungen bestimmt, dass a'' mit a' zusammenfallen muss, weil a ruht, und dass ferner $a''g'' \perp ag$ und $g''g'$ parallel zur Bahn des Auflagergelenkes g sein muss. Die (in der Fig. nicht ausgezogenen) Strecken $b''b'$, $c''c'$, . . . $g''g'$ stellen nach Grösse, Richtung und Sinn die gesuchten Verschiebungen der Knotenpunkte b, c, . . . g dar.

Meistens ist es zweckmässig, zuerst einen Knotenpunkt in der Nähe der Trägermitte und einen von diesem Punkte ausgehenden Stab festzuhalten, weil sich nach dem in Fig. 38 befolgten Verfahren für die vom festen Auflager entfernter liegenden Knotenpunkte zuweilen sehr grosse elastische Verschiebungen ergeben. Als zweites Beispiel ist deshalb in Fig. 39 der Verschiebungsplan eines einfachen Fachwerkbalkens vorgeführt worden. Zuerst wurde der Knoten a und die Richtung des Stabes 1 festgehalten, und die Lage der Punkte b', c', ... h' ermittelt, wobei, der Deutlichkeit der Figur wegen, die Zeichen $\Delta 1$, $\Delta 2$, . . . durch die blossen Ziffern 1, 2, . . . ersetzt worden sind. Hierauf wurde die der Figur *hgadecbf* ähnliche Figur $h'' g'' a'' d'' e'' c'' b'' f''$ mit Hilfe der Bedingungen bestimmt, dass

erstens h'' mit h' zusammenfallen muss, weil die Verschiebung von h gleich Null ist,

zweitens $e'' e'$ wagerecht sein muss, weil sich e auf einer Wagerechten bewegt,

drittens $h'' e'' \perp he$ sein muss.

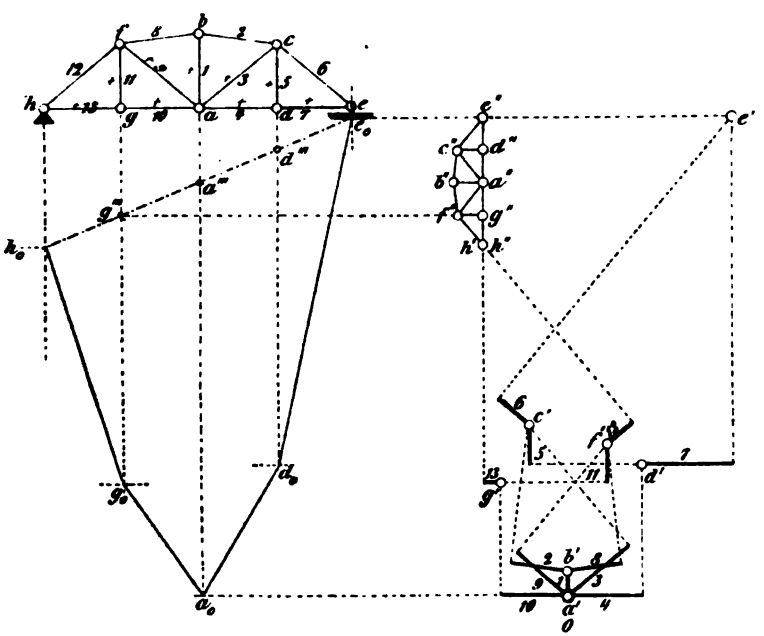


Fig. 39.

Damit sind die Verschiebungen $b'' b'$, $c'' c'$, . . . der Knotenpunkte b, c, . . . gegeben.

Projicirt man die Punkte h', g', a', d', e' in h_0, g_0, a_0, d_0, e_0 auf die Senkrechten durch die entsprechenden Knotenpunkte h, g, a, d, e und verbindet h_0 und e_0 durch eine Gerade, welche jene Senkrechten in g''', a''', d''' schneiden mögen, so geben die Strecken $g''' g_0$, $a''' a_0$, $d''' d_0$ an, um wie viel sich die Knotenpunkte g, a, d in senkrechter Richtung verschieben. Man nennt diese Projektionen der Gesammtverschiebungen auch *Durchbiegungen* und beispielsweise $g''' g_0$ die *senkrechte Durchbiegung des Fachwerks an der Stelle g.*

Das Polygon $h_0 g_0 a_0 d_0 e_0$ heisst *Biegungspolygon* oder *Biegungslinie* der unteren Gurtung und die Gerade $h_0 e_0$ die *Schlusslinie.* Wird nur das Polygon $h_0 g_0 a_0 d_0 e_0$ verlangt (was häufig der Fall ist), so braucht in dem hier vorliegenden wichtigen Falle eines Trägers mit wagerechter Auflagerbahn die Figur $h'' g'' a'' d'' e'' c'' b'' f''$ nicht gezeichnet zu werden.

35. Gerber'scher Fachwerkbalken. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. 1. Die Koppelträger cd und gh werden gelenkartig mit den gestützten Theilen verbunden. 2. Jeder Koppelträger wird (wie ein einfacher Balken) an dem einen Ende mit einem festen, an dem anderen mit einem beweglichen Auflagergelenke versehen. Im

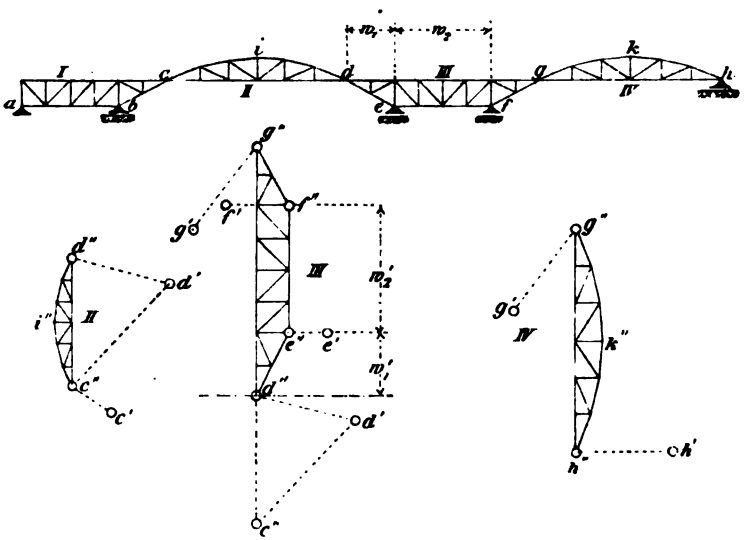


Fig. 40.

ersten Falle darf auf den Pfeilern nur *ein* festes Lager angeordnet werden; alle übrigen Lager müssen beweglich sein. Im zweiten Falle erhält jeder der gestützten Theile ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk. (Vergl. Band I, Abschnitt X, § 42.)

Ein *Beispiel für die erste Anordnung* zeigt die Figur 40. Die Koppelträger *II* und *IV* sind mit den gestützten Theilen *I* und *III* durch die Gelenke *c*, *d*, *g* verbunden. Das Auflagergelenk *a* ist fest, während sich die Auflagergelenke *b*, *e*, *f*, *h* auf wagerechten Bahnen bewegen können. Die Darstellung der durch gegebene Aenderungen der Stablängen bedingten Verschiebungen der Knotenpunkte erfolgt zweckmässig in vier getrennten Figuren, entsprechend den vier Scheiben *I*, *II*, *III*, *IV*. Zuerst nehme man von jeder Scheibe einen beliebigen Punkt und die Richtung eines durch diesen Punkt gehenden Stabes als festliegend an, bestimme die elastischen Verschiebungen der Knotenpunkte auf die in No. 32 angegebene Weise und ertheile hierauf den nunmehr als starre Gebilde anzusehenden Scheiben Bewegungen, durch welche die Auflagerbedingungen erfüllt werden und der Zusammenhang der Scheiben in den Punkten *c*, *d*, *g* wieder hergestellt wird. Der erste Theil dieser Untersuchung — die Bestimmung des irgend einem Knoten *m* entsprechenden Punktes m' — ist bereits durch mehrere Beispiele erläutert worden, und es sind deshalb in die Fig. 40 nur die wichtigsten dieser Punkte eingetragen worden, nämlich:

die Punkte c', d' des Verschiebungsplanes für die Scheibe *II*,
„ „ d', e', f', g' „ „ „ „ „ *III*,
„ „ g' h' „ „ „ „ „ *IV*.

Der Verschiebungsplan für die Scheibe *I* wurde überhaupt fortgelassen, da dieses Trägerstück ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk besitzt, mithin ganz nach No 34 behandelt werden kann. Es bleibt jetzt nur noch zu erläutern, wie die den Figuren *cid*, *defg*, *gkh* ähnlichen Figuren $c''i''d''$, $d''e''f''g''$, $g''k''h''$ zu bestimmen sind.

Der Punkt c'' des Planes *II* ist durch die dem Plane *I* zu entnehmende Verschiebung $c''c'$ des Gelenkes *c* gegeben; von d'' ist vorläufig nur bekannt, dass $c''d'' \perp cd$ sein muss. Im Plane *III* liegt e'' auf der Wagerechten durch e', und f'' auf der Wagerechten durch f', weil sich die Auflagergelenke *e* und *f* auf wagerechten Bahnen bewegen. Bedeuten w_1' und w_2' die in senkrechter Richtung gemessenen Abstände der Punkte d'' und e'', beziehungsweise e'' und f'', ferner w_1, w_2 die in wagerechter Richtung gemessenen Entfernungen der entsprechenden Punkte *d*, *e*, *f*, so verhält sich

$$w_1' : w_2' = w_1 : w_2$$

und mittels dieser Beziehung lässt sich $w_1' = w_2' \frac{w_1}{w_2}$ bestimmen und damit auch die Lage der in Fig. 40 strichpunktirten Wagerechten, auf welcher der Punkt d'' liegen muss. Diesen Punkt selbst aber findet man, indem man $c''d'$ aus dem Plane *II* in den Plan *III* überträgt

und $c''d'' \perp cd$ zieht Ist noch mit Hilfe der Geraden $d''e'' \perp de$ der Punkt e'' ermittelt worden, so sind zwei Punkte der Figur $d''e''f''g''$ bekannt, und damit ist diese Figur vollständig bestimmt. — Nun überträgt man $d'd''$ aus *III* in den Plan *II* und zeichnet die Figur $c''i''d''$, macht hierauf in *IV* die Strecke $g'g''$ gleich und parallel der ebenso bezeichneten Strecke des Planes *III*, zieht $g''h'' \perp gh$ bis zur Wagerechten durch h' und erhält auf diese Weise zwei Punkte der nunmehr bestimmten Figur $g''k''h''$.

Ein Beispiel für die zweite Anordnung ist in der Fig. 41 dargestellt worden. Bei a und g wird der Träger durch feste, bei b und f durch bewegliche Auflagergelenke (letztere mit wagerechten Bahnen) unterstützt. Der Koppelträger *II* ist bei c durch ein Gelenk mit *I* verbunden und erhält bei d ein wagerechtes Gleitlager. Die

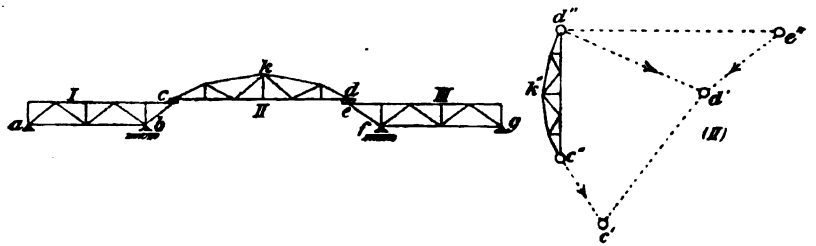


Fig. 41.

Verschiebungspläne für die Scheiben *I* und *III* werden nach No. 34 gezeichnet. Von der Scheibe *II* nehme man zuerst wieder einen beliebigen Punkt und die Richtung eines durch diesen Punkt gehenden Stabes als festliegend an, und ertheile hierauf dieser Scheibe eine Bewegung, durch welche bei c der Zusammenhang der Scheiben *I* und *II* wieder hergestellt und der Bedingung genügt wird, dass die senkrechten Projektionen der Verschiebungen der Punkte d und e gleich gross werden. Hiernach findet man die der Figur ckd ähnliche Figur $c''k''d''$ auf die folgende Weise. Man macht die Strecke $c''c'$ nach Grösse, Richtung und Sinn gleich dem durch den Verschiebungsplan für die Scheibe *I* gegebenen Wege des Knotens c und die Strecke $e''d'$ gleich der aus dem Plane für die Scheibe *III* zu entnehmenden Verschiebung des Punktes e. Hierauf zieht man $c''d'' \perp cd$ bis zur Wagerechten durch e'' und erhält in der Strecke $d''d'$ nach Grösse, Richtung und Sinn die Verschiebung von d. Die Figur $c''k''d''$ ist durch die beiden Punkte c'' und d'' vollständig bestimmt.

36. Bogenträger mit drei Gelenken. Die beiden gegliederten Scheiben *I* und *II*, welche bei a und b feste Auflagergelenke besitzen und bei c durch ein Gelenk miteinander verbunden sind, werden

zuerst getrennt untersucht, wobei von jeder Scheibe ein beliebiger Punkt und die Richtung eines durch diesen Punkt gehenden Stabes als festliegend angesehen werden. Hierauf werden den als starr anzusehenden Scheiben Bewegungen ertheilt, welche die Auflagerbedingungen befriedigen und den Zusammenhang der Scheiben bei c wieder herstellen. Fig. 42 giebt nur die Lage der den Gelenken a, b, c entsprechenden Punkte a', b', c' der beiden Verschiebungspläne *I* und *II* an; die den übrigen Knoten m entsprechenden Punkte m' wurden fortgelassen. Zur Bestimmung der den Figuren acd und bce ähnlichen Figuren $a''c''d''$ und $b''c''e''$ stehen die folgenden Bedingungen zur Verfügung:

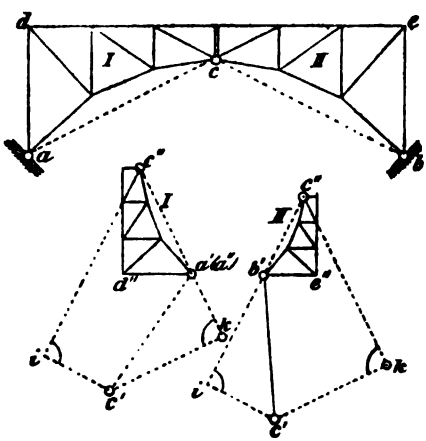


Fig. 42.

1. Die Verschiebung $a''a'$ von a ist gleich Null; mithin muss a'' mit a' zusammenfallen.
2. Aus gleichem Grunde muss b'' mit b' zusammenfallen.
3. Im Plane *I* muss sein: $a''c'' \perp ac$ und im Plane *II*: $b''c'' \perp bc$.
4. Die Pläne *I* und *II* müssen für die Verschiebung von c denselben Werth $c''c'$ liefern.

Man lege nun im Plane *I* durch a' eine zu ac rechtwinklige Gerade, ziehe durch c' zu ac eine Parallele, welche jene Gerade in k schneidet und bestimme auf diese Weise die Projektion kc' der Verschiebung $c''c'$ auf die Richtung ac. Diese Projektion übertrage man in den Plan *II*, errichte hier in k auf $c'k$ ein Loth und bestimme dessen Schnittpunkt c'' mit der durch b'' rechtwinklig zu bc gezogenen Geraden $b''c''$. Jetzt ist die Figur $b''c''e''$ gegeben, da zwei Punkte derselben bekannt sind. Ueberträgt man noch kc'' aus dem Plane *II* in den Plan *I*, so kennt man auch zwei Punkte (a'' und c'') der Figur $a''c''d''$, kann also auch diese Figur zeichnen. Auch lässt sich im Plane *II* die Projektion ic' von $c''c'$ auf die Richtung bc finden und in den Plan *I* übertragen, worauf dann c'' mittels $c''i \perp c'i$ bestimmt werden kann.

37. — Dem in No. 31 beschriebenen und als Fachwerk einfachster Art bezeichneten Stabgebilde lässt sich ein sehr wichtiges Scheibengebilde von ähnlicher Entstehungsweise an die Seite stellen. Man erhält dasselbe, indem man drei gegliederte Scheiben *I, II, III* durch drei Gelenke g_1, g_2, g_3 zu einem *Scheibendreieck* vereinigt (Fig. 43), an dieses zwei weitere Scheiben *IV* und *V*, die in einem Gelenke g_6 aneinanderhängen, mittels zweier Gelenke g_4 und g_5 anschliesst, in derselben Weise zwei neue Scheiben *VI* und *VII* hinzufügt und so fortfährt. Sind sämmtliche Scheiben Fachwerke von der in No. 31 angegebenen Art, so ist es möglich, den Verschiebungsplan des Gebildes durch wiederholte Lösung der in No. 32 behandelten Aufgabe zunächst unter der Voraussetzung zu erhalten, dass nur die Richtung eines Stabes

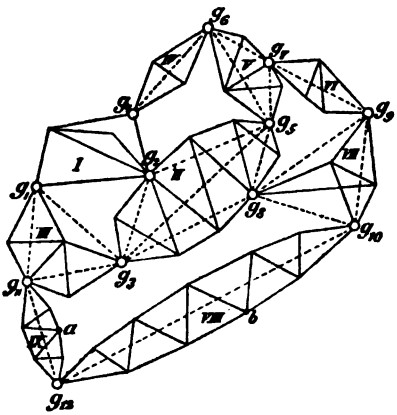


Fig. 43.

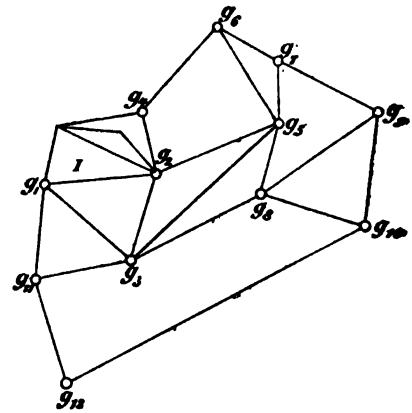


Fig. 44.

(der im Allgemeinen dem Scheibendreiecke *I II III* angehören muss) und ein Punkt in der Achse dieses Stabes festliegen, und hierauf können dann mit Hilfe von No. 33 auch solche Fälle erledigt werden, in denen das Gebilde in anderer, aber ebenfalls statisch bestimmter Weise gestützt wird.

Soll z. B. das in Fig. 43 dargestellte Fachwerk untersucht werden, und gehört der Stab, dessen Richtungslinie zunächst festgehalten wird, der Scheibe *I* an, so denke man die übrigen Scheiben auf die in der Fig. 44 angegebene Weise durch Stäbe ersetzt und schreibe diesen Stäben Längenänderungen zu, welche mit den wirklichen gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte übereinstimmen, so dass z. B. die Längenänderung des gedachten Stabes $g_2 g_3$ gleich der gegenseitigen Verschiebung des der Scheibe *II* angehörenden Punktepaares g_2, g_3 ist. Es liegt jetzt ein Fachwerk von der in No. 31 beschriebenen Art vor; man ist im Stande, der Reihe nach die Verschiebungen der Gelenke g_3, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12} anzugeben, und hierauf mit Hilfe von No. 33 die wirklichen Auflagerbedingungen zu befriedigen. Um

den zweiten Theil dieser Aufgabe lösen zu können, müssen die Stützpunkte in passender Weise mit den Gelenken durch Stäbe verbunden gedacht werden. Besitzt z. B. das Scheibengebilde zwei Auflagergelenke a und b (von denen das eine fest, das andere beweglich sein muss), so sind noch die Stäbe ag_{11}, ag_{12}, bg_{10}, bg_{12} hinzuzufügen.

Der auf dem angegebenen Wege erhaltene Verschiebungsplan soll kurz der *Plan I* heissen; er enthält die den wirklichen Auflagerbedingungen entsprechenden Verschiebungen $m''m'$ sämmtlicher Knotenpunkte m der Scheibe I, die Verschiebungen $g''g'$ sämmtlicher Mittelgelenke g und die Verschiebung des beweglichen Auflagergelenks.

Um nun die zur Anfertigung des Planes I erforderlichen Längenänderungen der gedachten Stäbe zu erhalten, muss im Allgemeinen für jede einzelne Scheibe ein besonderer Verschiebungsplan unter der Voraussetzung gezeichnet werden, dass die Richtung eines Stabes der fraglichen Scheibe und ein Punkt in der Achse dieses Stabes festliegen. Fig. 45 stellt einen Theil des auf diese Weise für die Scheibe *III* erhaltenen Planes (kurz Plan *III* genannt) vor; er dient zur Bestimmung der Aenderungen $\Delta(g_1g_3)$, $\Delta(g_3g_{11})$, $\Delta(g_{11}g_1)$ der Entfernungen g_1g_3, g_3g_{11}, $g_{11}g_1$. Behufs Ermittelung von $\Delta(g_1g_3)$, projicire man die Polstrahlen Og_1' und Og_3' in $\bar{O}\bar{g}_1$ und $\bar{O}\bar{g}_3$ auf eine zur g_1g_3 parallele Gerade 1—3. Es stellt dann $\bar{O}\bar{g}_1$ die Verschiebung von g_1 in der Richtung g_3g_1 dar, ferner $\bar{O}\bar{g}_3$ die Verschiebung von g_3 in derselben Richtung und es giebt mithin die Strecke

$$\overline{g_1g_3} = \Delta(g_1g_3)$$

die gegenseitige Verschiebung des Punktepaares g_1, g_3 an; sie hat denselben Sinn wie die Strecke g_1g_3 und bedeutet deshalb eine Verlängerung des gedachten Stabes g_1g_3. Auf dieselbe Weise wird der Werth $\Delta(g_3g_{11})$ durch Projiciren der Punkte g_3' und g_{11}' auf die zur g_3g_{11} parallele Gerade 3—11 gefunden und $\Delta(g_1g_{11})$ mittels der Projektionen von g_1' und g_{11}' auf die Gerade 1—11. Für $\Delta(g_1g_{11})$ ergab sich in der Fig. 45 ein positiver Werth, für $\Delta(g_3g_{11})$ hingegen ein negativer, so dass dem gedachten Stabe g_3g_{11} eine Verkürzung zuzuschreiben ist.

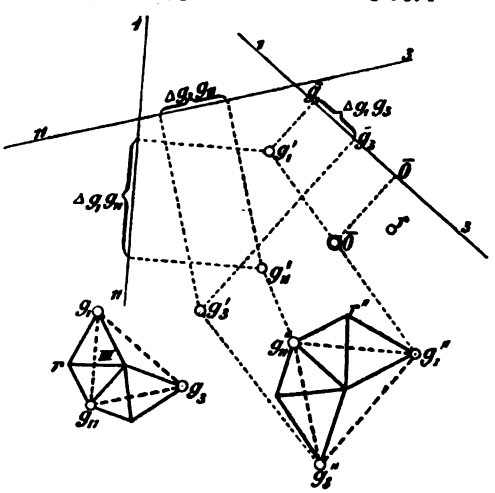


Fig. 45.

Der in Fig. 45 für die Scheibe *III* gezeichnete Einzelplan lässt sich mit Vortheil verwerthen, um nach Vollendung des Planes *I* die wirklichen Verschiebungen $r''r'$ sämmtlicher Knoten r dieser Scheibe darzustellen. Zu diesem Zwecke übertrage man die im Plane *I* für die Gelenke g_1, g_3, g_{11} gefundenen wirklichen Verschiebungen $g_1''g_1'$, $g_3''g_3'$, $g_{11}''g_{11}'$ in den Plan *III* und zeichne hierauf die der Scheibe *III* ähnliche Figur $g_1''g_3''r''g_{11}''$, welche bereits durch zwei der Punkte g_1'', g_3'', g_{11}'' bestimmt wird, so dass man die Schärfe der Zeichnung leicht prüfen kann. Hat man nämlich $g_1''g_1'$, $g_3''g_3'$, $g_{11}''g_{11}'$ aus Plan *I* in Plan *III* übertragen, so muss bei sorgfältiger Zeichnung sein: $g_1''g_3'' \perp g_1g_3$, $g_3''g_{11}'' \perp g_3g_{11}$ und $g_{11}''g_1'' \perp g_{11}g_1$.

Zahlenbeispiel. Zur Erläuterung untersuchen wir den auf Tafel 1 im Maassstabe 1 : 100 aufgetragenen Dachbinder. und zwar zunächst mit Hilfe des allgemeinen Verfahrens. Auf die im vorliegenden und in vielen anderen Fällen möglichen Vereinfachungen werden wir an geeigneter Stelle hinweisen.

Die von dem Eigengewichte des Dachstuhls und dem Schnee herrührende senkrechte Belastung jedes der mittleren Knotenpunkte betrage 1125^k, jedes Endknotens: $\frac{1}{2}$ 1125^k. Der auf jedes Feld der linken Dachhälfte wirkende Winddruck sei = 700^k. Die mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes (der hier nicht wiedergegeben worden ist) erhaltenen Spannkräfte S, sowie die Stablängen s, Querschnitte F (ohne Abzug für Nietlöcher) und Längenänderungen $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$ sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden. Temperaturänderungen blieben unberücksichtigt. Die Elasticitätsziffer wurde (für Schweisseisen): $E = 1\,800\,000^k$ f. d. *qcm* angenommen.*) Zur besseren Uebersicht

Linke Trägerhälfte					Rechte Trägerhälfte				
Stab	S	F	s	Δs	Stab	S	F	s	Δs
1	— 9910	44	212	— 0,27	1′	— 9530	44	212	— 0,26
2	— 9110	44	212	— 0,24	2′	— 8780	44	212	— 0,23
3	— 8320	44	212	— 0,22	3′	— 7940	44	212	— 0,21
4	— 7520	44	212	— 0,20	4′	— 7140	44	212	— 0,19
5	+ 8970	18	245	+ 0,94	5′	+ 6970	18	245	+ 0,73
6	+ 7470	18	245	+ 0,78	6′	+ 6170	18	245	+ 0,65
7	+ 4110	12	254	+ 0,48					
8	+ 4210	12	245	+ 0,48	8′	+ 2820	12	245	+ 0,32
9	+ 5710	12	245	+ 0,65	9′	+ 3620	12	245	+ 0,41
10	— 1500	9	122	— 0,11	10′	— 800	9	122	— 0,06
11	+ 1500	5	245	+ 0,41	11′	+ 800	5	245	+ 0,22
12	— 3000	16	245	— 0,26	12′	— 1600	16	245	— 0,14
13	+ 1500	5	245	+ 0,41	13′	+ 800	5	245	+ 0,22
14	— 1500	9	122	— 0,11	14′	— 800	9	122	— 0,06
	kilogr.	*qcm.*	*cm.*	*mm.*		*kilogr.*	*qcm.*	*cm.*	*mm.*

*) Bei Berechnung von Formveränderungen empfiehlt es sich im Allgemeinen, E nicht zu hoch anzunehmen, um den schwierig zu berechnenden Einfluss der Verschwächung durch Niete und das Nachgeben der Verbindungen zu berücksichtigen.

wurden die Δs (in Millimetern) auch in das Trägernetz auf Tafel 1 eingeschrieben.

Der zu untersuchende Träger besteht aus den beiden gegliederten Scheiben aeh und iqh, welche kurz mit *I* und *II* bezeichnet werden sollen und die mittels des Gelenkes h und des Stabes ai mit einander verbunden sind.

Zuerst wurde in Fig. 47 der Verschiebungsplan für die Scheibe *I* unter der Voraussetzung aufgetragen, dass der Knoten a und die Richtung des Stabes ab festliegen. Sämmtliche Verschiebungen wurden in zwanzigfacher Vergrösserung gezeichnet. *O* ist der beliebig angenommene Pol. a' fällt mit *O* zusammen. Die Verschiebung Ob' des Punktes b ist gleich der Längenänderung $\Delta 12$ des Stabes 12. Die Punkte c', d', e' ferner f', g', h' wurden nach dem in No. 32 beschriebenen Verfahren bestimmt. Hierauf wurde der (roth ausgezogene) Verschiebungsplan *II* für die Scheibe *II* in Angriff genommen, vorerst für den Fall, dass Punkt i und die Richtung des Stabes ik festgehalten werden. Nach Ermittelung der Punkte k', l', m', q' und n', p', h' konnte die Aenderung $\Delta(hi)$ der Entfernung hi als Projektion der Strecke $h'i'$ auf eine zu hi parallele Gerade angegeben werden und ebenso die Aenderungen $\Delta(iq)$ und $\Delta(hq)$ der Abstände iq und hq. [Im vorliegenden Falle wäre allerdings hierzu die Aufzeichnung des Planes *II* nicht nöthig gewesen, denn es ist offenbar $\Delta(hi)$ gleich der Summe der Längenänderungen der Stäbe 9′ und 8′, d. h. $\Delta(hi) = +0{,}41 + 0{,}32 = +0{,}73^{mm}$ und ebenso findet man ohne weiteres: $\Delta(hq) = \Delta 4' + \Delta 3' + \Delta 2' + \Delta 1' = -0{,}19 - 0{,}21 - 0{,}23 - 0{,}26 = -0{,}89^{mm}$ und $\Delta(iq) = \Delta 6' + \Delta 5' = +0{,}65 + 0{,}73 = +1{,}38^{mm}$].

Jetzt war es möglich, den Plan *I* zu vollenden. Mit Hilfe von $\Delta(hi)$ und $\Delta 7$ wurde die Lage von i', ferner mittels $\Delta(hq)$ und $\Delta(iq)$ die Lage von q' gefunden und hierauf den Auflagerbedingungen genügt. Da e festliegt und q auf einer Wagerechten geführt wird, so fällt e'' mit e' zusammen, während q'' der Schnittpunkt der rechtwinklig zu eq gezogenen Geraden $e''q''$ mit der Wagerechten durch q' ist. Durch die Punkte e'' und q'' ist die dem gegebenen Fachwerke ähnliche Figur $e''d''b''g''h''f''a''i''q''$ vollständig bestimmt, und damit sind auch die Verschiebungen sämmtlicher Knoten der Scheibe *I* sowie diejenigen der Punkte i und q gegeben.

Behufs Darstellung der Verschiebungen der Knotenpunkte der Scheibe *II* wurden die Verschiebungen $q''q'$ und $h''h'$ aus Plan *I* in *II* übertragen und auf diese Weise zwei Punkte der Figur $q''m''k''p''h''n''i''l''$ gefunden. Bei sorgfältiger Zeichnung muss $q''h'' \perp qh$ sein, ferner muss die Verschiebung $i''i'$ mit der bereits im Plane *I* erhaltenen Verschiebung $i''i'$ nach Grösse und Richtung übereinstimmen. [Wegen der geraden Gurtung hk hätte man auch im Plane *I* einen Punkt k' mit Hilfe von $\Delta 12'$ und $\Delta(hk) = -0{,}19 - 0{,}21 = -0{,}40^{mm}$ ermitteln können, hierauf n' mittels $\Delta 13'$ und $\Delta 8'$, p' mittels $\Delta 3'$ und $\Delta 14'$ sodann l' und m'. Plan *II* kann also bei Untersuchung des vorliegenden Trägers entbehrt werden; er ist aber nöthig, sobald h, p, k, m, q oder h, n, i oder i, l, q nicht in einer Geraden liegen.

Vergleichende Messungen zeigen, dass im vorliegenden Falle von allen Knoten des Trägers der Punkt g die grösste Verschiebung erfährt. Man findet $\overline{g''g'} = 7{,}6^{mm}$. Die wagerechte Verschiebung des Punktes q ist: $\overline{q''q'} = 6{,}5^{mm}$.

Die Figuren 49 bis 52 zeigen weitere Arten von Fachwerken, deren Verschiebungspläne auf dem im vorstehenden Beispiele angegebenen Wege erhalten werden können.

Der einfache Fachwerkbalken in Fig. 49 besteht aus den beiden Scheiben *abc* und *bde* (deren Ränder durch Schraffirung hervorgehoben

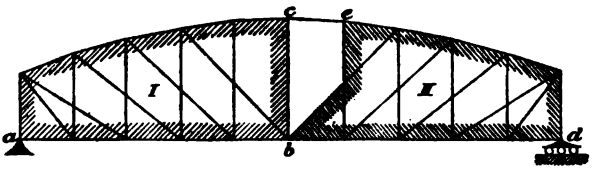


Fig. 49.

wurden) und dem Stabe *ce*. Die sich schneidenden Diagonalen und Vertikalen sind an den Kreuzungsstellen nicht miteinander verbunden.

Fig. 50 stellt einen versteiften Gelenkbogen (vergl. Band *I*, Abschnitt XII) dar, welcher in die Scheiben *I* und *II* und den Stab *ce*

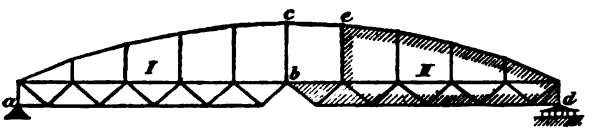


Fig. 50.

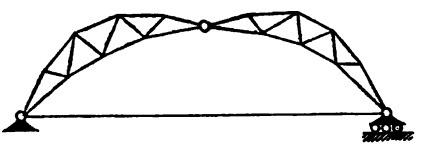


Fig. 51.

zerlegt werden kann, Fig. 51 einen Fachwerkbogen mit drei Gelenken, dessen Kämpfer durch eine Stange verbunden sind.

Soll die Formveränderung des in Fig. 52 abgebildeten Trägers

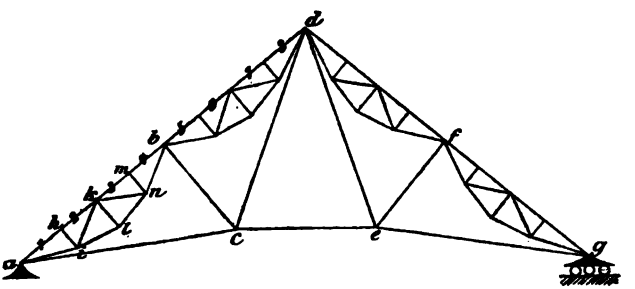


Fig. 52.

untersucht werden, so nehme man zunächst den Punkt *c* und die Richtung des Stabes *ce* als festliegend an, ermittele *e'*, sodann:

d' mit Hilfe von $\Delta(dc)$ und $\Delta(de)$
b' „ „ „ $\Delta(bc)$ „ $\Delta(bd) = \Delta 5 + \Delta 6 + \Delta 7 + \Delta 8$
a' „ „ „ $\Delta(ac)$ „ $\Delta(ab) = \Delta 1 + \Delta 2 + \Delta 8 + \Delta 4$,

und ebenso bestimme man f' und g'. Nun befriedige man die Auflagerbedingungen, übertrage die hierbei gefundenen Verschiebungen $b''b'$, $d''d'$, $f''f'$, $g''g'$ der Punkte b, d, f, g in die nach No. 32 für die einzelnen Scheiben angefertigten Pläne und zeichne in diese letzteren schliesslich die den Scheiben ab, bd, df, fg ähnlichen Figuren $a''b''$, $b''d''$, $d''f''$, $f''g''$ ein.

38. Fachwerkträger verschiedener Art. Liegt ein Fachwerk vor, von anderer als in den vorstehenden Untersuchungen beschriebener Art, so verwandele man dasselbe — am besten durch Aenderung der Stützung — zunächst in ein solches, dessen Verschiebungsplan durch wiederholte Lösung der in No. 32 vorgeführten Hauptaufgabe erhalten werden kann, nachdem man vorher nöthigenfalls für einzelne Theile (Scheiben) besondere Pläne zur Bestimmung der gegenseitigen Verschiebungen derjenigen Gelenke gezeichnet hat, in denen diese Theile aneinander hängen. Hierauf beseitige man die neu hinzugefügten Stützen, und schreibe den starr zu denkenden Gliedern des nunmehr beweglichen Fachwerks Verschiebungen und Drehungen zu, durch welche die wirklichen Auflagerbedingungen erfüllt werden. Die folgenden Beispiele werden genügen, dieses Verfahren zu erläutern.

1. Beispiel. Das in Fig. 53 dargestellte Fachwerk besteht aus zwei gegliederten Scheiben *I* und *II*, die im Gelenke c aneinander hängen und durch die Stäbe 4 und 7 mit dem Kopfe e der Pendelsäule 5 verbunden sind. Bei a ist ein festes, bei g ein auf wagerechter Bahn bewegliches Auflagergelenk angeordnet. Will man die Verschiebungen der Knotenpunkte dieses Fachwerks ermitteln, so bestimme man zunächst mit Hilfe von Einzelplänen (*I*) und (*II*), die nach No. 32 für die Scheiben *I* und *II* aufgetragen werden, die Aenderungen $\Delta 1$, $\Delta 2$, $\Delta 8$, $\Delta 9$ der kurz mit 1, 2, 8, 9 bezeichneten Strecken ab, ac, dg, cg. Hierauf nehme man an, der Knoten g sei frei, setze dafür aber b in der Richtung ab geführt voraus und zeichne den Plan Fig. 53 A.

O ist der beliebig angenommene Pol. a' und f' fallen mit O zusammen, da a und f feste Punkte sind. Die Wagerechte $Ob' = \Delta 1$ giebt die Verschiebung von b an. Mittels $\Delta 2$ und $\Delta 8$ wird nach No. 32 der Punkt c' bestimmt, hierauf der Reihe nach: e' mittels $\Delta 4$ und $\Delta 5$, d' mittels $\Delta 6$ und $\Delta 7$, g' mittels $\Delta 8$ und $\Delta 9$*).

*) Anstatt Scheibe *I* in b zu führen, kann man auch die Richtung des Stabes ah festlegen. Der Plan (*I*) wird dann überflüssig, da man die Knotenpunkte der Scheibe *I* schrittweise durch je zwei Stäbe an den Stab ah an-

Jetzt verwandele man das Fachwerk durch Beseitigung der Führung des Punktes *b* in eine zwangläufige kinematische Kette, drehe die

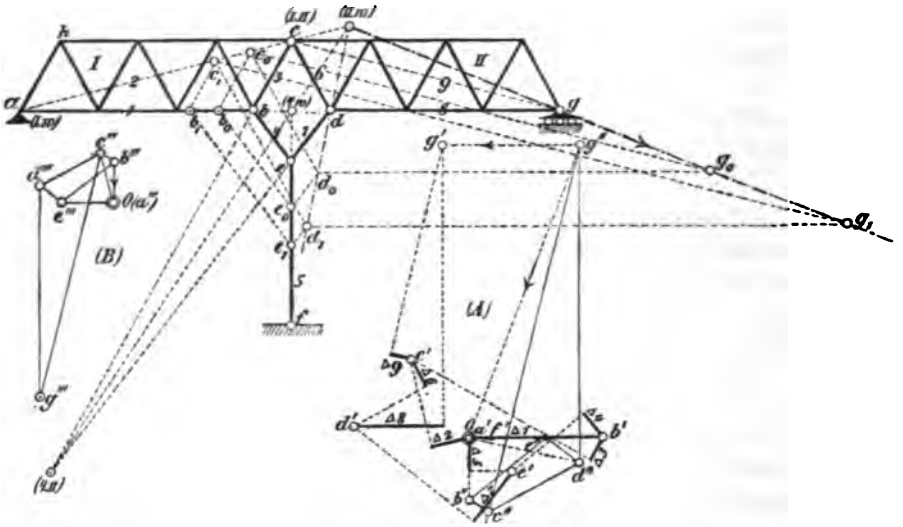


Fig. 53.

Scheibe *1* so um das Auflagergelenk *a*, dass der Punkt *g* eine (im Plane *A* durch einen Strahl $g''O$ darzustellende) Verschiebung erfährt, die, mit der vorhin gefundenen Og' zusammengesetzt, eine wagerechte Gesammtverschiebung $g''g'$ ergiebt, und bestimme schliesslich auch die von den Knotenpunkten *d*, *c*, *e*, *b* bei dieser Bewegung beschriebenen Wege: $d''O$, $c''O$, $e''O$, $b''O$.

Zu einer einfachen Lösung dieser Aufgabe führen die im ersten Bande (Abschnitt XIV) mitgetheilten Untersuchungen kinematischer Ketten. Die dort für die Geschwindigkeiten der Punkte solcher Ketten abgeleiteten Gesetze gelten auch für die Verschiebungen dieser Punkte, sobald nur vorausgesetzt wird, dass alle diese Verschiebungen in demselben Zeittheilchen erfolgen und sich mithin zu einander verhalten, wie die entsprechenden Geschwindigkeiten.

Stellt man also die vorläufig willkürlich anzunehmende Grösse der Verschiebung des Punktes *b* durch eine Strecke bb_0 dar, welche, von *b* aus, auf dem nach dem augenblicklichen Drehpunkte (*Drehpole*) *a*

---

schliessen kann. Plan (*II*) ist auch bei der oben angenommenen Stützungsart entbehrlich, doch möge wiederholt werden, dass die Anfertigung von Einzelplänen für die verschiedenen Scheiben den Vorzug der grösseren Uebersichtlichkeit besitzt.

gezogenen Strahle ba abgetragen wird, und zieht man $b_0c_0 \parallel bc$ bis zum Polstrahle ca, so giebt cc_0 die Grösse der Verschiebung von c an. Macht man weiter $b_0e_0 \parallel be$, so erhält man in der Strecke ee_0 die Grösse der Verschiebung des Punktes e, der um f sich drehenden Pendelsäule, und hierauf kann man mittels $c_0d_0 \parallel cd$ und $e_0d_0 \parallel ed$ die Verschiebung dd_0 von d, sodann mittels $c_0g_0 \parallel cg$ und $d_0g_0 \parallel dg$ die Verschiebung gg_0 von g bestimmen. Die Richtungen der Verschiebungen der Punkte b, c, e, d, g sind rechtwinklig zu den entsprechenden Strecken bb_0, cc_0, ee_0, dd_0, gg_0 (welche letztere deshalb *„um 90° gedrehte Verschiebungen"* genannt werden sollen) und damit sind die Richtungen der Strahlen bestimmt, die im Plane A die Punkte g'', d'', c'' .... mit dem Pole O verbinden. Es ist $g''O \perp gg_0$, $d''O \perp dd_0$, $c''O \perp cc_0$ u. s. w. Die Länge des Strahles $g''O$ folgt aus der Bedingung, dass g'' auf der Wagerechten durch g' liegen muss, und hierauf ist d'' gegeben durch $g''d'' \perp gd$, c'' durch: $c''d'' \perp cd$ oder $g''c'' \perp gc$, ferner b'' durch: $c''b'' \perp cb$, sodann e'' durch $b''e'' \perp be$ oder $d''e'' \perp de$.

Wir theilen noch drei andere Verfahren mit, die Punkte d'', e'', b'', c'' zu ermitteln:

1. Man zeichne einen Linienzug $g_1d_1e_1b_1c_1$, dessen Seiten den entsprechenden Seiten des Zuges $g_0d_0e_0b_0c_0$ parallel sind (so dass also $g_1d_1 \parallel gd$, $d_1e_1 \parallel de$, ...) und dessen Ecken auf den Geraden gg_0, dd_0, ee_0, ... liegen. Macht man hierbei $\overline{gg_1} = \overline{g''O}$, so ist auch $d''O = dd_1$, $e''O = ee_1$, u. s. w.

2. Man bestimme die Pole, um welche sich die einzelnen Glieder der bewegten zwangläufigen Kette gegen das ruhende, kurz mit w bezeichnete Widerlager, dem die festen Punkte a und f angehören, drehen. Der Pol $(I \cdot w)$ der Scheibe I fällt mit a zusammen, der Pol $(I \cdot II)$ von I gegen II mit dem Gelenke c. Die Glieder I, 4, 5 der Kette bilden mit dem Widerlager zusammen ein Gelenkviereck, und es liegt daher der Pol $(4 \cdot w)$ von 4 gegen w im Schnittpunkte der Geraden ab und fe. Ebenso folgt, dass der Pol $(4 \cdot II)$ von 4 gegen II der Schnittpunkt der Geraden cb und de ist, und nun lässt sich der Pol $(II \cdot w)$ von II gegen w mittels der Bedingungen finden, dass die drei Punkte $(I \cdot w)$, $(I \cdot II)$ und $(II \cdot w)$ in einer Geraden liegen müssen, desgleichen die Punkte $(4 \cdot II)$, $(4 \cdot w)$, $(II \cdot w)$. Durch den Pol $(II \cdot w)$ sind die Richtungen gg_0 und dd_0 gegeben, und man ist jetzt im Stande, die Punkte g'', d'', c'', b'', e'' auf die zuerst beschriebene Art zu bestimmen.

3. Man nehme die Verschiebung des Punktes b der um a sich drehenden Scheibe I zunächst beliebig gross an und stelle sie in einem besonderen Plane (Fig. 58 B) durch einen zur Geraden ba rechtwinkligen Polstrahl $b'''O$ dar, wobei es gleichgiltig ist, ob b''' unterhalb oder

oberhalb des Poles O liegend gewählt wird. Hierauf bestimme man die gleichzeitig von den Punkten c, e, d, g beschriebenen Wege, indem man die Reihe zieht:

$$b'''c''' \perp bc \quad \text{und} \quad a'''c''' \perp ac,$$
$$b'''e''' \perp be \quad ,, \quad f'''e''' \perp fe,^{*})$$
$$c'''d''' \perp cd \quad ,, \quad e'''d''' \perp ed,$$
$$c'''g''' \perp cg \quad ,, \quad d'''g''' \perp dg.$$

Die Strahlen, welche die Punkte b''', c''', e''', d''', g''' mit dem Pole O verbinden, stellen nach Grösse und Richtung die Verschiebungen der Punkte b, c, e, d, g dar. Nun ermittele man im Plane (A) mit Hilfe von $g''O \parallel g'''O$ diejenige Verschiebung, welche g erfahren muss, damit die Auflagerbedingung bei g erfüllt wird, und hierauf die zugehörigen Verschiebungen $c''O$, $d''O$, ... indem man eine Figur $g'c''d''$ ... zeichnet, deren Seiten parallel sind den entsprechenden Seiten der Figur $g'''c'''d'''$ ....

Die Figur (B) ist offenbar nichts weiter als der *Williot*'sche Verschiebungsplan derjenigen kinematischen Kette, in welche das zu untersuchende Fachwerk durch Beseitigung des beweglichen Auflagers g übergeht**).

Ueberträgt man schliesslich die auf einem der beschriebenen Wege gefundenen Verschiebungen $b''b'$, $c''d''$, $d''d'$, $g''g'$ aus dem Plane (A) in die für die Scheiben (I) und (II) angefertigten Einzelpläne, und zeichnet in (I) die der Scheibe abc ähnliche Figur $a''b''c''$ (deren Punkt a'' mit dem Punkte a' dieses Planes zusammenfällt) sodann in (II) die der Scheibe cdg ähnliche Figur $c''d''g''$, so ist man im Stande, die Verschiebungen $m''m'$ sämmtlicher Knoten m der Scheiben I und II anzugeben.

Auf ähnliche Weise wie das eben untersuchte Fachwerk kann auch das in Fig. 54 dargestellte behandelt werden. Es ist zweckmässig, zunächst den Punkt a und die Richtung von ab festliegend anzunehmen und sich die Führung des Gelenkes m beseitigt zu denken. Hierauf drehe man die Scheibe I so um a, dass der Punkt m eine wagerechte Gesammtverschiebung $m''m'$ erfährt. Die Pole, um welche sich die Scheiben II und III in Folge dieser zweiten Bewegung drehen, sind in der Fig. 54 angegeben worden***). An ihrer Stelle können auch die

*) f''' fällt mit a''' zusammen.

**) Dass es sich bei Aufzeichnung der Figur (B) in der That nur um die wiederholte Lösung der in No. 32 vorgeführten Hauptaufgabe handelt, lehrt ein Blick auf Fig. 34. Ist $\Delta 1 = 0$ und $\Delta 2 = 0$, so entsprechen den Geraden ac und cb in Fig. 34a die zu ihnen rechtwinkligen Geraden $a'c'$ und $c'b'$ des Verschiebungsplanes Fig. 34b. Vergl. auch den Anfang von Seite 62.

***) Das Zeichen ∞ $(4 \cdot II)$ beutet an, dass der Pol $(4 \cdot II)$ mit dem unendlich fernen Schnittpunkte der Stäbe 3 und 7 zusammenfällt.

um 90° gedrehten Verschiebungen oder ein Williot'scher Plan benutzt werden, und es wird dem Leser empfohlen, zur Uebung die betreffenden Figuren selbst zu entwerfen*).

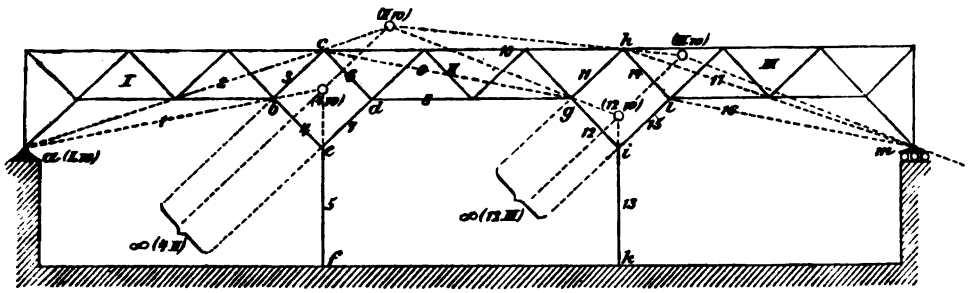


Fig. 54.

2. Beispiel. Fig. 55 zeigt einen statisch bestimmten Bogenträger mit drei Oeffnungen. Derselbe besteht aus vier gegliederten Scheiben, die in den Gelenken *c*, *g*, *i* aneinander hängen. Die Scheiben *I* und *II* sind durch zwei Stäbe mit dem Kopfe der Pendelsäule *ef* verbunden, in gleicher Weise *III* und *IV* mit der Säule *lm*. Bei *a* und *n* sind feste Auflagergelenke angeordnet.

Wird der Verschiebungsplan dieses Trägers verlangt, so setze man zunächst voraus, es sei bei *g* die Verbindung der Scheiben *II* und *III*

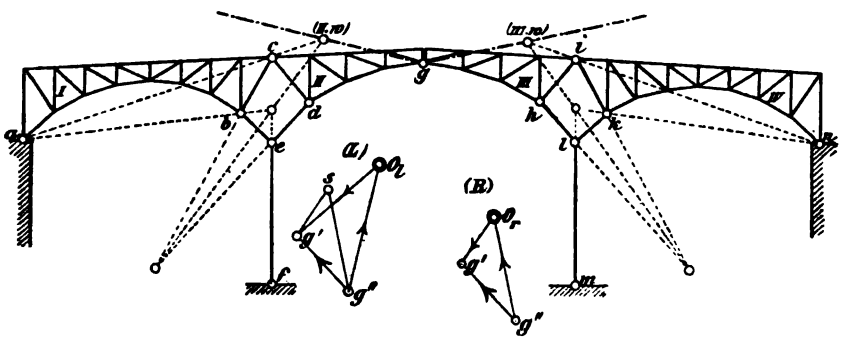


Fig. 55.

gelöst, nehme dafür aber den Punkt *b* in der Richtung *ab* geführt an und den Punkt *k* in der Richtung *nk*. Für diese Stützungsart ermittele

*) Bei Polbestimmungen müssen häufig Gerade durch die Schnittpunkte von ausserhalb des Zeichenblattes sich treffenden Linien gelegt werden, was zwar keinerlei Schwierigkeiten bietet, immerhin aber umständlich genug ist, um dann die Bevorzugung anderer Verfahren zu veranlassen.

man (genau wie im Beispiel 1) die Verschiebungen der Punkte b, c, e, d, g der linken Trägerhälfte und der Punkte k, i, l, h, g der rechten Hälfte — am besten in zwei besonderen Figuren (L) und (R); deren Pole O_l und O_r seien. Hierauf drehe man die Scheiben I und IV so um die Gelenke a bezieh. n, dass der Zusammenhang der Scheiben II und III in g wieder hergestellt wird.

Der erste Theil dieser Untersuchung möge für den Punkt g der linken Trägerhälfte die Verschiebung $O_l g'$ (Plan L) ergeben haben und für den Punkt g der rechten Hälfte die Verschiebung $O_r g'$ (Plan R). In Folge der zweiten Bewegung dreht sich die Scheibe II um den Pol $(II \cdot w)$, dessen Lage in der auf Seite 74 beschriebenen Weise gefunden wird, und es muss deshalb der Strahl $g'' O_l$ rechtwinklig zu der durch die Punkte $(II \cdot w)$ und g bestimmten Geraden sein. Im Plane R hingegen ist $g'' O_r$ rechtwinklig zur Geraden $g — (III \cdot w)$. Da nun beide Pläne Verschiebungen $g'' g'$ liefern müssen, die nach Grösse, Richtung und Sinn übereinstimmen, so lässt sich die Lage der Punkte g'' in folgender Weise ermitteln.

Man mache in (L) die Strecke $g's$ gleich und parallel dem Strahle $g' O_r$ des Planes (R) und lege durch den Punkt s, rechtwinklig zu $g — (III \cdot w)$ eine Gerade. Dieselbe schneidet die gegebene Richtung des Strahles $g'' O_l$ in g''. Hierauf mache man in (R) die Strecke $O_r g''$ gleich der Strecke sg'' in (L).

Jetzt ist man im Stande, genau wie bei Aufgabe 1 die der Verschiebung $g'' O_l$ entsprechenden Wege $d'' O_l$, $c'' O_l$, ... der Punkte d, c, . . . zu bestimmen, desgleichen die Verschiebungen $h'' O_r$, $i'' O_r$, . . . der Punkte h, i, ...

3. Beispiel. Es soll der Verschiebungsplan einer durch einen Balken mit Mittelgelenk versteiften Kette gezeichnet werden. Fig. 56. Bei b ist ein festes, bei p ein auf einer Wagerechten geführtes Auflagergelenk angeordnet. Die ebenfalls auf wagerechten Bahnen beweglichen Gelenke a und x der Tragkette aox sind durch Rückhaltketten, deren Längen sich um die gegebenen Strecken Δ' und Δ'' vergrössern, mit festen Punkten der Widerlager verbunden.

Von dem beliebig angenommenen Pole O aus (Plan A) wird Δ' aufgetragen, und im Endpunkte dieser der linken Rückhaltkette parallelen Strecke ein Loth errichtet, welches die Wagerechte durch O in a' schneidet. Oa' stellt die Verschiebung von a dar. An a' wird die Verlängerung $\Delta 1$ des Kettengliedes 1 angetragen und in dem auf $\Delta 1$ im Endpunkte errichteten Lothe der Ort des Punktes c' gefunden.

Es empfiehlt sich nun, den Punkt c' zunächst beliebig anzunehmen und gewissermassen vorauszusetzen, es werde der Punkt c in der durch den Strahl Oc' angegebenen Richtung geführt; dafür aber denke man

die wagerechte Führung des Punktes x beseitigt. Denn durch die Annahme eines bestimmten c' sind die Verschiebungen sämmtlicher

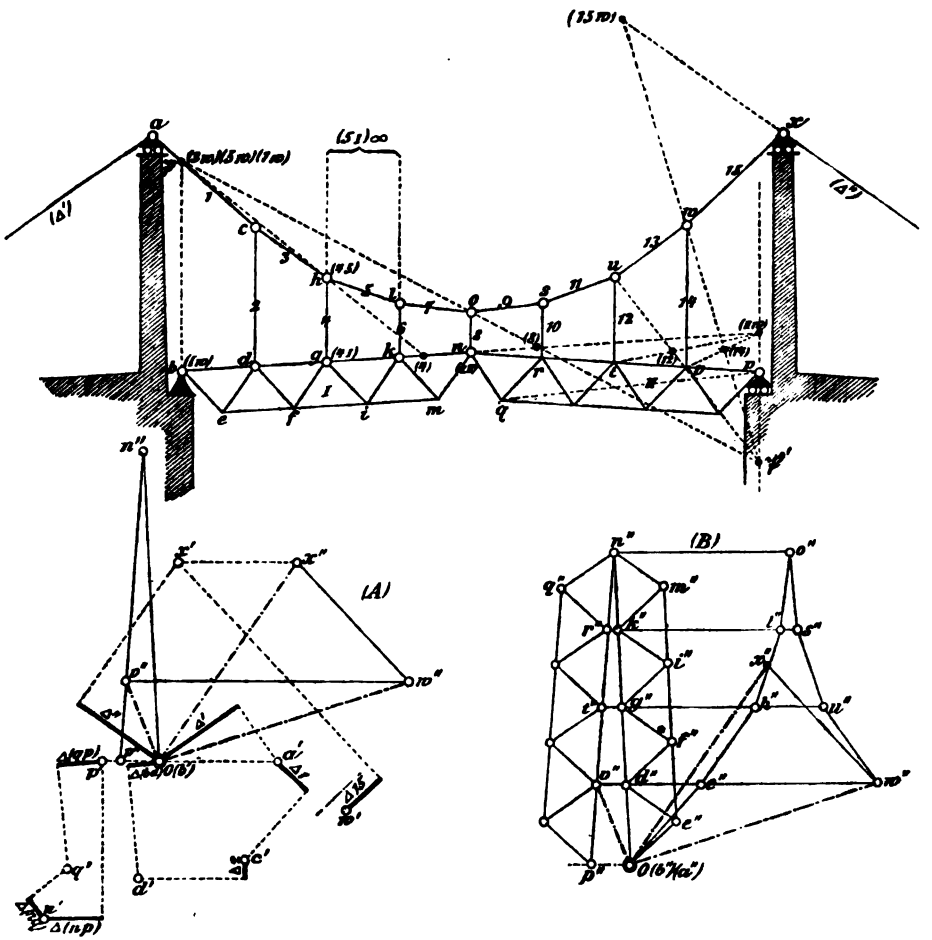


Fig. 56.

Knoten des Fachwerks gegeben, da man schrittweise finden kann:

Punkt d' mittels $\Delta(bd)$ und $\Delta 2$,
„ e' „ $\Delta(be)$ „ $\Delta(de)$,
„ f' „ $\Delta(df)$ „ $\Delta(ef)$,
„ g' „ $\Delta(dg)$ „ $\Delta(fg)$,
„ h' „ $\Delta 4$ „ $\Delta 3$,

u. s. f. die Punkte i', k', l', m', n', o', hierauf:

Punkt p' auf der Wagerechten durch O mittels Δnp,
„ q' mittels $\Delta(nq)$ und $\Delta(pq)$*)
„ r' „ $\Delta(nr)$ „ $\Delta(qr)$
„ s' „ $\Delta 9$ „ $\Delta 10$ u. s. w. bis Punkt w'.

Schliesslich erhält man den Punkt x', indem man in O und w' die Strecken Δ'' (parallel zur rechten Rückhaltkette) und $\Delta 15$ anträgt und in den Endpunkten dieser Strecken Lothe errichtet.

Jetzt wird die vorübergehend angenommene Führung des Punktes c wieder beseitigt, und hierdurch das Fachwerk in eine zwangläufige kinematische Kette verwandelt, der eine Bewegung zu ertheilen ist, durch welche der Punkt x eine Verschiebung $x''O$ erfährt, die mit Ox' zusammengesetzt eine wagerechte Gesammtverschiebung $x''x'$ ergiebt. Die Pole, um welche sich die einzelnen Glieder des Fachwerks bei dieser zweiten Bewegung drehen, werden wie folgt ermittelt.

Der Pol $(I \cdot w)$ der Scheibe I gegen das Widerlager fällt mit b zusammen, der Pol $(I \cdot II)$ mit n, während $(II \cdot w)$ durch den Schnittpunkt der Geraden $(I \cdot w) — (I \cdot II)$ mit der Senkrechten durch p bestimmt ist, weil sich p auf einer Wagerechten bewegt.

Die Stäbe 5, 4, 6 bilden mit der Scheibe I ein Gelenkviereck, und es ist deshalb der unendlich ferne Schnittpunkt von 4 und 6 der Pol von 5 gegen I; derselbe liegt in der Senkrechten durch b, denn die Pole $(5 \cdot w)$, $(5 \cdot I)$, $(I \cdot w)$ fallen in eine Gerade. Da nun die Verschiebungsrichtung des Punktes c rechtwinklig zur Achse des um a sich drehenden Stabes 1 ist, und c auch dem Stabe 3 angehört, so ist der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ von 1 mit der Senkrechten durch b der Pol von 3 gegen w, und es bewegt sich deshalb h rechtwinklig zur Geraden $\mathfrak{P}h$. Daraus ergiebt sich aber, dass $(5 \cdot w)$ mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt und ebenso kann gefolgert werden, dass sich $\mathfrak{P}$ auch mit $(7 \cdot w)$ deckt.

Ganz ähnlich lässt sich beweisen, dass der Schnittpunkt $\mathfrak{P}'$ der Geraden $\mathfrak{P}o$ mit der Senkrechten durch p der gemeinschaftliche Pol der Stäbe 9, 11 und 13 ist, denn die Pole $(9 \cdot w)$, $(11 \cdot w)$, $13 \cdot w)$ liegen auf der Geraden, welche durch $(II \cdot w)$ und die unendlich fernen Schnittpunkte der Stäbe 8 und 10, 10 und 12, 12 und 14 geht.

Legt man nun durch $\mathfrak{P}$ und den oberen Endpunkt einer der linken Trägerhälfte angehörenden Hängestange eine Gerade, desgleichen durch $(I \cdot w)$ und den unteren Endpunkt, so erhält man im Schnittpunkte beider Geraden den Pol dieser Stange. Auf diese Art ist in Fig. 56 der kurz mit (4) bezeichnete Pol $(4 \cdot w)$ des Stabes 4 bestimmt

*) $\Delta(pq)$ und $\Delta(np)$ werden einem für die Scheibe II gezeichneten besonderen Plane entnommen. Im Plane (A) haben wir, um eine übersichtliche Figur zu erhalten, nur die Punkte a', c', d', n', p' q', w', x' angegeben.

worden; der Beweis folgt daraus, dass die Punkte $(5 \cdot w)$, $(4 \cdot 5)$, $(4 \cdot w)$ in einer Geraden liegen, desgleichen die Punkte $(I \cdot w)$, $(4 \cdot I)$, $(4 \cdot w)$. Aehnlich werden die Pole der Hängestangen der rechten Hälfte ermittelt. An Stelle der Punkte $\mathfrak{P}$ und $(I \cdot w)$ treten hier die Punkte $\mathfrak{P}'$ und $(II \cdot w)$. In der Figur sind die kurz mit (12) und (14) bezeichneten Pole $(12 \cdot w)$ und $(14 \cdot w)$ der Stäbe 12 und 14 angegeben worden. Pol (8) von 8 ist der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ und $(I \cdot w) - (II \cdot w)$. Der Pol von $(15 \cdot w)$ gehört der Geraden $\mathfrak{P}'$ (14) und der Mittellinie der rechten Rückhaltkette an.

Um die Verschiebungen zu ermitteln, welche die Punkte der betrachteten Kette erfahren, ziehe man im Plane A den Strahl $x'' O$ rechtwinklig zur rechten Rückhaltkette bis zur Wagerechten durch x', hierauf $x'' w'' \perp x w$ und $O w''$ rechtwinklig zu der Geraden, welche den Punkt w mit dem Pole $\mathfrak{P}'$ verbindet. Den Punkt v'' findet man mittels der Bedingungen $v'' w'' \perp vw$ und $v'' O \perp v(14)$ und den Punkt n'' mit Hilfe von $v'' n'' \perp vn$ und $n'' O \perp n(I \cdot w)$, womit je zwei Punkte der den Scheiben npq und nmb ähnlichen Figuren $n'' p'' q''$ und $n'' m'' a''$ bestimmt sind. Bei richtiger Zeichnung muss hierbei p'' in die Wagerechte durch O fallen.

Damit Fig. (A) deutlich bleibe, haben wir die bereits gefundenen Punkte $x'' w'' v'' n'' p''$ in eine besondere Fig. (B) übertragen und in dieser die Ermittlung der fraglichen Verschiebungen fortgesetzt. Nach Auftragung der Figuren $n'' p'' q''$ und $n'' m'' a''$ wurden der Reihe nach bestimmt:

u''	mittels:	$u'' w'' \perp uw$	und	$u'' t'' \perp ut$
s''	„	$s'' u'' \perp su$	„	$s'' r'' \perp sr$
o''	„	$o'' s'' \perp os$	„	$o'' n'' \perp on$
l''	„	$l'' o'' \perp lo$	„	$l'' k'' \perp lk$
h''	„	$h'' l'' \perp hl$	„	$h'' g'' \perp hg$
c''	„	$c'' h'' \perp ch$	„	$c'' d'' \perp cd.$

Bei sorgfältiger Zeichnung muss eine von c'' aus rechtwinklig zu ca gezogene Gerade den Pol O des Verschiebungsplanes treffen. Ferner muss sein:

$u'' O \perp u\mathfrak{P}'$, $s'' O \perp s\mathfrak{P}'$, $o'' O \perp o\mathfrak{P}'$, $l'' O \perp l\mathfrak{P}$, $h'' O \perp h\mathfrak{P}$.

4. Beispiel. Fig. 57 stellt eine gegliederte Scheibe der folgenden Erzeugungsweise dar. An ein aus vier Stäben bestehendes Gelenkviereck 1, 2, 3, 4 werden die Knoten 5, 6, 7, ... n so angeschlossen, dass 5 verbunden wird mit 4 und 2, 6 mit 5 und 3, 7 mit 6 und 4, ... n mit $n-1$ und $n-3$, worauf schliesslich noch der Stab $n1$ hinzugefügt wird. In Fig. 57 ist $n = 8$. Wird der Verschiebungsplan für den Fall gesucht, dass der Knoten 1 und die Richtung des Stabes 1—2 festliegen, so nehme man zuerst an, es sei der Knoten 3 auf

irgend einer festen Geraden geführt, der Stab 1—8 hingegen beseitigt. Trägt man dann vom Pole O des Verschiebungsplanes aus die (in Fig. 57

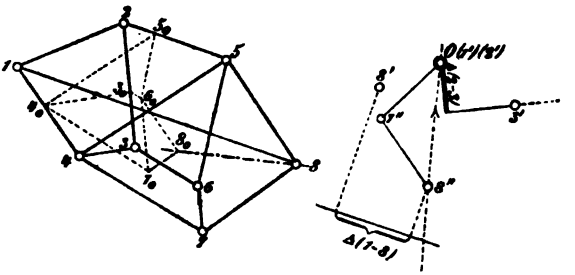


Fig. 57.

positiv vorausgesetzte) Längenänderung $\Delta(2—3)$ des Stabes 2—3 auf und errichtet im Endpunkte derselben ein Loth, so ist dieses der Ort des Punktes $3'$. Dieser Punkt selbst wird beliebig angenommen; die Gerade, welche ihn mit O verbindet, giebt die Richtung an, in welcher 3 vorläufig geführt wird.

Nun bestimmt man der Reihe nach die Punkte $4'$, $5'$, $6'$, $7'$, $8'$, beseitigt hierauf die Führung des Knotens 3 und ertheilt den nunmehr starr zu denkenden, zwangläufig miteinander verbundenen Stäben Bewegungen, durch welche die Bedingung erfüllt wird, dass die gegenseitige Verschiebung der Punkte 8 und 1 gleich der Längenänderung $\Delta(1—8)$ des Stabes 1—8 ist. Dazu ermittelt man mit Hilfe der um 90° gedrehten Verschiebungen $3—3_0$, $4—4_0$, ... $8—8_0$ die zur Geraden $8—8_0$ rechtwinklige Richtung des Strahles $8'' O$ und bestimmt auf diesem den Punkt $8''$ mittels der Bedingung, dass die Projektion der Gesammtverschiebung $8'' 8'$ des Punktes 8 auf eine zum Stabe (1 — 8) parallele Gerade gleich der (in der Fig. 57 negativ angenommenen) Längenänderung $\Delta(1—8)$ dieses Stabes ist. Jetzt kann man $7''$ finden mittels $7''—8'' \perp 7—8$ und $7'' O \perp 7—7_0$, hierauf $6''$, $5''$, ... Damit sind die Gesammtverschiebungen $m'' m'$ sämmtlicher Knoten m bestimmt.

Dem eben betrachteten Stabgebilde entspricht ein Scheibengebilde von ähnlicher Entstehungsweise. Ein Beispiel bietet der in Fig. 54 dargestellte Träger. Die Glieder *I*, 4, 5 bilden mit dem die festen Punkte a und f verbindenden starren Widerlager ein Gelenkviereck, an das der Knoten d mittels *II* und 7 zwangläufig angeschlossen wird, hierauf i mittels 12 und 13, sodann l mittels 15 und *III*, welches letzte Glied schliesslich bei m eine Führung erhält.

5. Beispiel. Es soll noch eine sehr lehrreiche Aufgabe mitgetheilt und auf zweierlei Art gelöst werden. Die zweite Lösung wird nach einem Verfahren erfolgen, das selbst in den schwierigsten Fällen übersichtlich zum Ziele führt.

An ein aus Stäben gebildetes Gelenkfünfeck 1—2—3—4—5 seien weitere Knoten 6, 7 8, ... m, ... n durch je zwei Stäbe in der Weise angeschlossen, dass 6 verbunden wird mit 5 und 2, 7 mit 6 und 3, ... , m mit $(m-1)$ und $(m-4)$, ... , n mit $(n-1)$ und $(n-4)$. Der Knoten 1 und die Richtung des Stabes 1—2 liegen fest; m werde in einer ruhenden Geraden $m_0 m_0$ geführt, ebenso n in $n_0 n_0$. Es soll der Verschiebungsplan gezeichnet werden.

In Fig. 58a ist $m = 8$ und $n = 11$. Vom Pole O aus (Fig. 58b) wurden die Längenänderungen $\Delta(1-2)$ und $\Delta(1-5)$ der Stäbe 1—2 und 1—5 aufgetragen und an $\Delta(1-2)$ die Strecke $\Delta(2-3)$ gesetzt. Die in den Endpunkten von $\Delta(2-3)$ und $\Delta(1-5)$ auf diesen Strecken

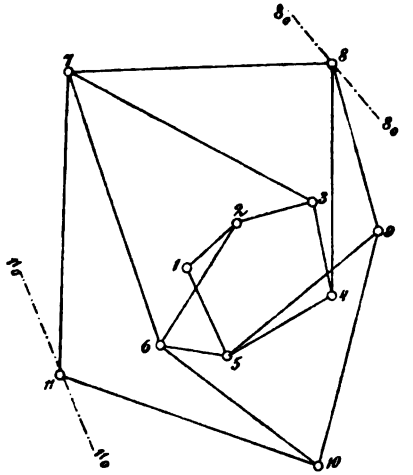


Fig. 58a.

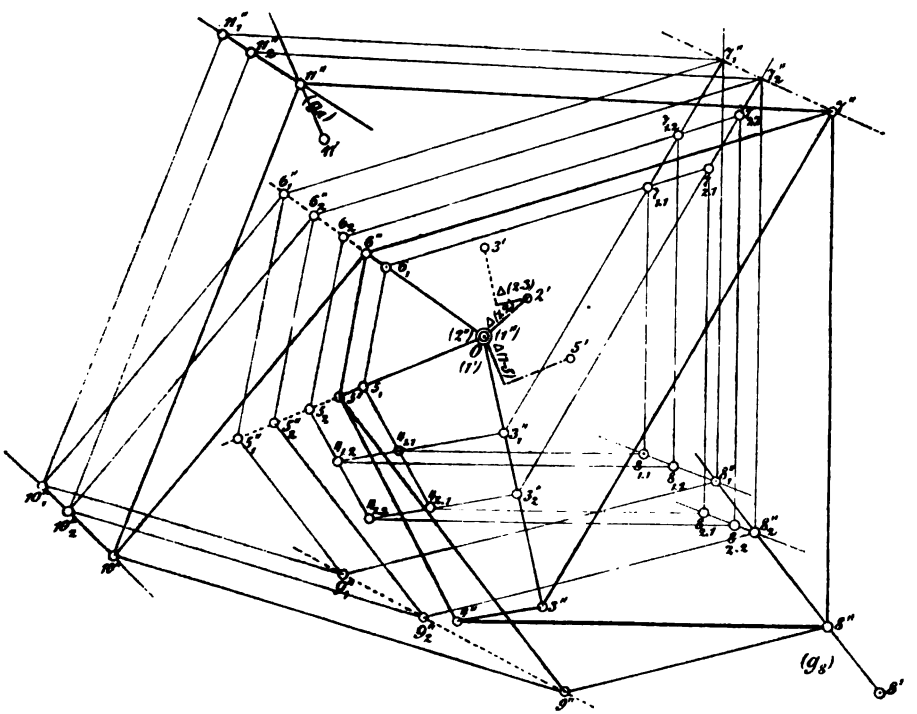


Fig 58 b.

errichteten Lothe sind die Oerter von 3′ beziehungsweise 5′. Werden die Punkte 3′ und 5′ vorläufig willkürlich angenommen, wird also gewissermaassen zunächst vorausgesetzt, es seien die Knoten 3 und 5 (statt 8 und 11) in festen, den Polstrahlen $O\,3'$ und $O\,5'$ parallelen Geraden geführt, so lassen sich die Punkte 4′, 6′, 7′, 8′, 9′, 10′, 11′ schrittweise bestimmen, da 4 durch zwei Stäbe mit 3 und 5 verbunden ist, desgleichen 6 mit 2 und 5, u. s. f.

Jetzt hebe man die Führung der Punkte 3 und 5 wieder auf, und drehe die Stäbe 2—3 und 1—5 so um die in Ruhe bleibenden Gelenke 1 und 2, dass 8 eine Verschiebung $8''\,O$ erfährt, die, mit $O\,8'$ zusammengesetzt, eine zur Führung $8_0\,8_0$ parallele Verschiebung $8''\,8'$ ergiebt und ebenso für den Punkt 11 eine zu 11_0—11_0 parallele Gesammtverschiebung $11''\,11'$ erhalten wird. Behufs Darstellung dieser Bewegung zeichne man im Plane Fig. 58 b eine Figur $1''$—$2''$—$3''$—$4''$ . . . $8''$ . . . $11''$, deren Seiten rechtwinklig zu den ihnen entsprechenden Stäben des Fachwerks 1—2—3—4 . . . 8 . . . 11 sind, deren Punkte $1''$, $2''$ mit O zusammenfallen, und deren Punkte $8''$, $11''$ in gegebenen Geraden (g_8) bezieh. (g_{11}) liegen. Die zu 8_0—8_0 parallele (g_8) ist durch den Punkt 8′ bestimmt, die zu 11_0=11_0 parallele (g_{11}) durch den Punkt 11′. Diese rein geometrische Aufgabe lässt sich mit Hilfe des folgenden (bereits im ersten Bande mehrfach benutzten) Satzes der Geometrie der Lage lösen.

> *Aendert ein n-Eck in der Weise seine Form, dass sämmtliche Seiten desselben durch feste Punkte einer und derselben Geraden gehen (die im vorliegenden Falle die unendlich ferne Gerade ist) während n — 1 Eckpunkte gerade Linien beschreiben, so bewegt sich auch der letzte Endpunkt in einer Geraden.*

Man nehme auf der zum Stabe 2—3 rechtwinkligen Geraden $O\,3''$ zunächst zwei beliebige Punkte $(3_1'', 3_2'')$ versuchsweise an, ebenso auf der zu 1—5 rechtwinkligen $O\,5''$ zwei beliebige Punkte $(5_1, 5_2)$, ziehe durch $3_1''$ und $3_2''$ gerade Linien rechtwinklig zum Stabe 3—4 und bestimme auf denselben die Schnittpunkte $4_{1\cdot1}$, $4_{1\cdot2}$, $4_{2\cdot1}$, $4_{2\cdot2}$ der durch 5_1 und 5_2 rechtwinklig zu 5—4 gelegten Geraden. Es sind dann

$[O, 3_1'', 4_{1\cdot1}, 5_1]$; $[O, 3_1'', 4_{1\cdot2}, 5_2]$; $[O, 3_2'', 4_{2\cdot1}, 5_1]$; $[O, 3_2'', 4_{2\cdot2}, 5_2]$

vier versuchsweise Lösungen für das verlangte Viereck O, $3''$, $4''$, $5''$.

Der ersten Lösung entsprechen die Punkte 6_1, $7_{1\cdot1}$, $8_{1\cdot1}$,
„ zweiten „ „ „ „ 6_2, $7_{1\cdot2}$, $8_{1\cdot2}$,
„ dritten „ „ „ „ 6_1, $7_{2\cdot1}$, $8_{2\cdot1}$,
„ vierten „ „ „ „ 6_2, $7_{2\cdot2}$, $8_{2\cdot2}$.

Die Bestimmung von 6_1, $7_{1\cdot1}$, $8_{1\cdot1}$ erfolgt der Reihe nach mittels:

5_1—$6_1 \perp 5$—6, O—$6_1 \perp 2$—6, 6_1—$7_{1\cdot1} \perp 6$—7, $3_1''$—$7_{1\cdot1} \perp 3$—7,
$7_{1\cdot1}$—$8_{1\cdot1} \perp 7$—8, $4_{1\cdot1}$—$8_{1\cdot1} \perp 4$—8,

und in gleicher Weise findet man 6_2, ... $8_{2\cdot2}$.

In den Punkten, in denen die Geraden $8_{1\cdot1}$—$8_{1\cdot2}$ und $8_{2\cdot1}$—$8_{2\cdot2}$ die gegebene (g_8) schneiden, erhält man die zu $(3_1'', 3_2'')$ gehörenden Lösungen $(8_1'', 8_2'')$ und kann nun in der Geraden $7_{1\cdot1}$—$7_{1\cdot2}$ den Punkt $7_1''$ bestimmen, in der Geraden $7_{2\cdot1}$—$7_{2\cdot2}$ den Punkt $7_2''$, hierauf $6_1''$, $6_2''$ und $5_1''$, $5_2''$. (Die Ermittelung von $4_1''$ und $4_2''$ ist überflüssig.)

Weiter lässt sich jetzt angeben:

$9_1''$ mittels $8_1''$— $9_1'' \perp$ 8— 9 und $5_1''$— $9_1'' \perp$ 5— 9
$10_1''$ „ $9_1''$—$10_1'' \perp$ 9—10 „ $6_1''$—$10_1'' \perp$ 6—10
$11_1''$ „ $10_1''$—$11_1'' \perp$ 10—11 „ $7_1''$—$11_1'' \perp$ 7—11

und ebenso $9_2''$, $10_2''$, $11_2''$, worauf $11''$ bestimmt ist als Schnittpunkt der Geraden $11_1''$—$11_2''$ mit der zur Führung 11_0—11_0 parallelen g_{11}. Hat man aber $11''$ gefunden, so kann man auch $10''$, $9''$, $8''$, $7''$, $6''$, $5''$, $4''$, $3''$ ermitteln, denn es liegen $10_1''$, $10_2''$, $10''$ in einer Geraden, desgleichen $9_1''$, $9_2''$, $9''$ u. s. w.

Die mitgetheilte Lösung gilt für jedes m und n und bezieht sich auch auf gegliederte Scheiben von der in Abschnitt XIV des ersten Bandes beschriebenen Art. Wird die Führung des Knotens 11 durch einen Stab ersetzt, der 11 mit 1 verbindet, so liegt $11''$ auf einer zum Stabe 11—1 rechtwinkligen Geraden, deren Abstand von $11'$ gleich der Längenänderung dieses Stabes ist. (Vergl. Beispiel 4, worin der Ort von $8''$ auf diese Weise bestimmt wurde.) Auch wenn an die Stelle der Stäbe gegliederte Scheiben treten, führt das entwickelte Verfahren zum Ziele.

Zu einer anderen, ebenfalls allgemeinen Lösung führt die folgende Betrachtung.

Beseitigt man wie vorhin die Stützungen der Punkte 8 und 11 (Fig. 58a), nimmt dafür aber an, es sei jeder der Knoten 8 und 5 mit einem ausserhalb des Fachwerks liegenden festen Punkte durch einen Stab verbunden, und legt man diesen Stäben (die zur Unterscheidung von den wirklichen Fachwerkstäben als *gedachte* bezeichnet werden mögen) beliebige Längenänderungen Δx und Δy bei, so lassen sich die Verschiebungen sämmtlicher Knotenpunkte durch wiederholte Lösung der ersten Hauptaufgabe (No. 32) bestimmen. Punkt 8 wird sich im allgemeinen von der Führung 8_0—8_0 entfernen; die Projektion seiner Verschiebung auf eine zu 8_0—8_0 rechtwinklige Gerade wird einen endlichen Werth δ_8 annehmen, und ebenso wird sich auch für die Projektion der Verschiebung von 11 auf eine zu 11_0—11_0 rechtwinklige Gerade ein endlicher Werth δ_{11} ergeben.

Zwischen δ_8, δ_{11} und den Aenderungen der Stablängen bestehen nach No. 4 Beziehungen ersten Grades, die sich auf die Form

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \delta_8 = \alpha_8 \Delta x + \beta_8 \Delta y + \delta_8' \\ \delta_{11} = \alpha_{11} \Delta x + \beta_{11} \Delta y + \delta_{11}' \end{cases}$$

bringen lassen, worin δ_8' und δ_{11}' von den Längenänderungen der wirklichen Stäbe abhängig sind und diejenigen Werthe bezeichnen, welche δ_8 und δ_{11} für den Fall annehmen, dass die beiden gedachten Stäbe starr vorausgesetzt werden (Zustand $\Delta x = 0$ und $\Delta y = 0$). Verschwinden auch die Längenänderungen der wirklichen Stäbe (was kurz durch $\Delta s = 0$ angedeutet werden soll) so ergiebt sich $\delta_8' = 0$, $\delta_{11}' = 0$.

Weiter bedeuten:

α_8, α_{11} die Werthe von δ_8, δ_{11} für den Zustand: $\Delta x = 1$, $\Delta y = 0$, $\Delta s = 0$;
β_8, β_{11} „ „ „ δ_8, δ_{11} „ „ „ $\Delta x = 0$, $\Delta y = 1$, $\Delta s = 0$;

und es können somit die sechs Koefficienten der rechten Seiten der Gleichungen I mit Hilfe von drei Verschiebungsplänen, welche den drei angeführten Zuständen entsprechen, bestimmt werden, worauf die Bedingungen: $\delta_8 = 0$ und $\delta_{11} = 0$, d. h.

$$\begin{aligned} \alpha_8 \Delta x + \beta_8 \Delta y + \delta_8' &= 0 \\ \alpha_{11} \Delta x + \beta_{11} \Delta x + \delta_{11}' &= 0 \end{aligned}$$

diejenigen Längenänderungen Δx und Δy liefern, welche den beiden gedachten Stäben zugeschrieben werden müssen.

Es leuchtet ein, dass sich auf diesem Wege die Ermittlung der Verschiebungen der Knoten jedes statisch bestimmten Fachwerks auf die wiederholte Lösung der ersten Hauptaufgabe und die Auflösung einer Gruppe von Gleichungen ersten Grades zurückführen lässt.

§ 2.

Darstellung der Formveränderung von Stabzügen mit gelenkartigen Knoten.

39. — Werden gerade Stäbe so aneinander gereiht, dass jeder Stab nur mit dem vorhergehenden und dem nachfolgenden zusammenhängt, so entsteht ein Gebilde, welchem wir den Namen *Stabzug* beilegen. Die Knotenpunkte bezeichnen wir mit den Ziffern 0, 1, 2, . . . $(m-1)$, m, $(m+1)$, . . . n, die Stablängen mit s_1, s_2, . . . s_m, . . . s_n und die Winkel, welche die Mittellinien aufeinander folgender Stäbe einschliessen, mit ϑ_1, ϑ_2, . . . ϑ_m, . . . ϑ_{n-1}. Fig. 59.

Greifen alle äusseren Kräfte in den Knotenpunkten an, und sind die Stäbe durch reibungslose Gelenke miteinander verbunden — was

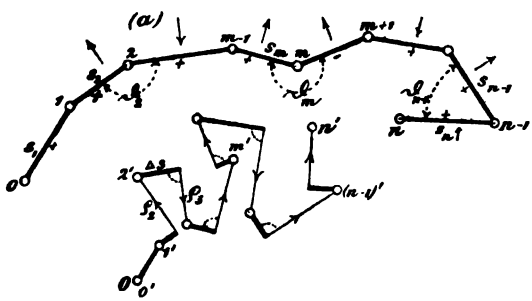


Fig. 59.

beides hier vorausgesetzt werden möge — so wird jeder Stab nur auf Zug oder Druck beansprucht; seine Mittellinie bleibt gerade, und die gegenseitigen Verschiebungen der Knotenpunkte des Gebildes sind bestimmt durch die Aenderungen Δs_1, Δs_2, . . ., $\Delta\vartheta_1$, $\Delta\vartheta_2$, . . . der Längen s und Winkel ϑ. Eine übersichtliche Darstellung dieser Verschiebungen ist u. A. von Werth für die Theorie des Fachwerks, dessen Knotenpunkte häufig durch Stabzüge mit leicht zu berechnenden Winkeländerungen $\Delta\vartheta$ verbunden werden können.

Zunächst werde angenommen, es seien sämmtliche Δs und $\Delta\vartheta$ bekannt, auch werde vorausgesetzt, dass die Richtung der Achse irgend

eines Stabes und ein Punkt dieser Achse festliegen, beispielsweise die Richtung des Stabes s_1 und der Knotenpunkt 0. Die übrigen Stäbe (s_2, s_3, ... s_m, ... s_n) werden sich um gewisse Winkel ψ_2, ψ_3, ... ψ_m, ... ψ_n drehen, und zwar ist:

$$\psi_2 = \Delta\vartheta_1;\ \psi_3 = \psi_2 + \Delta\vartheta_2;\ \ldots;\ \psi_m = \psi_{m-1} + \Delta\vartheta_{m-1};\ \ldots$$

Wir betrachten nun einen beliebigen Stab s, dessen Endpunkte die Ordnungsziffern a und b tragen mögen. Fig. 60. Der Weg aa' des Punktes a sei gegeben. Behufs Bestimmung der neuen Lage b' des

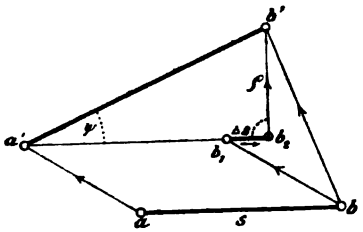


Fig. 60a.

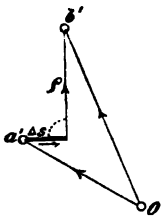


Fig. 60b.

Punktes b verschieben wir den Stab ab parallel mit sich selbst in die Lage $a'b_1$, ändern seine Länge um das gegebene Maass $\overline{b_1 b_2} = \Delta s$ und drehen ihn schliesslich um den gegebenen Winkel ψ. Hierbei beschreibt b_2 den Kreisbogen

$$\overline{b_2 b'} = (s + \Delta s)\ \psi,$$

der aber — wegen der Beschränkung unserer Untersuchung auf sehr kleine Verschiebungen — durch ein in b_2 auf $a'b_2$ errichtetes Loth von der Länge

$$\rho = s\psi$$

ersetzt werden darf.

Es empfiehlt sich nun, die Knotenpunktsverschiebungen (wie im § 1) in einer besonderen Figur und in gehöriger Vergrösserung von einem beliebig gewählten Pole O aus aufzutragen, so zwar, dass jede Verschiebung nach Grösse, Richtung und Sinn durch einen *vom* Pole *aus*gehenden Strahl dargestellt wird. In Fig. 60b bezeichnet Oa' die gegebene Verschiebung des Punktes a; an diese wurde die dem Stabe s parallele Strecke Δs angetragen und hieran die zu s rechtwinklige Strecke ρ; es stellt dann der Strahl Ob' die gesuchte Verschiebung des Punktes b vor.

Auf diese Weise sind in Fig. 59b die Verschiebungen der Knotenpunkte des in der Fig. 59a abgebildeten Stabzuges schrittweise ermittelt worden. Die Werthe Δs und $\rho = s\psi$ wurden in der Reihenfolge

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \rho_2,\ \Delta s_3,\ \rho_3, \ldots,\ \Delta s_m,\ \rho_m, \ldots,\ \Delta s_n,\ \rho_n$$

nach Grösse, Richtung und Sinn aneinander gesetzt, wobei allgemein $\Delta s_m \parallel s_m$, $\rho_m \perp s_m$. Anstatt der Zeichen Δs_1, Δs_2, ... wurden die kürzeren $\Delta 1$, $\Delta 2$, ... gebraucht. Die (in der Figur nicht ausgezogenen) Polstrahlen $O1'$, $O2'$, $O3'$, ... stellen nach Grösse, Richtung und Sinn die gesuchten Verschiebungen der Knoten 1, 2, 3 ... dar. In Fig. 59 geben kleine Pfeile den Drehungssinn der einzelnen Stäbe an. Einem positiven ψ entspricht im vorliegenden Falle eine Drehung nach links, einem negativen eine Drehung nach rechts. Die an die Stäbe gesetzten (+) und (—) bedeuten die Vorzeichen der entsprechenden Δs. Die ein (+) tragenden Stäbe werden gedehnt, die übrigen verkürzt.

Wird der Stabzug in einer anderen als der eben vorausgesetzten Art gestützt, so nehme man zuerst die Richtung irgend einer Stabachse und einen Punkt derselben als festliegend an, zeichne den Verschiebungsplan auf die beschriebene Weise und ertheile hierauf dem nunmehr als starres Ganzes zu betrachtenden Gebilde eine Bewegung, durch welche die wirklichen Auflagerbedingungen befriedigt werden. Die Verschiebungen, welche die Knotenpunkte in Folge dieser zweiten Bewegung erfahren, werden — genau wie im § 1 (No. 33) — durch Strahlen $m''O$ dargestellt, die *nach* dem Pole hinzeigen, und deren Zusammensetzung mit den Strahlen Om' die Gesammtverschiebungen $m''m'$ liefern (Fig. 36, S. 60).

Wir werden die Ergebnisse der vorstehenden Betrachtungen hauptsächlich auf die Darstellung der Formänderungen von gegliederten Scheiben anwenden, die sich in Dreiecke zerlegen lassen. Die Winkel $\sphericalangle$, zwischen den aufeinander folgenden Seiten der die Knotenpunkte derartiger Scheiben verbindenden Stabzüge sind entweder Dreieckswinkel, oder sie setzen sich aus solchen zusammen, und es erfordert daher die Berechnung der $\Delta\sphericalangle$ nur die Lösung der folgenden, auch für spätere Untersuchungen sehr wichtigen Aufgabe:

40. — Zweite Hauptaufgabe. Gegeben seien die Aenderungen Δs_1, Δs_2, Δs_3 der Seitenlängen s_1, s_2, s_3 eines Dreiecks ABC, gesucht die Aenderungen $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ der Winkel α_1, α_2, α_3. Fig. 61a.

Zu einer sehr einfachen Darstellung der $\Delta\alpha$ gelangt man mit Hilfe eines Williot'schen Verschiebungsplanes. Man nehme A und die Richtung der Seite AB als festliegend an. Dann fällt A' mit dem Pole O zusammen (Fig. 61b) und $A'B' = \Delta s_3$ giebt die Verschiebung von B an. In A' und B' trage man die Strecken Δs_2 und Δs_1 an und errichte auf diesen in ihren Endpunkten Lothe, deren Schnittpunkt C' die Verschiebung OC' von C bestimmt. Denkt man sich nun den Punkt C'

auf dem in No. 39 beschriebenen Wege mittels der dem Stabe s_2 entsprechenden Werthe Δs_2 und $\rho_2 = s_2 \psi_2$ gefunden, so erkennt man,

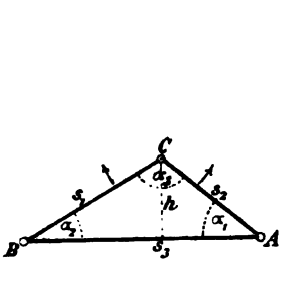


Fig. 61a.

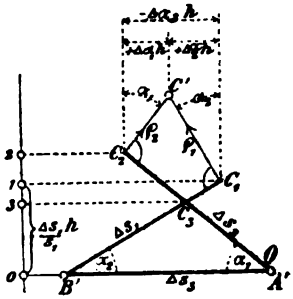


Fig. 61b.

dass das Loth $\overline{C'C_2}$ von C' auf Δs_2 gleich ρ_2 ist. Der Stab s_2 dreht sich aber, da s_3 festliegt, um $\Delta\alpha_1$; es ergiebt sich daher:

$$\overline{C'C_2} = \rho_2 = s_2 \Delta\alpha_1,$$

und ebenso findet man (indem man den Pol von A' nach B' verlegt, also B als ruhend ansieht):

$$\overline{C'C_1} = \rho_1 = s_1 \Delta\alpha_2.$$

Wir bezeichnen nun den Schnittpunkt von Δs_1 und Δs_2 mit C_3, errichten in einem beliebigen Punkte 0 der $A'B'$ auf dieser Geraden ein Loth, ziehen durch C_1, C_2, C_3 Parallelen zu $A'B'$, welche jenes Loth in 1, 2, 3 schneiden und erhalten:

$$\overline{0\,1} : \Delta s_1 = h : s_1; \quad \overline{0\,1} = \Delta s_1 \frac{h}{s_1}; \quad \overline{0\,2} = \frac{\Delta s_2}{s_2} h; \quad \overline{0\,3} = \frac{\Delta s_3}{s_3} h,$$

wo h die zu AB rechtwinklige Höhe des Dreiecks ABC bedeutet.

Weiter projiciren wir die Strecken $\overline{C_2C'}$ und $\overline{C_1C'}$ auf eine zur $A'B'$ parallele Gerade und finden für die Projektionen die Werthe: $\overline{C_2C'} \sin\alpha_1 = \rho_2 \sin\alpha_1 = s_2 \sin\alpha_1 \Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_1 h$ und $\overline{C_1C'} \sin\alpha_2 = \Delta\alpha_2 h$, deren algebraische Summe $= -\Delta\alpha_3 h$ ist, weil die Summe der Dreieckswinkel auch nach der Formänderung 180° beträgt, mithin

$$\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_3 = 0 \text{ ist.}$$

Ersetzt man in Fig. 61b die Längenänderungen Δs_1, Δs_2, Δs_3 durch die Verhältnisszahlen $\frac{\Delta s_1}{h}$, $\frac{\Delta s_2}{h}$, $\frac{\Delta s_3}{h}$ (welche nach einem *Zahlen*maassstabe durch Strecken dargestellt werden), so liefert diese Figur die Werthe $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$.

Es braucht übrigens nur das durch die Punkte 1, 3, 2 bestimmte Viereck $C_1 C_3 C_2 C'$ gezeichnet zu werden. 3 wird beliebig gewählt; 1 und 2 haben von 3 die Abstände:

$$\overline{3\,1} = \frac{\Delta s_1}{s_1} - \frac{\Delta s_3}{s_3}; \quad \overline{2\,3} = \frac{\Delta s_2}{s_2} - \frac{\Delta s_3}{s_3}.$$

Behufs Vermeidung von Fehlern bei der Feststellung von Vorzeichen der $\Delta\alpha$, versehe man die Strecken $C_2 C'$ und $C_1 C'$ mit Pfeilen, die nach C' hinzeigen. Diese Pfeile geben an, in welchem Sinne sich die Seiten s_2 und s_1 gegen die Seite s_3 drehen. In dem in der Figur dargestellten Falle dreht sich s_2 nach rechts, s_1 nach links; $\Delta\alpha_1$ und $\Delta\alpha_2$ sind also positiv, während sich für $\Delta\alpha_3$ ein negativer Werth ergiebt.

Aus der Fig. 61b, deren Längenabmessungen wir uns durch h dividirt denken, lässt sich auch eine einfache Formel ableiten. Es ist nämlich:

$$-\Delta\alpha_3 = \overline{C_2 C_3}\cos\alpha_1 + \overline{C_3 C_1}\cos\alpha_2$$

$$\overline{C_2 C_3} = \left(\frac{\Delta s_2}{s_2} - \frac{\Delta s_3}{s_3}\right)\frac{1}{\sin\alpha_1}; \quad \overline{C_3 C_1} = \left(\frac{\Delta s_1}{s_1} - \frac{\Delta s_3}{s_3}\right)\frac{1}{\sin\alpha_2}$$

und es folgt daher:

$$(1) \qquad \Delta\alpha_3 = \left(\frac{\Delta s_3}{s_3} - \frac{\Delta s_1}{s_1}\right)\operatorname{cotg}\alpha_2 + \left(\frac{\Delta s_3}{s_3} - \frac{\Delta s_2}{s_2}\right)\operatorname{cotg}\alpha_1.$$

Sind die Längenänderungen lediglich Folge von Spannkräften S_1, S_2, S_3, welche die Spannungen

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{F_1}; \quad \sigma_2 = \frac{S_2}{F_2}; \quad \sigma_3 = \frac{S_3}{F_3}$$

erzeugen, so hat man

$$\frac{\Delta s_1}{s_1} = \frac{\sigma_1}{E_1}; \quad \frac{\Delta s_2}{s_2} = \frac{\sigma_2}{E_2}; \quad \frac{\Delta s_3}{s_3} = \frac{\sigma_3}{E_3}.$$

Bei gleich grossen Elasticitätsziffern (E) ergiebt sich

$$(2) \qquad \begin{cases} E\Delta\alpha_3 = (\sigma_3 - \sigma_1)\operatorname{cotg}\alpha_2 + (\sigma_3 - \sigma_2)\operatorname{cotg}\alpha_1 \\ E\Delta\alpha_2 = (\sigma_2 - \sigma_3)\operatorname{cotg}\alpha_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\operatorname{cotg}\alpha_3 \\ E\Delta\alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{cotg}\alpha_3 + (\sigma_1 - \sigma_3)\operatorname{cotg}\alpha_2. \end{cases}$$

In diesem Falle ist es zweckmässig, die Werthe $E\Delta\alpha$ (an Stelle der $\Delta\alpha$) durch Zeichnung darzustellen, also in Fig. 61b die $\frac{\Delta s}{s}h$ durch die entsprechenden σ zu ersetzen. Man gelangt dann zu dem in der Fig. 62 angegebenen Verfahren, das einer weiteren Erläuterung nicht mehr bedarf. Zu achten ist auf die Vorzeichen der Spannungsunterschiede $\sigma_1 - \sigma_3$ und $\sigma_2 - \sigma_3$. In Fig. 62b wurden beide Werthe positiv an-

genommen, in Fig. 62c der erstere positiv, der andere negativ. In letzterer Figur C_3 mit 3 zusammenfallend gewählt. Hinsichtlich der Vorzeichen der Winkeländerungen stimmt Fig. 62b mit Fig. 61b überein.

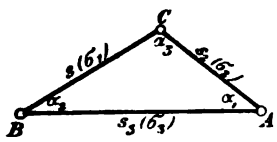


Fig. 62a.

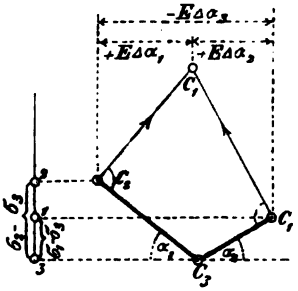


Fig. 62b.

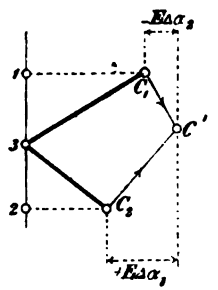


Fig. 62c.

In dem in der Fig. 62c dargestellten Falle erfährt sowohl s_1 als auch s_2 eine Drehung nach rechts; es ist mithin $\Delta\alpha_2$ negativ, $\Delta\alpha_1$ positiv.

Will man die Werthe $E\Delta\alpha$ *berechnen*, so führt man zweckmässig die Hilfsgrössen ein:

$\omega_1 = \operatorname{cotg}\alpha_1\,(\sigma_2 - \sigma_3)$; $\omega_2 = \operatorname{cotg}\alpha_2\,(\sigma_3 - \sigma_1)$; $\omega_3 = \operatorname{cotg}\alpha_3\,(\sigma_1 - \sigma_2)$

und hat dann:

$$E\Delta\alpha_1 = \omega_3 - \omega_2;\quad E\Delta\alpha_2 = \omega_1 - \omega_3;\quad E\Delta\alpha_3 = \omega_2 - \omega_1.$$

Zur besseren Übersicht schreibe man auf jede Dreieckseite die betreffende Spannung und in jeden Winkel dessen Cotangente, wie dies Fig. 63 angiebt. Für das dort dargestellte (mit dem Dreieck 11—12—18 des auf Tafel 2 abgebildeten Fischbauchträgers übereinstimmende) Dreieck, in dessen Seiten die Spannungen:

$$-141,\ +463,\ -17\ \textit{klgr}\ \text{f. d. } \textit{qcm}$$

herrschen, erhält man:

$\omega_1 = 0{,}496\,(+463 + 17) = +238$;
$\omega_2 = 1{,}079\,(-17 + 141) = +134$;
$\omega_3 = 0{,}295\,(-141 - 463) = -178$;

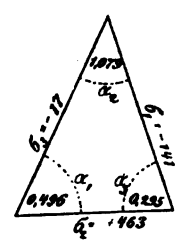


Fig. 63.

$E\Delta\alpha_1 = -178 - 134 = -312^{k}$ f. d. *qcm*; $E\Delta\alpha_2 = +238 + 178 = +416$
$E\Delta\alpha_3 = 134 - 238 = -104$.

Sehr zweckmässig ist es auch, die Werthe ω zeichnerisch zu ermitteln und hierzu ein in möglichst grossem Maassstabe angefertigtes Trägernetz zu benutzen. Fig. 64 (Tafel 2, welche zwei Dreiecke des auf dieser Tafel abgebildeten Fischbauchträgers darstellt) giebt eine Anordnung an, die recht übersichtlich ist. Die auf den Stäben stehenden rothen Zahlen bedeuten die Spannungen in *klgr* f. d. *qcm*. Die Spannungsunterschiede in den die Winkel α_1, α_2, α_3 einschliessenden Seiten sind für das Dreieck *I*:

$$+463 + 17 = +480;\quad -17 + 141 = +124;\quad -141 - 463 = -604$$

und für das Dreieck *II*:

$$-128 + 141 = +13;\quad -141 + 576 = +435,\quad -576 + 128 = -448;$$

dieselben werden beziehungsweise mit cotg α_1, cotg α_2, cotg α_3 multiplicirt. Die Ergebnisse sind für das Dreieck *I*:

$$\omega_1 = +238; \quad \omega_2 = +134; \quad \omega_3 = -178$$

und für das Dreieck *II*:

$$\omega_1 = +13; \quad \omega_2 = +177; \quad \omega_3 = -183.$$

Die Strecken, welche diese Werthe ω darstellen, wurden in Fig. 64 durch Doppellinien bezeichnet. Der Spannungsmaassstab lautet: $4^{mm} = 100^k$ f. d. *qcm*; nur für ω_1 im Dreieck *II* wurde der Maassstab $1^{mm} = 1^k$ f. d. *qcm* gewählt.

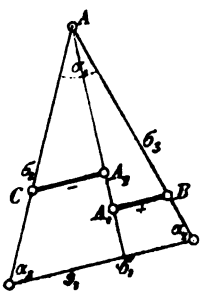


Fig. 65.

Ist für jedes Dreieck nur *eine* Winkeländerung $\Delta\alpha$ zu bestimmen [ein Fall, der vorliegt, wenn das Fachwerk in Fig. 77 (Seite 95) durch den mittels kräftiger Linien angedeuteten Stabzug ersetzt werden soll] so gewährt die folgende Darstellungsweise die beste Uebersicht. Vom Scheitel *A* Fig. 65 des fraglichen Winkels α_1 wird auf die gegenüberliegende Seite ein Loth gefällt, und auf diesem werden die absoluten Werthe der Spannungsunterschiede aufgetragen, indem

$$\overline{AA_1} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad \text{und} \quad \overline{AA_2} = \sigma_1 - \sigma_2$$

gemacht wird. Zieht man nun $A_1B \parallel s_1$, ebenso $A_2C \parallel s_1$, so ist $\overline{A_1B} = (\sigma_1 - \sigma_3)$ cotg α_3 und $\overline{A_2C} = (\sigma_1 - \sigma_2)$ cotg α_2. Die Vorzeichen werden an die Strecken geschrieben. In Fig. 65 ist $\sigma_1 > \sigma_3$ und $\sigma_2 > \sigma_1$ vorausgesetzt worden. Dann folgt:

$$E\Delta\alpha_1 = \overline{A_1B} - \overline{A_2C}.$$

Temperaturänderungen können nach Seite 2 durch Vergrösserung der Spannungen $\sigma = \frac{S}{F}$ um εEt berücksichtigt werden. Ist beispielsweise für einen schweisseisernen Stab: $S = 20000^k$, $F = 50$ *qcm.*, also $\frac{S}{F} = 400$, und wird der Stab um 30° C. erwärmt, so ist demselben bei Ermittlung der $E\Delta\alpha$ nach dem zuletzt beschriebenen Verfahren eine Spannung $\sigma = 400 + \varepsilon Et = 400 + 22 \cdot 30 = 1060^k$ f. d. *qcm* zuzuschreiben, wobei $\varepsilon = 0{,}000012$ und $E = 1800000$ angenommen wurden. Im Falle einer Abkühlung um 30° erhält man $\sigma = 400 - 22 \cdot 30 = -260$.

41. Untersuchung der Formänderung eines Fachwerkbalkens. Zahlenbeispiel. (Figuren auf Tafel 2.) Es sollen die Verschiebungen der Knotenpunkte der unteren Gurtung des auf Tafel 2 abgebildeten Hauptträgers einer zweigleisigen Eisenbahnbrücke für die in Fig. 66 angegebene Probebelastung bestimmt werden.*) Die durch diese Belastung erzeugten Spannkräfte sind in Fig. 67 auf folgende Weise ermittelt worden.

Mit beliebiger Polweite *H* wurde in Fig. 66 zu den Achsenbelastungen eine Seillinie gezeichnet und in diese ein Polygon *I II III . . . X*

*) Bei Belastungsproben handelt es sich stets um die Ermittlung der von der beweglichen Belastung allein hervorgerufenen Durchbiegungen.

einbeschrieben, dessen Ecken den in der oberen Gurtung liegenden Angriffspunkten 0, 2, 4, ... 18, 20 der Zwischenträger entsprechen. Hierauf wurden in Fig. 67 mittels eines Büschels, dessen Strahlen *I*, *II*, . . . *X* parallel den gleichbezeichneten Polygonseiten sind, auf einer vom Mittelpunkte *O* des Büschels um *H* entfernten Senkrechten die Knotenlasten P_2, P_4, P_6, ... P_{18} abgeschnitten und durch einen zur Schlusslinie des Seilpolygons parallelen Strahl *s* die an den Stützpunkten 0 und 20 angreifenden Auflagerdrücke *A* und *B* bestimmt. Schliesslich wurde ein Cremona'scher Kräfteplan gezeichnet. In demselben bedeuten:

O_1, O_3, O_5, . . . die Spannkräfte der oberen Gurtung,
U_1, U_2, U_4, . . . „ „ „ unteren „
D_2, D_3, D_4, . . . „ „ „ Füllungsstäbe.

Die Figuren 68 und 69 bieten eine übersichtliche Zusammenstellung der Stablängen (in *cm*), Querschnittsinhalte (*qcm*), Spannkräfte (*Tonnen*) und Spannungen (*kilogr.* f. d. *qcm*). Die in den Figuren 70 bis 75 abgebildeten Querschnitte wurden voll gerechnet; die Elasticitätsziffer wurde (für Schweisseisen) $= 1\,800\,000^k$ f. d. *qcm* angenommen.

Der Füllungsstab 1—2 erhält den Querschnitt: Fig. 72 mit $F = 52$ *qcm*
Die Füllungsst. 2—3, 3—4 erhalten „ Fig. 73 „ $F = 60$ „
„ „ 4—5, 5—6, 6—7, 7—8 „ Fig. 74 „ $F = 68$ „
„ „ 8—9, 9—10 „ Fig. 75 „ $F = 90$ „

Fig. 76 zeigt den Verschiebungsplan der einen Stabzug bildenden unteren Gurtung. Die nach No. 40 ermittelten Werthe $E\Delta\alpha$ der an dieser Gurtung liegenden Dreieckswinkel α sind in die betreffenden Winkel eingeschrieben worden; sie bestimmen die Aenderungen $\Delta\vartheta$ der Stabzugswinkel ϑ. Zuerst wurde der Knoten 9 und die Richtung des Stabes 7—9 festliegend, der Stabzug aber sonst frei angenommen. Es entspricht dann:

dem Stabe 7—5 der Werth $E\psi_{7-5} = E\Delta\vartheta_7 = +212+363+294$
$= +869^k$ f. d. *qcm*.
„ „ 5—3 „ „ $E\psi_{5-3} = +869+(301+439+426)$
$= +2035$,
„ „ 3—1 „ „ $E\psi_{3-1} = 2035+(447+541+412)$
$= +3435$,
„ „ 1—0 „ „ $E\psi_{1-0} = 3435+(2170+926)$
$= +6531$,

und ebenso ergeben sich für die rechts an 9 sich schliessenden Stäbe der Reihe nach die Werthe:

$$E\psi = 850;\quad 1754;\quad 2433;\quad 3421;\quad 4943;\quad 8389.$$

Alle auf der linken Seite des ruhenden Stabes 7—9 befindlichen Stäbe erfahren eine Drehung nach rechts, die auf der rechten Seite eine Drehung nach links.

Für den Stab 0 — 1 erhält man nun

$$\rho_{0-1} = s \cdot \psi = \frac{s \cdot E\psi}{E} = 271^{cm} \frac{6531}{1800000} = 0{,}983^{cm} = 9{,}83^{mm}$$

für den folgenden Stab: $\rho = 6{,}21^{mm}$ u. s. f. Diese Werthe wurden in Fig. 66 (in Klammern) an die einzelnen Stäbe geschrieben; desgleichen wurden die Längenänderungen $\Delta s = \frac{Ss}{EF} = \frac{\sigma s}{E}$ angegeben. Für den Stab 0—1 ergiebt sich z. B.: $\Delta s_{0-1} = \frac{478 \cdot 271}{1800000} = 0{,}072^{cm} = 0{,}72^{mm}$.

Nach Erledigung dieser Rechnungen konnte der Verschiebungsplan aufgetragen werden. An die Strecke $7' - 9' = \Delta s_{7-9} = 0{,}94^{mm}$ (Maassstab 2 : 1) wurden links der Reihe nach angetragen:

$\Delta s_{7-5} = 0{,}98^{mm}$, $\rho_{7-5} = 1{,}77^{mm}$, $\Delta s_{5-3} = 1{,}00^{mm}$, $\rho_{5-3} = 4{,}25^{mm}$, u. s. w.

und rechts die Strecken:

$\Delta s_{9-11} = 0{,}95^{mm}$, $\rho_{9-11} = 1{,}70^{mm}$, $\Delta s_{11-13} = 0{,}93^{mm}$, $\rho_{11-13} = 3{,}53^{mm}$, u. s. f.

Die Endpunkte der Strecken ρ_{7-5}, ρ_{5-3}, . . . bestimmen die Punkte $5'$, $3'$, ..., denjenigen von ρ_{9-11}, ρ_{11-13}, . . . die Punkte $11'$, $13'$, . . .

Schliesslich wurde zur Erfüllung der wirklichen Auflagerbedingungen geschritten und die dem Stabzuge 0 — 1 — 3 — 5 . . . 19 — 20 ähnliche Figur $0'' - 1'' - 3'' - 5'' \ldots 19'' - 20''$ gezeichnet. Der Punkt $0''$ fällt mit $0'$ zusammen, weil Knoten 0 festliegt, während $20''$ auf der Wagerechten durch $20'$ liegen muss, da der Knoten 20 auf einer wagerechten Auflagerbahn geführt wird; $0'' - 20''$ ist rechtwinklig zu 0—20.*)

Damit sind die Verschiebungen $1''$ $1'$, $3''$ $3'$, ... der Knoten 1, 3, ... nach Grösse, Richtung und Sinn bestimmt.

In Fig. 76 wurde noch die Biegungslinie der unteren Gurtung eingetragen. Die Eckpunkte 0_0, 1_0, 3_0, ... derselben liegen senkrecht unter den entsprechenden Knoten 0, 1, 3, ... und auf den

---

*) Probe: Die Verschiebung $20'' - 20'$ muss im vorliegenden Falle gleich der Summe der Längenänderungen Δs der Stäbe der oberen Gurtung sein. Da diese Stäbe gleiche Länge und gleichen Querschnitt haben, so findet man:

$$\overline{20'' - 20'} = \frac{s}{EF} \Sigma S = \frac{360 \cdot 1592000^k}{1800000 \cdot 278} = 1{,}15^{cm} = 11{,}5^{mm}.$$

Wagerechten durch die Punkte 0′, 1′, 3′, ... ; die grösste senkrechte Verschiebung (28,8^{mm}) erfährt der Knotenpunkt 9. Wird nur das Biegungspolygon gesucht, so braucht die Figur 0″—1″—2″ . . . 20″ nicht gezeichnet zu werden.

Will man die Verschiebungen sämmtlicher Knotenpunkte haben, so muss man den in Fig. 77 kräftig ausgezogenen Stabzug 0—1—2—3 . . . 18—19—20 untersuchen. In Fig. 77 sind die Längenänderungen der Stäbe (in *mm*) und in

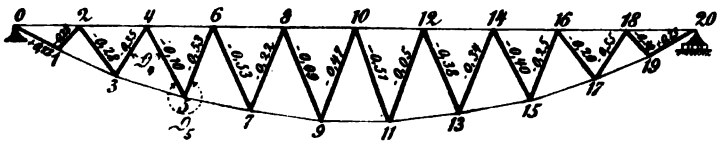


Fig. 77.

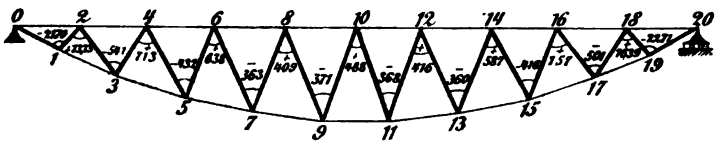


Fig. 78.

Fig. 78 die Werthe $E\Delta\alpha$ (in *klg* f. d. *qcm*) angegeben worden. Dem Leser wird empfohlen, diese Aufgabe zu lösen. Es ist zweckmässig, zuerst den Knoten 10 und die Richtung des Stabes 10 – 9 als ruhend anzusehen.

42. — Wir wollen die im Vorstehenden gelehrte Darstellungsweise der Verschiebungen kurz das *Stabzugverfahren* nennen; dasselbe liefert übersichtlichere Figuren als das Verfahren von Williot und verdient namentlich dann den Vorzug, wenn die nach Williot zur Bestimmung der Punkte m' auf den Δs zu errichtenden Lothe sich unter sehr spitzen Winkeln schneiden. Dagegen erfordert das Stabzugverfahren etwas mehr Zeit, es sei denn, dass die Winkeländerungen noch anderweitig gebraucht werden, was beispielsweise der Fall ist, wenn für ein unter der Voraussetzung gelenkartiger Knoten berechnetes, in Wirklichkeit aber vernietetes Fachwerk die von den festen Verbindungen herrührenden Spannungsänderungen nachgewiesen werden sollen — eine Aufgabe, die sich, wie in der zweiten Abtheilung dieses Bandes gezeigt werden wird, mit Hilfe der Winkeländerungen besonders einfach lösen lässt. Hierbei wird allerdings vorausgesetzt, dass diese Zusatzspannungen (welche auch *Nebenspannungen* heissen) und die Verschiebungen für ein und denselben Belastungszustand verlangt werden, ein Fall, der häufig eintritt.

Auch die Anwendung eines gemischten Verfahrens ist oft am Platze. So kann es z. B. vortheilhaft sein, bei Untersuchung der in den Figuren 50 bis 56 dargestellten Träger die für die einzelnen Scheiben erforder-

lichen Sonderpläne nach dem Stabzugverfahren zu zeichnen, während es im übrigen zweckmässig ist, den früher befolgten Weg einzuschlagen.

43. Zeichnerische Ermittlung der Werthe ρ. Wir betrachten (wie in No. 39) einen Stabzug $0-1-2-\ldots-n$ Fig. 79, dessen Knoten 0 und Stabrichtung $0-1$ festliegen und suchen die nur von den Winkeländerungen $\Delta\vartheta$ abhängigen Verschiebungen, nehmen also an, es seien sämmtliche $\Delta s = 0$. Der Verschiebungsplan besteht dann aus einem Linienzuge $O-2'-3'-\ldots-n'$, dessen Seiten $\overline{O2'} = \rho_2 = s_2\Delta\vartheta_2$, $\overline{2'3'} = \rho_3 = s_3\Delta\vartheta_3$, ... beziehungsweise rechtwinklig zu den Stäben s_2, s_3, ... sind, und der offenbar bestimmt ist, sobald die Projektionen δ_2', δ_3', ... der Verschiebungen $O2'$, $O3'$, ... auf eine Gerade AB (deren Richtung aber keiner der Stabachsen parallel sein darf, damit sie von keiner Seite ρ rechtwinklig geschnitten wird) gegeben sind.

Die Seitenverschiebungen δ' lassen sich sehr leicht finden. Dazu nehmen wir zunächst an, es ändere sich nur der Winkel ϑ_1, es drehe

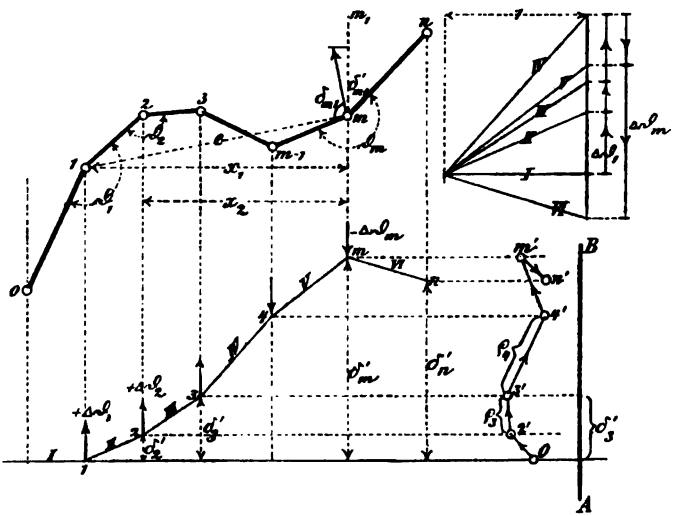


Fig. 79.

sich also der Stabzug $1-2-\ldots n$ um $\Delta\vartheta_1$. Punkt m, der vom Drehpunkte 1 den Abstand e haben möge, verschiebt sich in einer zur Geraden $1-m$ rechtwinkligen Richtung und um eine Strecke: $\delta_{m\cdot 1} = e\Delta\vartheta_1$, deren Projektion $\delta'_{m\cdot 1}$ auf die zur AB parallele mm_1 durch die Gleichung:

$$\delta'_{m\cdot 1} : \delta_{m\cdot 1} = x_1 : e$$

bestimmt ist, worin x_1 den Abstand des Knotens 1 von der Geraden mm_1 bedeutet. Man erhält:

$$\delta'_{m\cdot 1} = x_1 \Delta\vartheta_1$$

und, wenn sämmtliche Winkel die vorgeschriebenen Aenderungen $\Delta\vartheta$ erfahren:

$$(3) \qquad \delta'_m = x_1\Delta\vartheta_1 + x_2\Delta\vartheta_2 + \ldots x_{m-1}\Delta\vartheta_{m-1} = \sum_1^{m-1} x\Delta\vartheta.$$

Die Winkeländerungen $\Delta\vartheta_m$, $\Delta\vartheta_{m+1}$, ... sind ohne Einfluss auf die Bewegung von m.

Der auf der rechten Seite der Gleichung (3) stehende Ausdruck lässt sich nun deuten als *das auf den Punkt m bezogene statische Moment von Kräften* $\Delta\vartheta_1$, $\Delta\vartheta_2$ .... $\Delta\vartheta_{m-1}$, *welche in den links von m gelegenen Knotenpunkten angreifen und die Richtung AB haben*, und hieraus (und aus Band I) ergiebt sich das folgende Verfahren, die Werthe ρ durch Zeichnung zu bestimmen.

Man zeichne zu den Gewichten*) $\Delta\vartheta_1$, $\Delta\vartheta_2$, ... $\Delta\vartheta_{n-1}$ mit der Polweite 1 (*Zahlen*einheit) ein Seilpolygon, dessen erste Seite zweckmässig rechtwinklig zu AB angenommen wird. Die den Knotenpunkten 2, 3, ... m, ... n entsprechenden, parallel zu AB gemessenen Abstände des Seilpolygons von der Seite I sind dann beziehungsweise $= \delta_2'$, δ_3', ... δ_m', ... δ_n'. Zieht man also durch die Punkte 1, 2, ... m, ... n des Seilpolygons Parallelen zur Seite I und zeichnet einen Linienzug $0'2' \ldots m' \ldots n'$, dessen Ecken in jenen Parallelen liegen, und dessen Seiten rechtwinklig zu den entsprechenden Seiten des Stabzuges sind, so erhält man die Werthe:

$$\rho_2 = \overline{0'-2'},\ \rho_3 = \overline{2'-3'},\ \ldots,\ \rho_n = \overline{(n-1)'-n'}.$$

Will man diese Strecken ρ in ν-facher Vergrösserung erhalten, so ersetze man die $\Delta\vartheta$ durch die Gewichte $\nu\Delta\vartheta$ oder die Polweite 1 durch die Polweite $\frac{1}{\nu}$.

In Fig. 79 wurde angenommen, dass die Winkel ϑ_{m-1} und ϑ_m abnehmen, alle übrigen ϑ hingegen eine Vergrösserung erfahren.

Wir empfehlen dem Leser, die auf Tafel 2 in Fig. 76 angegebenen Werthe ρ durch Zeichnung zu bestimmen, und die Ergebnisse mit den durch die Rechnung gewonnenen zu vergleichen. Sollen die ρ im Maassstabe 2 : 1 erhalten werden, so sind (wenn die Polweite = 1 gewählt wird) die Knoten des im Maassstabe 1 : 300 gezeichneten Fachwerks mit den Gewichten $2 \cdot 300\,\Delta\vartheta = \frac{600 \cdot E\Delta\vartheta}{1\,800\,000} = \frac{E\Delta\vartheta}{3\,000}$ zu belasten. Dem Knoten 1 entspricht z. B. $E\Delta\vartheta = 2170 + 926 = 3096$, und es ist daher seine Belastung = 1,032.

*) Der Ausdruck *Gewicht* ist hier natürlich in mathematischem Sinne zu nehmen. Die $\Delta\vartheta$ sind Zahlen, ihre Auftragung macht die Anfertigung eines besonderen Zahlenmaassstabes nöthig.

44. Längenänderung einer Stabzugsehne. Eine für die Folge wichtige Aufgabe besteht darin, die Längenänderung der zwei Knoten 0 und n eines Stabzuges (Fig. 80) verbindenden Sehne durch die Längenänderungen Δs und Winkeländerungen $\Delta\vartheta$ auszudrücken. Wir bezeichnen den Abstand irgend eines Knotens m von der Sehne $0-n$ mit y_m, den Neigungswinkel des Stabes s_m gegen die $0-n$ mit φ_m und setzen $s_m \cos\varphi_m = e_m$.

Die Vergrösserung von ϑ_m um $\Delta\vartheta_m$ erzeugt für sich allein $\Delta l = y_m \Delta\vartheta_m$, ein Ergebnis, das ohne weiteres aus No. 43 (und auch aus Fig. 80) folgt, während der Aenderung der Stablänge s_m um Δs_m $\Delta l = \Delta s_m \cos\varphi_m$ entspricht. Im ganzen entsteht daher:

$$\Delta l = \sum_1^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m + \sum_1^{n} \Delta s_m \cos\varphi_m \text{ *)}$$

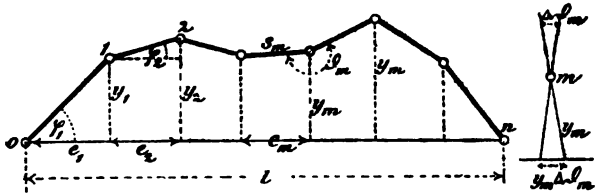


Fig. 80.

und für den Fall $t = 0$ $\left(\text{wegen } \Delta s = \frac{\sigma s}{E}\right)$:

$$(4) \qquad \Delta l = \sum_1^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m + \sum_1^{n} \frac{\sigma_m}{E} e_m.$$

Will man diese Formel auch dann anwenden, wenn Temperaturänderungen berücksichtigt werden sollen, so muss die Spannung $\sigma = \frac{S}{F}$ um den Betrag $\varepsilon E t$ erhöhen. Vergl. den Schluss von No. 40.

Der Ausdruck $\Sigma y \Delta\vartheta$ lässt sich als das auf die Sehne $0-n$ bezogene statische Moment von Gewichten $\Delta\vartheta_1$, $\Delta\vartheta_2$, ... deuten, welche in den Knoten 1, 2, ... des Stabzuges angreifen und parallel zu $0-n$ sind. Es ist also möglich, diesen Ausdruck mit Hilfe eines Seilpolygons darzustellen.

---

*) $\sum_1^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m = \sum_{m=1}^{m=n-1} y_m \Delta\vartheta_m$ bedeutet die Summe der Werthe $y_1\Delta\vartheta_1$, $y_2\Delta\vartheta_2$ ... bis $y_{n-1}\Delta\vartheta_{n-1}$.

§ 3.

Die Biegungslinie als Seilpolygon betrachtet.

45. Auffassung eines beliebigen Polygons als Seilpolygon. Jeder aus Geraden bestehende Linienzug 0—1—2—3— . . . (Fig. 81) lässt sich als das Seilpolygon endlicher Kräfte P_1, P_2, P_3, . . . deuten, die in den Punkten 1, 2, 3, . . . angreifen, und deren Richtungen innerhalb gewisser Grenzen willkürlich gewählt werden dürfen. Das Grössenverhältniss dieser Kräfte ist durch die Seiten eines zweiten Linienzuges $ABCD$ . . . bestimmt, dessen Ecken auf den durch einen beliebigen Pol O parallel zu den Geraden 0—1, 1—2, 2—3, . . . gezogenen Strahlen *I, II, III*, . . . liegen, und dessen Seiten AB, BC, CD, . . . die Richtungen der Kräfte P_1, P_2, P_3, . . . haben. Es verhält sich:

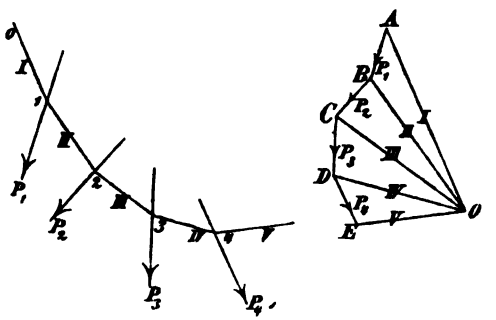


Fig. 81.

$$P_1 : P_2 : P_3 : \ldots = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \ldots$$

Sollen alle Kräfte endlich werden, so darf die Richtung keiner Kraft in eine der beiden angrenzenden Seiten des Linienzuges 0—1—2—3— . . . fallen, es darf also z. B. P_2 weder die Richtung von *II* noch die von *III* haben.

Wird ein Linienzug 0—1—2—3— . . . als das Seilpolygon *paralleler Kräfte* betrachtet (Fig. 82), so bestehen zwischen der Polweite H, den Kräften P und den in der Richtung der P gemessenen Abständen η_1, η_2, η_3, . . . der Punkte 1, 2, 3, . . . von einer beliebigen Geraden AB einfache Beziehungen, die es gestatten, die P durch die η auszudrücken. Legt man nämlich durch den Punkt 2 eine Parallele zu AB, welche die Richtung von P_3 in $3'$ trifft und verlängert 1—2 bis $3''$, so erhält man:

$$\overline{3'' - 3'} = (\eta_2 - \eta_1)\frac{\lambda_3}{\lambda_2}; \qquad \overline{3 - 3'} = \eta_3 - \eta_2, \quad \text{also}$$

$$\overline{3'' - 3} = \overline{3'' - 3'} - \overline{3 - 3'} = (\eta_2 - \eta_1)\frac{\lambda_3}{\lambda_2} - (\eta_3 - \eta_2),$$

wobei λ_2 und λ_3 die Projektionen der Seiten 1—2 und 2—3 auf

eine zur Richtung der P rechtwinklige Gerade bedeuten. Weiter findet man:

$$\overline{3'' - 3} : \lambda_3 = P_2 : H, \text{ mithin: } \overline{3'' - 3} = P_2 \frac{\lambda_3}{H}$$

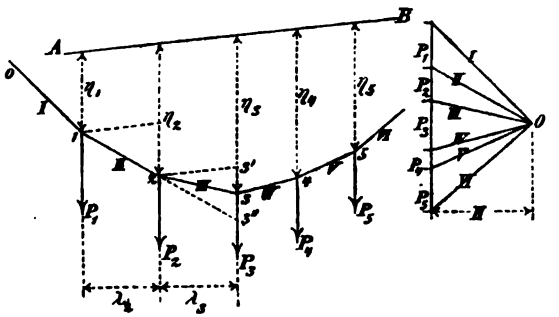


Fig. 82.

und daraus folgt dann:

$$P_2 = H\left[\frac{\eta_2 - \eta_1}{\lambda_2} - \frac{\eta_3 - \eta_2}{\lambda_3}\right],$$

und allgemein:

$$(1) \qquad P_m = H\left[\frac{\eta_m - \eta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\eta_{m+1} - \eta_m}{\lambda_{m+1}}\right].$$

46. Die Biegungslinie. An der Hand der vorstehenden Betrachtungen möge nun die Biegungslinie eines Stabzuges 0—1—2— . . . m . . . (Fig. 83) als Seilpolygon paralleler Kräfte gedeutet werden.

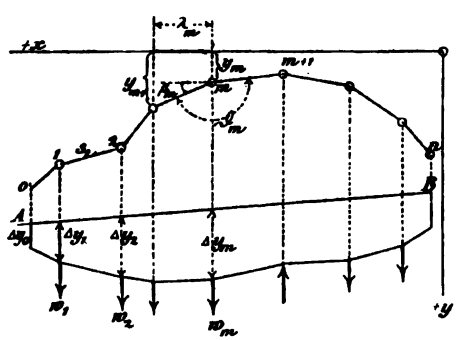


Fig. 83.

Den in einer senkrechten Ebene angenommenen Stabzug beziehen wir auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz x, y, dessen Wahl an die einzige Einschränkung gebunden ist, dass keiner der Neigungswinkel β_1, β_2, β_3 . . . der Stäbe s_1, s_2, s_3 . . . gegen die x-Achse gleich 90° sein darf. Sodann setzen wir voraus, es seien die Verschiebungen sämmtlicher Knotenpunkte in je zwei den Achsen x und y parallele Seitenverschiebungen Δx und Δy (das sind die Aenderungen der Coordinaten

x und y) zerlegt und denken uns die Δy auf den durch die Knotenpunkte parallel zur y-Achse gelegten Geraden von einer beliebig angenommenen Geraden AB aus aufgetragen. Den Linienzug, welcher die Endpunkte der Δy verbindet, nennen wir die *Biegungslinie* und die von dieser Linie, von der AB und den Δy_0, Δy_n begrenzte Fläche die *Biegungsfläche für die Richtung y*. Die der y-Achse parallelen Kräfte, deren Seilpolygon die Biegungslinie ist, bezeichnen wir mit $w_1, w_2, \ldots w_m, \ldots$; sie sind, wenn die Polweite $= 1$ gemacht, bestimmt durch:

$$(2) \qquad w_m = \frac{\Delta y_m - \Delta y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\Delta y_{m+1} - \Delta y_m}{\lambda_{m+1}}.$$

Differentiiren wir nun die Gleichung

$$y_{m-1} - y_m = s_m \sin \beta_m$$

und ersetzen (da es sich hier nur um verschwindend kleine Verschiebungen handelt) das Differentialzeichen durch das Zeichen Δ, so erhalten wir:

$$\Delta y_{m-1} - \Delta y_m = \Delta s_m \sin \beta_m + s_m \cos \beta_m \Delta \beta_m$$

und (nach Division durch $\lambda_m = s_m \cos \beta_m$):

$$\frac{\Delta y_m - \Delta y_{m-1}}{\lambda_m} = -\frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m - \Delta \beta_m.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\frac{\Delta y_{m+1} - \Delta y_m}{\lambda_{m+1}} = -\frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1} - \Delta \beta_{m+1},$$

weshalb entsteht:

$$w_m = -\Delta \beta_m + \Delta \beta_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1}.$$

Nun ist aber: $\beta_{m+1} + 180° - \beta_m = \vartheta_m,$

mithin: $\Delta \beta_{m+1} - \Delta \beta_m = \Delta \vartheta_m,$

und es findet sich schliesslich

$$(3) \qquad w_m = \Delta \vartheta_m - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1}.$$

Für $\beta_m = 90°$ oder $\beta_{m+1} = 90°$ wird w_m unendlich gross, und es leuchtet ein, dass die zu Anfang der Untersuchung hinsichtlich der Lage des Achsenkreuzes gemachte Einschränkung geboten ist, wenn alle w endlich sein sollen.

Bleiben die anfänglichen Stabtemperaturen ungeändert, ist also für jeden Stab: $\frac{\Delta s}{s} = \frac{S}{EF} = \frac{\sigma}{E}$, und besitzen sämmtliche Stäbe die

gleiche Elasticitätsziffer E, so ist es zweckmässig, die Biegungslinie als das Seilpolygon von Kräften

$$(4) \qquad w_m = E\Delta\vartheta_m - \sigma_m \operatorname{tg}\beta_m + \sigma_{m+1}\operatorname{tg}\beta_{m+1}$$

aufzufassen. Wählt man dann die Polweite E, so erhält man die Δy in demselben Maassstabe, in welchem der Stabzug gezeichnet ist. Will man die Δy in ν-mal grösserem Maassstabe darstellen, so mache man die Polweite $= \frac{E}{\nu}$. Es ist dieses Verfahren — bei überall gleichem E — auch dann zu empfehlen, wenn Temperaturänderungen berücksichtigt werden sollen; man muss dann aber die Spannungen $\sigma = \frac{S}{F}$ um εEt vergrössern. Vergl. den Schluss von No. 40.

Nach Aufzeichnung des Seilpolygons sind die Δy bestimmt, sobald die Schlusslinie AB gegeben ist, sobald also beispielsweise zwei Verschiebungen Δy bekannt sind.

Zahlenbeispiel (Figuren auf Tafel 2). Es sollen die senkrechten Seitenverschiebungen der Knotenpunkte der oberen Gurtung des in Fig. 84 abgebildeten Fischbauchträgers bestimmt werden. Die Belastung ist in Fig. 66 angegeben; den Kräfteplan zeigt Fig. 67*). Die Stablängen s und Querschnittsinhalte F sind in Fig. 68 zusammengestellt, die Spannkräfte S und Spannungen σ in Fig. 69. Die rothen Zahlen in Fig. 84 bedeuten die nach No. 40 ermittelten Werthe $E\Delta\alpha$ (*kgr* f. d. *qcm*) der Dreieckswinkel, aus denen sich die Winkel $\vartheta_2, \vartheta_4, \ldots$ zusammensetzen. Es ergiebt sich:

$E\Delta\vartheta_2 = +1719+1373+243 = 3335^k$ f. d. *qcm*; $E\Delta\vartheta_4 = 298+713+25 = 1036$; $E\Delta\vartheta_6 = 1871$; $E\Delta\vartheta_8 = 457$; $E\Delta\vartheta_{10} = 1246$; $E\Delta\vartheta_{12} = 581$; $E\Delta\vartheta_{14} = 1025$; $E\Delta\vartheta_{16} = 1150$; $E\Delta\vartheta_{18} = 3856$.

Da die Neigungswinkel sämmtlicher Obergurtstäbe gegen die wagerechte v-Achse gleich Null sind, so folgt aus Gleich. (4),

$$w_m = E\Delta\vartheta_m.$$

Die Gewichte w_m wurden im Maassstabe: 1000^k f. d. *qcm* $= 5^{mm}$ aufgetragen. Der Längenmaassstab der Trägerzeichnung ist 1 : 300, der für die Verschiebungen ist 600mal so gross (nämlich 2 : 1), und es wurde daher die Polweite $\frac{E}{600} = \frac{1800000}{600} = 3000^k$ f. d. *qcm* $= 15^{mm}$ gewählt. Nach Aufzeichnung des Seilpolygons wurde die Schlusslinie AB mittels der Bedingungen festgelegt, dass die senkrechten Verschiebungen der Knoten 0 und 20 gleich Null sind. Die für die Durchbiegungen gefundenen Werthe wurden in die Figur eingeschrieben.

Im vorliegenden Falle lassen sich auch die wagerechten Verschiebungen der Knoten 2, 4, . . . der oberen Gurtung sehr schnell angeben. So erfährt

*) Vergl. No. 41; dort ist die Formänderung der unteren Gurtung dieses Trägers untersucht worden.

8 eine Verschiebung nach links, welche gleich der Summe der (in die Fig. 84 eingetragenen) Verkürzungen der Stäbe 0—2, 2—4, 4—6, 6—8 ist, also $= 1{,}09 + 1{,}12 + 1{,}16 + 1{,}17 = 4{,}54$ mm. Für den Knoten 18 erhält man die wagerechte Verschiebung: 10,32 mm. Das ganze Verfahren ist sehr übersichtlich und liefert auch recht zuverlässige Ergebnisse.

Wir empfehlen dem Leser, zur Uebung auch die Biegungslinie der *unteren* Gurtung dieses Trägers durch ein Seilpolygon darzustellen. Zuerst müssen die den einzelnen Stäben entsprechenden Werthe $\sigma \operatorname{tg} \beta$ berechnet werden, wobei die Vorzeichen streng zu beachten sind. Für die Stäbe 0—1 bis 7—9 ist β negativ, für 11—13 bis 19—20 positiv (vergl. auch die Textfigur 88 auf S. 100). Man erhält mit den in der Fig. 68 angegebenen Höhenzahlen:

für den Stab 0—1: $\sigma \operatorname{tg} \beta = -478 \frac{1{,}268}{2{,}4} = -258$

„ „ „ 1—3: $\sigma \operatorname{tg} \beta = -492 \frac{2{,}546 - 1{,}268}{3{,}0} = -210$

für die folgenden Stäbe der Reihe nach:

$\sigma \operatorname{tg} \beta = -151;\ -98;\ -47;\ 0;\ +47;\ +98;\ +151;\ +219;\ +264.$

Die $E\Delta\mathfrak{H}$ sind für die Knoten 1, 3, 5, ... 19:

3096; 1400; 1166; 869; 850; 904; 679; 988; 1522; 3446,

und es ergeben sich mithin für die Gewichte w_m nach Gleichung (3) die Werthe (*klgr* f. d. *qcm*)

$w_1 = 3096 + 253 - 210 = 3139$
$w_3 = 1400 + 210 - 151 = 1459$
$w_5 = 1166 + 151 - 98 = 1219$
$w_7 = 869 + 98 - 47 = 920$
$w_9 = 850 + 47 + 0 = 897$

$w_{11} = 904 - 0 + 47 = 951$
$w_{13} = 679 - 47 + 98 = 730$
$w_{15} = 988 - 98 + 151 = 1041$
$w_{17} = 1522 - 151 + 219 = 1590$
$w_{19} = 3446 - 219 + 264 = 3491.$

Die Polweite wähle man wie vorhin $= 3000^k$ f. d. *qcm*; man erhält dann die senkrechten Verschiebungen im Maassstabe 2 : 1.

Will man die senkrechten Verschiebungen *sämmtlicher* Knotenpunkte des Trägers mit Hilfe *eines* Seilpolygons darstellen, so betrachte man den in Fig. 77 Seite 95) durch kräftige Linien dargestellten Stabzug. Dieser letztere Weg führt aber nur dann zum Ziele, wenn alle Füllungsstäbe (wie im vorliegenden Beispiele) eine gegen die Senkrechte geneigte Lage haben.

Wollte man die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte *beider* Gurtungen des in Fig. 85 abgebildeten Trägers durch *ein* Seilpolygon darstellen, und zu diesem Zwecke den Stabzug 0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — . . . . 9 — 11 — 10 — 13 — . . . . 16 untersuchen, so würde man unendlich grosse w-Kräfte erhalten, da den senkrechten Stäben Winkel $\beta = 90°$ entsprechen. Hat man aber für dieses Fachwerk die Biegungslinie der einen Gurtung ermittelt, so findet man diejenige der anderen sehr schnell mit Hilfe der Bedingung, dass sich die senkrechten Verschiebungen entsprechender Punkte (z. B. 1 und 0, 3 und 2, u. s. w.) um die Längenänderung des Verbindungsstabes unterscheiden. Verschiebt sich also beispielsweise 4 um δ_4 nach abwärts und verkürzt sich der Stab 5 — 4 um Δs, so ist $\delta_5 = \delta_4 + \Delta s$.

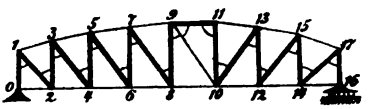


Fig. 85.

47. — Für das *einfache Dreiecknetz* möge noch eine andere Berechnungsweise der w gezeigt werden, wobei dahingestellt bleiben möge, ob dieses Fachwerk einem einfachen oder einem Gerber'schen Balken, einem Bogen mit drei Gelenken oder einer anderen Trägerart angehört. Wir unterscheiden drei Fälle.

I. Fall. Sämmtliche Stäbe schliessen mit der x-Achse Winkel ein, die kleiner oder grösser als 90° sind *(Strebenfachwerk)*. Gesucht sind die Verschiebungen Δy der Knotenpunkte beider Gurtungen.

Mit Bezugnahme auf die aus Fig. 86 zu ersehende Bezeichnung der Knotenpunkte sollen bedeuten:

o_m die Länge des einem Knotenpunkte m der unteren Gurtung gegenüberliegenden Obergurtstabes,
u_k die Länge des einem Knotenpunkte k der oberen Gurtung gegenüberliegenden Untergurtstabes,
d_m die Länge der Diagonale $(m-1)-m$,
λ_m die Projekton von d_m auf die x-Achse,
β_m den Neigungswinkel von o_m gegen die x-Achse
γ_k „ „ „ u_k „ „ „ „
φ_m „ „ „ d_m „ „ „ „.

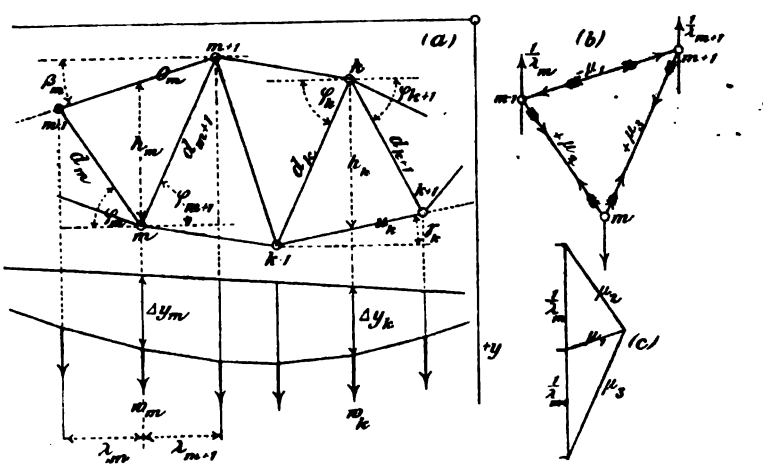


Fig. 86.

Wir denken uns das Dreieck $(m-1)-m-(m+1)$ in den Punkten $(m-1)$ und $(m+1)$ mit den im Sinne der $(-y)$ angenommenen Kräften $\frac{1}{\lambda_m}$ und $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ belastet, Fig. 86b, und im Punkte m

gestützt und wenden auf diesen Belastungszustand und den wirklichen Verschiebungszustand die auf Seite 11 der Einleitung entwickelte Arbeitsgleichung $\Sigma \bar{Q}\delta = \Sigma \bar{S}\Delta s$ an. Da sich $m-1$ gegen m im Sinne der $(+y)$ um $\Delta y_{m-1} - \Delta y_m$ verschiebt und $(m+1)$ gegen m um $\Delta y_{m+1} - \Delta y_m$, so ist die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte (mit Rücksicht auf Gleichung 2, Seite 101):

$$\Sigma \bar{Q}\delta = -\frac{1}{\lambda_m}(\Delta y_{m-1} - \Delta y_m) - \frac{1}{\lambda_{m+1}}(\Delta y_{m+1} - \Delta y_m) = w_m.$$

Die absoluten Werthe der in den drei Stäben o_m, d_m, d_{m+1} in Folge der gedachten Belastung entstehenden Spannkräfte seien $= \mu_1$, μ_2, μ_3; sie können auf die in Fig. 86 c angegebene Weise ermittelt werden, worauf dann

$$(5) \qquad w_m = \Sigma \bar{Q}\delta = \Sigma \bar{S}\Delta s = -\mu_1 \Delta o_m + \mu_2 \Delta d_m + \mu_3 \Delta d_{m+1}$$

erhalten wird. Das erste Glied ist negativ, weil der Stab o_m durch μ_1 gedrückt wird.

Bezeichnet man nun mit h_m die parallel zur y-Achse gemessene Höhe des Fachwerks im Punkte m, so findet man:

$$\mu_1 : \frac{1}{\lambda_m} = \lambda_m \sec \beta_m : h_m \text{ und hieraus } \mu_1 = \frac{\sec \beta_m}{h_m},$$

$$\mu_2 : \frac{1}{\lambda_m} = d_m : h_m = \lambda_m \sec \varphi_m : h_m \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \mu_2 = \frac{\sec \varphi_m}{h_m},$$

ebenso: $$\mu_3 = \frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m},$$

weshalb der oben für w_m angegebene Ausdruck übergeht in:

$$(6) \qquad w_m = \frac{-\Delta o_m \sec \beta_m + \Delta d_m \sec \varphi_m + \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m}.$$

Ganz ähnlich wird entwickelt:

$$(7) \qquad w_k = \frac{+\Delta u_k \sec \gamma_k - \Delta d_k \sec \varphi_k - \Delta d_{k+1} \sec \varphi_{k+1}}{h_k}.$$

Die Polweite ist $= 1$ (*Zahlen*einheit) oder $= \frac{1}{\nu}$ zu wählen, je nachdem die Δy in demselben oder im ν-fachen Maassstabe der Trägerzeichnung dargestellt werden sollen.

Es dürfte hier noch eine Bemerkung über die Vorzeichen der Winkel β, γ, φ am Platze sein.

Liegt die durch den Knoten r parallel zur y-Achse gezogene Gerade zwischen den Knoten $(r-1)$ und $(r+1)$, wo r eine beliebige

Ordnungsziffer bedeutet, so genügt die Festsetzung, dass unter β, γ, φ die *spitzen* Neigungswinkel der Stäbe gegen die x-Achse zu verstehen sind. Ob diese Winkel nach oben oder unten positiv gezählt werden, ist gleichgültig, weil die Ausdrücke für w_m und w_k nur die Sekanten enthalten und sec $(-\alpha)$ $=$ sec $(+\alpha)$ ist. — Anders in dem in Fig. 87 dargestellten, zuweilen bei Bogenträgern vorkommenden Falle. Bedeutet hier r einen Knotenpunkt der *unteren* Gurtung, so ist sec φ_r positiv oder negativ, je nachdem $r-1$ links oder rechts von r liegt, und sec φ_{r+1} positiv oder negativ, je nachdem sich $r+1$ rechts oder links von r befindet. Auch ist zu beachten, dass die w-Kräfte in der Reihenfolge $\ldots w_{r-1}, w_r, w_{r+1}, \ldots$ durch das Seilpolygon verbunden werden müssen, und dass h_r der in der Richtung der y gemessene Abstand des Knotens r von der Verlängerung des Stabes $(r-1)-(r+1)$ ist.

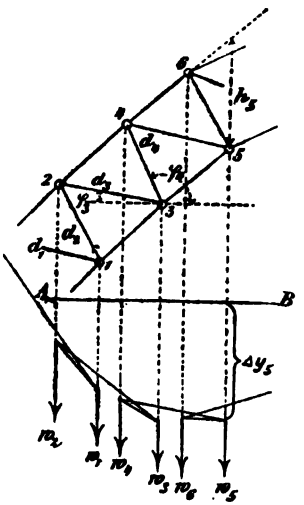


Fig. 87.

Zur Abkürzung führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\Delta' o = \Delta o \sec\beta, \quad \Delta' u = \Delta u \sec\gamma, \quad \Delta' d = \Delta d \sec\varphi$$

und schreiben:

$$(8) \qquad w_m = \frac{-\Delta' o_m + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1}}{h_m}$$

$$(9) \qquad w_k = \frac{+\Delta' u_k - \Delta' d_k - \Delta' d_{k+1}}{h_k}.$$

Für das Fachwerk in Fig. 86 haben $\Delta' o$, $\Delta' u$, $\Delta' d$ dieselben Vorzeichen wie die Längenänderungen Δo, Δu, Δd; sie sind also positiv oder negativ je nachdem die entsprechenden Stäbe gedehnt oder verkürzt werden. Wendet man aber die Gleichungen (8) und (9) auf das Fachwerk in Fig. 87 an, so hat (wenn r einen Knoten der unteren Gurtung bedeutet) $\Delta' d_r$ dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen wie Δd_r je nachdem $r-1$ links oder rechts von r liegt, und $\Delta' d_{r+1}$ dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen von Δd_{r+1} je nachdem $r+1$ rechts oder links von r liegt.

Die $\Delta' o$, $\Delta' u$, $\Delta' d$ bestimme man durch Zeichnung und benutze hierzu ein in grossem Maassstabe angefertigtes Trägernetz.

Zahlenbeispiel. Es sollen die senkrechten Verschiebungen sämmtlicher Knotenpunkte des in Fig. 88 dargestellten schmiedeeisernen Netzwerks unter der Voraussetzung bestimmt werden, dass in jedem Knoten der unteren Gurtung die Last 12^t angreift und E den überall gleichen Werth 1800000^k f. d. *qcm* hat. Der Träger ist symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte. Es genügt deshalb, die eine Hälfte zu untersuchen.

In die rechte Hälfte des Trägernetzes wurden die Spannkräfte in *Tonnen* und die Querschnitte in *qcm* (eingeklammerte Zahlen) eingetragen, und in die

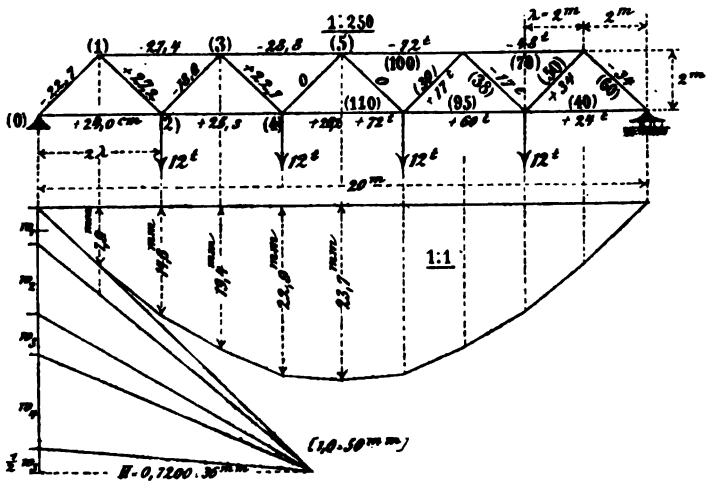


Fig. 88.

linke Hälfte die 180-fachen, mit den Sekanten der Stabneigungswinkel multiplicirten Längenänderungen (in *cm*). Für einen wagerechten Gurtungsstab ist $\Delta' o = \Delta o$ bezieh. $\Delta' u = \Delta u$, z. B. für den Stab 1—3:

$$180\,\Delta' o = \frac{O o}{(\frac{1}{1800}E)F} = \frac{48000^k \cdot 400^{cm}}{10000 \cdot 70} = 27{,}4^{cm}.$$

Für einen Füllungsstab erhält man (wegen $d = \lambda \sec 45° = \lambda\sqrt{2}$):

$$180\,\Delta' d = 180\,\Delta d\,\frac{d}{\lambda} = \frac{D d^2}{(\frac{1}{1800}E)F\lambda} = \frac{2D\lambda}{10000F}$$

z. B. für den Stab 1—2:

$$180\,\Delta' d = \frac{2 \cdot 84000^k \cdot 200}{10000 \cdot 50} = 27{,}2^{cm}.$$

Die Gleichungen (8) und (9) liefern nun:

$w_1 = \frac{1}{1800}[+24{,}0 + 22{,}7 - 27{,}2] = 0{,}0975$ | $w_4 = \frac{1}{1800}[+28{,}8 + 22{,}7] = 0{,}2575$
$w_2 = \frac{1}{1800}[+27{,}4 + 27{,}2 - 18{,}0] = 0{,}1880$ | $w_5 = \frac{1}{1800}\,26{,}2 = 0{,}1310.$
$w_3 = \frac{1}{1800}[+25{,}3 + 18{,}0 - 22{,}7] = 0{,}1080$ |

Die Werthe w und die Polweite H sind *Zahlen*. Wählt man $H = 1$, so liefert das Seilpolygon die 180fachen Durchbiegungen im Maassstabe der Trägerzeichnung (d. i. in 1 : 250). In Fig. 88 wurden die Durchbiegungen im Maassstabe 1 : 1 dargestellt und deshalb die Polweite $H = \frac{129}{180} = 0{,}72$ angenommen. Der Maassstab für die Zahlen w lautet: $1 = 50^{mm}$.

II. Fall. Gesucht sind die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte der *unteren* Gurtung eines (in senkrechter Ebene angenommenen) Fachwerks mit Vertikalen *(Ständerfachwerk)*.

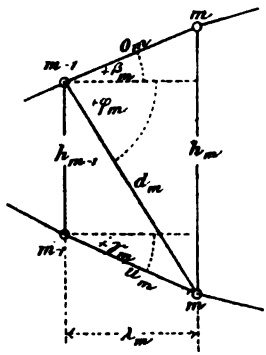


Fig. 89.

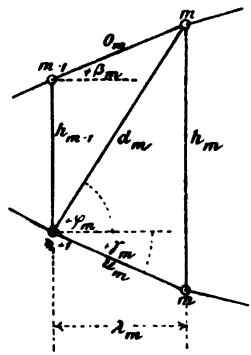


Fig. 90.

Wir bezeichnen (Fig. 89 und 90) mit

o_m die Länge des Obergurtstabes
u_m „ „ „ Untergurtstabes } im m^{ten} Felde,
d_m „ „ der Diagonale
h_m „ „ „ Vertikale mm,
β_m den Neigungswinkel von o_m gegen die Wagerechte,
γ_m „ „ „ u_m „ „ „
φ_m „ „ „ d_m „ „ „
λ_m die Feldweite.

Sodann führen wir (wie auf Seite 106) die Abkürzungen ein

$$\Delta' o = \Delta o \sec \beta; \qquad \Delta' u = \Delta u \sec \gamma; \qquad \Delta' d = \Delta d \sec \varphi$$

und heben hervor, dass im vorliegenden Falle $\Delta' o$, $\Delta' u$, $\Delta' d$ stets dieselben Vorzeichen haben wie Δo, Δu, Δd.

Zunächst sei die in Fig. 91 dargestellte Anordnung der Füllungsstäbe (linkssteigende Diagonalen zu beiden Seiten der Vertikale mm) vorausgesetzt. Der Kräfteplan für den in der Fig. 91 b angegebenen, gedachten Belastungsfall liefert für die Gurtstäbe o_m, u_{m+1}, und die Diagonalen d_m, d_{m+1} folgende Spannkräfte μ (ohne Vorzeichen):

$$\mu_1 = \frac{\sec \beta_m}{h_m}; \qquad \mu_2 = \frac{\sec \gamma_{m+1}}{h_m};$$

$$\mu_3 = \frac{\sec \varphi_m}{h_m}; \qquad \mu_4 = \frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m}.$$ *)

*) Vergl. Seite 105.

Für die Spannkraft μ_5 der Vertikale mm erhält man

$$\mu_5 : \frac{1}{\lambda_{m+1}} = h'_{m+1} : h_m \quad \text{also} \quad \mu_5 = \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1} h_m},$$

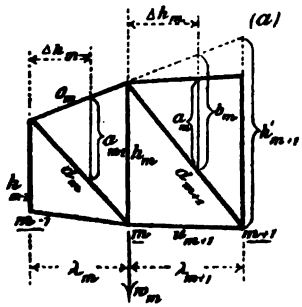


Fig. 91a.

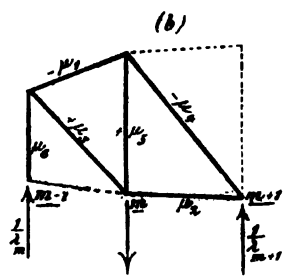


Fig. 91b.

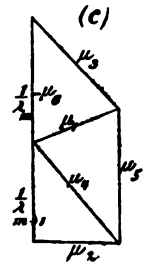


Fig. 91c.

worin h'_{m+1} den Abstand des unteren Knotens $m+1$ von dem Punkte bedeutet, in welchem die $(m+1)^{te}$ Vertikale die Verlängerung des Stabes o_m schneidet, In der $(m-1)^{ten}$ Vertikale entsteht $\mu_6 = \frac{1}{\lambda_m}$. Die in der Fig. 91b durch gestrichelte Linien bezeichneten Stäbe sind spannungslos.

Mit Rücksicht auf die in die Fig. 91b eingetragenen Vorzeichen der Spannkräfte μ erhält man nun (nach Gleich. 5, Seite 105):

$$w_m = -\mu_1 \Delta o_m + \mu_2 \Delta u_{m+1} + \mu_3 \Delta d_m - \mu_4 \Delta d_{m+1} + \mu_5 \Delta h_m - \mu_6 \Delta h_{m-1},$$

d. i.

$$(10) \quad \begin{cases} w_m = \frac{1}{h_m} [-\Delta' o_m + \Delta' u_{m+1} + \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - a_{m-1} + b_m] \\ \text{worin} \quad a_{m-1} = \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_m} \quad \text{und} \quad b_m = \Delta h_m \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}}. \end{cases}$$

[Fig. 91.]

Die Werthe a_{m-1}, b_m (welche dasselbe Vorzeichen haben, wie Δh_{m-1} bezieh. Δh_m) werden zweckmässig auf die in Fig. 91*a* angegebene Weise durch Zeichnung bestimmt; auch ist es häufig zweckmässig, die Multiplicationen der Längenänderungen mit den Sekanten zeichnerisch auszuführen und die Glieder des Klammerausdruckes mit dem Zirkel zu addiren. Nur achte man hierbei auf die Vorzeichen!

Durch Betrachtung des Spiegelbildes der Fig. 91 ergiebt sich für die in der Fig. 92 dargestellte Anordnung der Füllungsstäbe (und mit der dort für h'_{m-1} angegebenen Bedeutung):

(11) [Fig. 92.]

$$\begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m}\left[-\Delta' o_{m+1} + \Delta' u_m - \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} - a_{m+1} + b_m\right] \\ \text{worin} \quad a_{m+1} = \Delta h_{m+1}\dfrac{h_m}{\lambda_{m+1}} \quad \text{und} \quad b_m = \Delta h_m \dfrac{h'_{m-1}}{\lambda_m}. \end{cases}$$

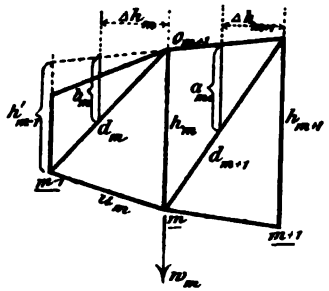


Fig. 92.

Ist links von der Vertikale mm eine linkssteigende Diagonale und rechts davon eine rechtssteigende angeordnet, Fig. 93, so erhält man:

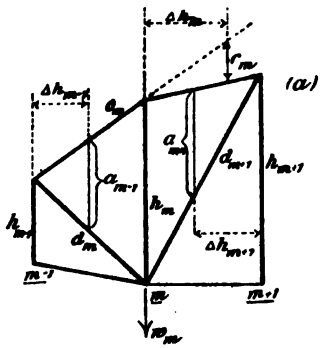


Fig. 93a.

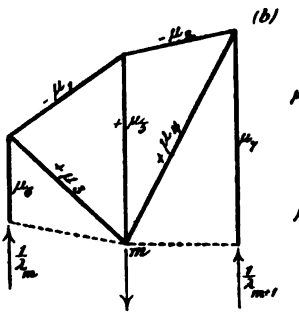


Fig. 93b.

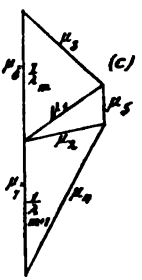


Fig. 93c.

$$w_m = -\mu_1 \Delta o_m - \mu_2 \Delta o_{m+1} + \mu_3 \Delta d_m + \mu_4 \Delta d_{m+1} + \mu_5 \Delta h_m - \mu_6 \Delta h_{m-1} - \mu_7 \Delta h_{m+1},$$

$$\mu_1 = \frac{\sec \beta_m}{h_m}; \quad \mu_2 = \frac{\sec \beta_{m+1}}{h_m}; \quad \mu_3 = \frac{\sec \varphi_m}{h_m}; \quad \mu_4 = \frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m};$$

$$\mu_5 = \mu_1 \sin \beta_m - \mu_2 \sin \beta_{m+1} = \frac{1}{h_m}(\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}); \quad \mu_6 = \frac{1}{\lambda_m};$$

$$\mu_7 = \frac{1}{\lambda_{m+1}} \quad \text{mithin:}$$

$$(12)\quad \text{[Fig. 93.]}\quad \begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m}[-\Delta' o_m - \Delta' o_{m+1} + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} + c_m - a_{m-1} - a_{m+1}] \\ \text{worin} \quad c_m = \Delta h_m (\operatorname{tg}\beta_m - \operatorname{tg}\beta_{m+1}); \quad a_{m-1} = \Delta h_{m-1}\dfrac{h_m}{\lambda_m}; \\ \qquad a_{m+1} = \Delta h_{m+1}\dfrac{h_m}{\lambda_{m+1}}. \end{cases}$$

Liegt der in Fig. 93a dargestellte Werth c_m oberhalb der Verlängerung von o_m (ist also $\beta_{m+1} > \beta_m$) so hat c_m das entgegengesetzte Vorzeichen von Δh_m.

Bei der in Fig. 94 abgebildeten Anordnung ergiebt sich für die m^{te} Vertikale die Spannkraft

$$\mu_5 = \mu_3 \sin\varphi_m + \mu_4 \sin\varphi_{m+1} = \frac{\sec\varphi_m}{h_m}\sin\varphi_m + \frac{\sec\varphi_{m+1}}{h_m}\sin\varphi_{m+1}$$
$$= \frac{\operatorname{tg}\varphi_m + \operatorname{tg}\varphi_{m+1}}{h_m}$$

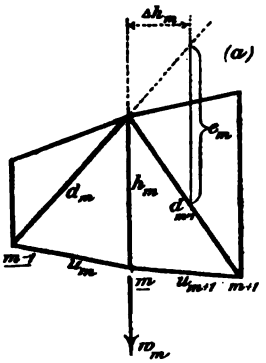


Fig. 94a.

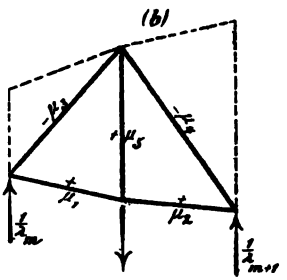


Fig. 94b.

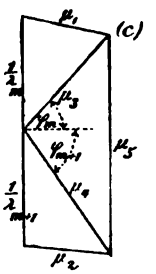


Fig. 94c.

und man findet deshalb:

$$(13)\quad \text{[Fig. 94.]}\quad \begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m}[+\Delta' u_m + \Delta' u_{m+1} - \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} + e_m] \\ \text{worin} \quad e_m = \Delta h_m (\operatorname{tg}\varphi_m + \operatorname{tg}\varphi_{m+1}). \end{cases}$$

III. Fall. *Ständerfachwerk*; gesucht sind die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte der *oberen* Gurtung. Man gelangt auf dem vorhin eingeschlagenen Wege zu den folgenden, den in Fig. 95, 96, 97, 98, dargestellten Anordnungen der Füllungsstäbe entsprechenden Formeln:

$$(14)\quad \text{[Fig. 95.]}\quad \begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m}[-\Delta' o_m + \Delta' u_{m+1} + \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - b_m + a_{m+1}] \\ \text{worin} \quad b_m = \Delta h_m \dfrac{h'_{m-1}}{\lambda_m}; \qquad a_{m+1} = \Delta h_{m+1}\dfrac{h_m}{\lambda_{m+1}}. \end{cases}$$

(15) [Fig. 96.]

$$\begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m}\left[-\Delta' o_{m+1} + \Delta' u_m - \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} + a_{m-1} - b_m\right] \\ \text{worin} \qquad b_m = \Delta h_m \dfrac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}}; \qquad a_{m-1} = \Delta h_{m-1} \dfrac{h_m}{\lambda_m}. \end{cases}$$

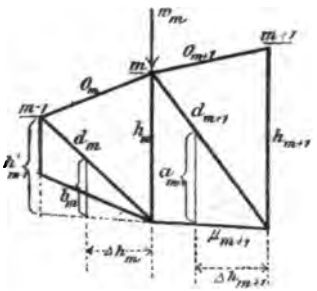


Fig. 95.

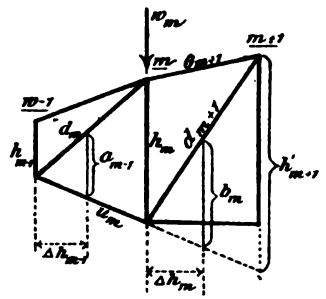


Fig. 96.

(16) [Fig. 97]

$$\begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m}\left[-\Delta' o_m - \Delta' o_{m+1} + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} - e_m\right] \\ \text{worin} \qquad e_m = \Delta h_m \left(\operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \varphi_{m+1}\right) \end{cases}$$

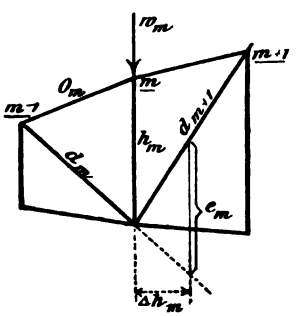


Fig. 97.

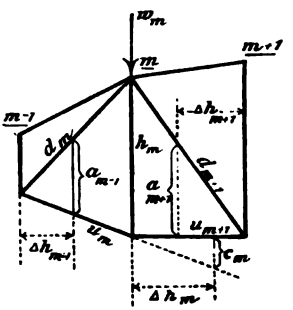


Fig. 98.

(17) [Fig. 98.]

$$\begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m}\left[+\Delta' u_m + \Delta' u_{m+1} - \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - c_m + a_{m-1} + a_{m+1}\right] \\ \text{wo} \qquad c_m = \Delta h_m \left(\operatorname{tg} \gamma_m - \operatorname{tg} \gamma_{m+1}\right); \qquad a_{m-1} = \Delta h_{m-1} \dfrac{h_m}{\lambda_m}; \\ \qquad a_{m+1} = \Delta h_{m+1} \dfrac{h_m}{\lambda_{m+1}}. \end{cases}$$

Hat man die Biegungslinie der einen Gurtung bestimmt, so findet man diejenige der anderen mittels der Bedingung, dass sich die beiden

senkrecht übereinander gelegenen Knotenpunkte m gegen einander um Δh_m verschieben.

Ein Zahlenbeispiel findet sich in No. 49.

Die Berechnung der Werthe w_m mit Hilfe der Gleichungen (8) — (17) ist dem in No. 46 angegebenen Verfahren vorzuziehen, sobald die Aenderungen der Dreieckswinkel nicht ohnehin zu anderen Zwecken (z. B. Untersuchung von Nebenspannungen) berechnet werden müssen.

Anmerkungen zu No. 47.

1. — Liegt ein Fachwerk von der unter *Fall I* behandelten Art vor, und wird nur die Biegungslinie der oberen Gurtung verlangt, so ist es zuweilen zweckmässig, die den Knoten der unteren Gurtung entsprechenden Gewichte w auf die benachbarten oberen Knotenpunkte zu vertheilen. Von w_m in Fig. 99 kommt auf den Knoten $(m-1)$ der Theil: $w_m'' = w_m \frac{\lambda_{m+1}}{a}$ und auf $(m+1)$ der Theil: $w_m' = w_m \frac{\lambda_m}{a}$. Die Vertheilung von w_r liefert:

$w_r'' = -w_r \frac{\lambda_{r+1}}{a}$ und $w_r' = +w_r \frac{\lambda_r}{a}$.

Nun wird w_m'' zu w_{m-1} addirt, w_m' zu w_{m+1} u. s. w., so dass sich z. B. für den oberen Knoten $(m-1)$ im ganzen ergiebt:

$$\overline{w}_{m-1} = w_m'' + w_{m-1} + w'_{m-2}.$$

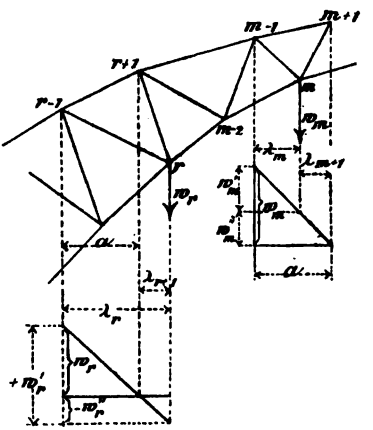


Fig. 99.

Dieses Verfahren ist namentlich dann am Platz, wenn die durch einen Knoten r der unteren Gurtung parallel zur Verschiebungsrichtung gelegte Gerade nicht zwischen $r-1$ und $r+1$ liegt. Bei derartigen Fachwerken kann es vorkommen, dass einzelne Stabachsen mit der Verschiebungsrichtung zusammenfallen, wie beispielsweise d_5 in Fig. 100. Man berechne dann die Werthe w zunächst ohne Rücksicht auf diejenigen Füllungsstäbe, welche die Richtung der w haben und deren Einfluss auf die w dann nachträglich gesondert anzugeben ist. So findet man für das Fachwerk in Fig. 100 unter der vorläufigen Annahme $\Delta d_5 = 0$ die Werthe:

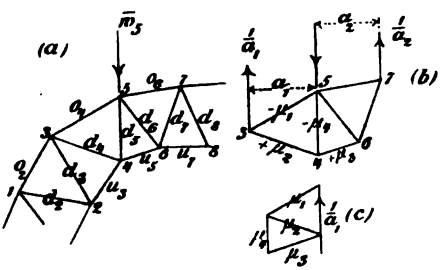


Fig. 100.

$$w_2 = \frac{1}{h_2}(-\Delta' o_2 + \Delta' d_2 + \Delta' d_3): \qquad w_3 = \frac{1}{h_3}(+\Delta' u_3 - \Delta' d_3 - \Delta' d_4)$$

$$w_4 = \frac{1}{h_4}(-\Delta' o_4 + \Delta' d_4); \qquad w_5 = \frac{1}{h_5}(+\Delta' u_5 - \Delta' d_5)$$

$$w_6 = \frac{1}{h_6}(-\Delta' o_6 + \Delta' d_6 + \Delta' d_7) \qquad \text{u. s. w.}$$

sodann: $\overline{w}_3 = w_2' + w_3$; $\overline{w}_5 = w_4 + w_5 + w_6''$; $\overline{w}_7 = w_6' + w_7 + w_8''$; u. s. w. wobei zu beachten ist, dass $\Delta' d_3$ das entgegengesetzte Vorzeichen von Δd_3 hat, weil der Knoten 3 links von der Senkrechten durch 2 liegt (vergl. Seite 106). Der Einfluss von Δd_5 auf $\overline{w}_5$ ist $= -\mu_4 \Delta d_5$, worin μ_4 den mittels des Kräfteplanes in Fig. 100c bestimmten Werth bedeutet. $\overline{w}_7$ ist unabhängig von Δd_5 und der Einfluss von Δd_5 auf $\overline{w}_3$ ist $= + \frac{\Delta d_5}{a_1}$, weshalb schliesslich erhalten wird:

$$\overline{w}_3 = w_2' + w_3 + \frac{\Delta d_5}{a_1}; \quad \overline{w}_5 = w_4 + w_5 + w_6'' - \mu_4 \Delta d_5; \quad \overline{w}_7 = w_6' + w_7 + w_8''.$$

Aehnlich wird verfahren, wenn die Biegungslinie der *unteren* Gurtung gesucht wird. Die den oberen Knoten entsprechenden Gewichte w_m werden in den angeführten Sonderfällen zweckmässig auf die Knotenpunkte der unteren Gurtung vertheilt.

2. — Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die Spannkräfte μ durch parallele äussere Kräfte erzeugt werden und sich in Folge dessen auch mit Hilfe der im ersten Bande (IX. Abschnitt) für den einfachen Fachwerkbalken entwickelten Formeln berechnen lassen. So sind z. B. die Spannkräfte in den Stäben o_m, d_m, d_{m+1} des in der (Fig. 86) dargestellten Fachwerks, falls auf dieses nur äussere Kräfte, welche die Richtung der w haben, wirken:

$$O_m = -\frac{M_m \sec \beta_m}{h_m}; \qquad D_m = \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right) \sec \varphi_m;$$

$$D_{m+1} = \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}\right) \sec \varphi_{m+1},$$

und es ergeben sich (da die gedachten Lasten $\frac{1}{\lambda_m}$ und $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ die Momente: $M_{m-1} = 0$, $M_m = 1$, $M_{m+1} = 0$ erzeugen) für die Spannkräfte μ_1, μ_2, μ_3 die Werthe:

$$\mu_1 = -\frac{\sec \beta_m}{h_m}; \qquad \mu_2 = +\frac{\sec \varphi_m}{h_m}; \qquad \mu_3 = +\frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m}.$$

Auch leuchtet ein, *dass die Glieder des Ausdrucks:*

$$w_m = -\frac{\Delta o_m \sec \beta_m}{h_m} + \frac{\Delta d_m \sec \varphi_m}{h_m} + \frac{\Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m} = -\frac{\Delta' o_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_{m+1}}{h_m}$$

als diejenigen Spannkräfte gedeutet werden dürfen, welche in den Stäben o_m, d_m, d_{m+1} entstehen, wenn $M_{m-1} = 0$ und $M_{m+1} = 0$ angenommen werden, während M_m der Reihe nach die Werthe Δo_m, Δd_m, Δd_{m+1} beigelegt werden.

Bestimmt man nun diese Spannkräfte mit Hilfe des im § 36 des ersten Bandes mitgetheilten Zimmermann'schen Verfahrens, so gelangt man zu der in Fig. 101 angegebenen Darstellung der Glieder von w_m. Es wurde auf der durch den Knoten 2 in der Richtung von w_2 gelegten Geraden abgetragen:

$$\overline{2h} = \frac{\Delta o_2}{\lambda_2}; \quad \overline{2i} = \frac{\Delta d_2}{\lambda_2}; \quad \overline{2k} = \frac{\Delta d_3}{\lambda_3};$$

sodann wurden durch h, i, k zum Obergurtstabe o_2 die Parallelen hh', ii', kk' gezogen und erhalten:

$$\overline{hh'} = \frac{\Delta' o_2}{h_2}; \quad \overline{2i'} = \frac{\Delta' d_2}{h_2}; \quad \overline{2k'} = \frac{\Delta' d_3}{h_3}.$$

Trägt man an Stelle der Werthe $\frac{\Delta o_2}{\lambda_2}$, $\frac{\Delta d_2}{\lambda_2}$, $\frac{\Delta d_3}{\lambda_3}$ die Werthe $\Delta o_2 \frac{e}{\lambda_2}$, $\Delta d_2 \frac{e}{\lambda_2}$, $\Delta d_3 \frac{e}{\lambda_3}$ auf, wo e eine beliebige, aber für alle Knotenpunkte gleich gross angenommene Strecke bedeutet, und zeichnet man das Seilpolygon der Kräfte:

$$w_m = e\left[-\frac{\Delta' o_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_{m+1}}{h_m}\right]$$

$$w_k = e\left[+\frac{\Delta' u_k}{h_k} - \frac{\Delta' d_k}{h_k} - \frac{\Delta' d_{k+1}}{h_k}\right] \text{ (vergl. Fig. 86),}$$

so geben die Ordinaten desselben die mit e multiplicirten Verschiebungen an. Sind die Strecken λ_1, λ_2, λ_3, ... gleich gross ($=\lambda$) oder hat die Mehrzahl derselben die gleiche Grösse λ, so wähle man $e = \lambda$. Die schliesslich nöthig werdende Division der Ordinaten des Seilpolygons durch e bezieh. λ kann natürlich auch durch Wahl einer geeigneten Polweite umgangen werden.

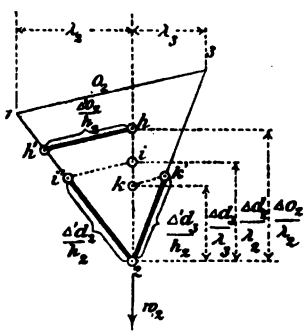


Fig. 101.

Aehnliche Untersuchungen lassen sich auch für das Fachwerk mit Vertikalen durchführen. So folgt z. B. aus der für die Vertikale mm in Fig. 93 bei unten angreifender Belastung gefundenen Formel

$$V_m = \frac{M_m}{h_m}(\operatorname{tg}\beta_m - \operatorname{tg}\beta_{m+1})$$

ohne weiteres, dass die Längenänderung Δh_m dieser Vertikalen nur auf das Gewicht w_m Einfluss besitzt, und dass die Grösse dieses Einflusses: $\frac{\Delta h_m}{h_m}(\operatorname{tg}\beta_m - \operatorname{tg}\beta_{m+1})$ ist. Es lässt sich dieser Werth als diejenige Spannkraft deuten, welche in der fraglichen Vertikale entsteht, sobald das Moment $M_m = \Delta h_m$ wird.

Für die Vertikale mm in Fig. 95 wurde bei oben angreifender Belastung gefunden:

$$V_m = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_m}{\lambda_m}\left[1 - \frac{\lambda_m(\operatorname{tg}\beta_m + \operatorname{tg}\gamma_{m+1})}{h_m}\right],$$

ein Ausdruck, der sich leicht umformen lässt in:

$$V_m = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_m h'_{m-1}}{\lambda_m h_m}$$

und aus dem dann gefolgert werden kann, dass der Einfluss von Δh_m auf den Werth w_{m-1} gleich $\frac{\Delta h_m}{\lambda_m}$ ist und auf w_m gleich $\left(-\frac{\Delta h_m}{\lambda_m}\frac{h'_{m-1}}{h_m}\right)$.

48. Bestimmung der Längenänderung einer Stabzugsehne. Wir betrachten einen Stabzug $0 — 1 — 2 — \ldots . — n$, der in einer senkrechten Ebene liegen möge, und dessen Sehne $0n$ mit der Wagerechten den Winkel α bildet. Die senkrechten Seitenverschiebungen seien mit Hilfe eines Seilpolygons gefunden, dessen Gewichte w_m nach No. 47 *(also ohne Zuhilfenahme der Winkeländerungen)* berechnet worden sind. Gesucht sei die Aenderung Δl der Länge l der Sehne $\overline{0n}$. Bedeutet:

η_m die Länge des vom Knoten m auf die Sehne $0n$ gefällten Lothes,

φ_m den Neigungswinkel des Stabes s_m gegen $0n$,

so ist nach Seite 98:

$$\Delta l = \sum_1^{n-1} \eta_m \Delta \vartheta_m + \sum_1^n \Delta s_m \cos \varphi_m,$$

und diese Beziehung wird zweckmässig so umgeformt, dass Δl durch die bereits bei Ermittlung der Biegungslinie benutzten Werthe w ausgedrückt wird. Dazu führen wir ein:

$$\Delta \vartheta_m = w_m + \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1} \text{ (nach Gleich. (8) auf Seite 101)},$$

$$\eta_m = y_m \cos \alpha, \quad \varphi_m = \beta_m - \alpha,$$

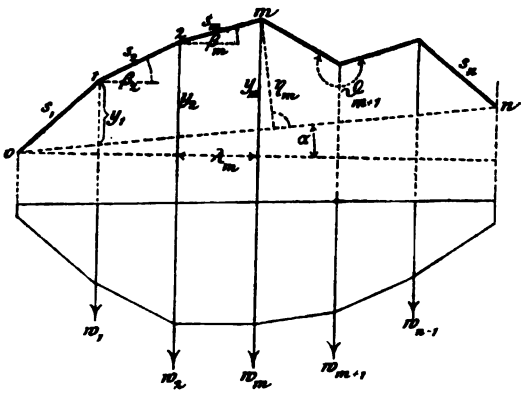


Fig. 102.

wo β_m den Neigungswinkel des Stabes s_m gegen die Wagerechte,

y_m den in senkrechter Richtung gemessenen Abstand des Knotens m von der Geraden $0n$

bedeutet, und erhalten:

$$\Delta l = \cos \alpha \left[\sum_1^{n-1} y_m w_m + c \right], \quad \text{worin}$$

$$c = \sum_1^{n-1} y_m \left(\frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1} \right) + \sum_1^n \frac{\Delta s_m \cos (\beta_m - \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Der Stab s_m liefert zu dem Werthe c die drei Glieder:

$$-y_{m-1}\frac{\Delta s_m}{s_m}\operatorname{tg}\beta_m,\quad +y_m\frac{\Delta s_m}{s_m}\operatorname{tg}\beta_m,\quad +\frac{\Delta s_m\cos(\beta_m-\alpha)}{\cos\alpha}$$

deren Summe $\left[\text{wegen } y_m-y_{m-1}=\lambda_m(\operatorname{tg}\beta_m-\operatorname{tg}\alpha)=\frac{s_m\sin(\beta_m-\alpha)}{\cos\alpha}\right]$ gleich

$$\frac{\Delta s_m}{\cos\alpha}[\operatorname{tg}\beta_m\sin(\beta_m-\alpha)+\cos(\beta_m-\alpha)]=\Delta s_m\sec\beta_m$$

ist, weshalb sich ergiebt: $c=\sum_1^n \Delta s_m\sec\beta_m$ und

$$\Delta l=\cos\alpha\left(\sum_1^{n-1} y_m w_m+\sum_1^n \Delta s_m\sec\beta_m\right). \tag{18}$$

Diese Formel ist ausserordentlich bequem, weil sowohl die w als auch die $\Delta s\sec\beta$ bereits zur Bestimmung der Biegungslinie berechnet worden sind.

Gleichung (18) setzt voraus, dass keiner der Winkel β gleich 90° ist. Will man nun die Aenderung Δl der Sehne AB des in der Fig. 103 dargestellten Fachwerks mit Endvertikalen, für dessen *obere* Gurtung die Biegungslinie bereits nach No. 47 bestimmt sei, durch die Werthe w ausdrücken — eine für die Folge wichtige Ausfgabe — so

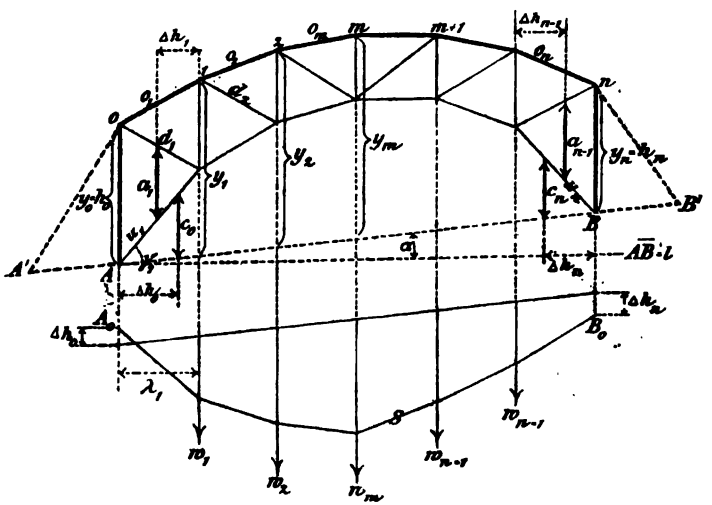


Fig. 103.

denke man sich die *starren* Stäbe $0A'$, $A'A$, nB', $B'B$ hinzugefügt. $A'A$ und $B'B$ erhalten die Richtung AB, und es ergiebt sich dann

$$\Delta l=\Delta(AB)=\Delta(A'B'),$$

so dass die Aufgabe zurückgeführt ist auf die Bestimmung der Aenderung

der Länge der Sehne $A'B'$ eines Stabzuges $A'012 \ldots m \ldots nB'$, dessen Anfangspunkt und Endpunkt in der fraglichen Sehne liegen. Man erhält

$$\Delta l = \sum_{0}^{n} y_m w_m + \sum_{1}^{n} \Delta' o_m. \tag{19}$$

worin $\Delta' o_m = \Delta o_m \sec \beta_m$, vergl. Seite 106.

Für den in der Fig. 103 dargestellten Fall, welcher der Fig. 98, Seite 112 entspricht, ist:

$$\begin{cases} w_0 = \dfrac{1}{h_0}(\Delta' u_1 - \Delta' d_1 - c_0 + a_1) \\ w_m = \dfrac{1}{h_m}(\Delta' u_m - \Delta' d_m - c_m + a_{m-1}) \end{cases} \tag{20}$$

worin: $c_0 = \Delta h_0 (\operatorname{tg}\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha)$ (wenn γ_1 nach oben positiv gezählt wird) und $a_1 = \Delta h_1 \dfrac{h_0}{\lambda_1}$. Vergl. Fig. 103, in welcher c_0, a_1, c_m, a_{m-1} beziehungsweise dieselben Vorzeichen haben, wie Δh_0, Δh_1, Δh_m, Δh_{m-1}.

Hinzugefügt werde, dass w_0 und w_m nur zur Berechnung von Δl, nicht aber bei Aufzeichnung der Biegungslinie $A_0 S B_0$ gebraucht werden, und dass die Schlusslinie durch die Aenderungen Δh_0 und Δh_m der Längen der Endvertikalen bestimmt ist. In Fig. 103 wurde Δh_0 positiv, Δh_m negativ angenommen; es erfährt dann bei ruhenden Punkten A und B der Knoten 0 eine Verschiebung nach oben, Knoten n eine solche nach unten.

Hat man die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte beider Gurtungen des in Fig. 104 abgebildeten Fachwerks, dessen Füllungs-

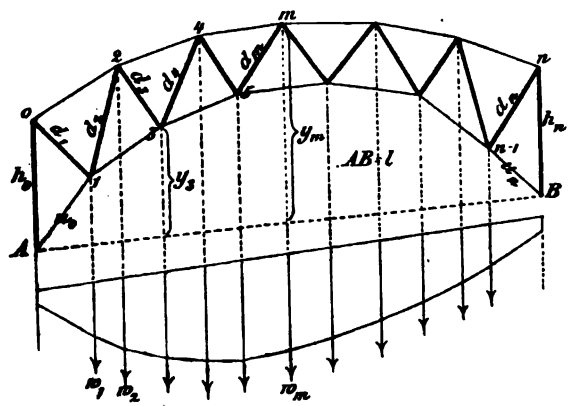


Fig. 104.

stäbe mit Ausnahme der Endvertikalen schräg stehen, nach No. 47, Fall I, ermittelt, also w_1 bis w_{n-1} nach Gleich. (8) und (9) berechnet,

so bestimmt man Δl mit Hilfe der Gleichung:

$$(21) \qquad \Delta l = \sum_{0}^{n} y_m w_m + \sum_{1}^{n} \Delta' d_m$$

worin zu setzen ist:

$$w_0 = \frac{1}{h_0}(\Delta' u_0 - \Delta' d_1 - c_0)$$

$$w_m = \frac{1}{h_m}(\Delta' u_m - \Delta' d_m - c_m).$$

c_0 und c_m haben die in Fig. 108 angegebene Bedeutung. Die Summe $\Sigma \Delta' d_m$ erstreckt sich über alle schrägen Füllungsstäbe (d_1 bis d_n).

Aufgabe. Es soll die Biegungslinie der unteren Gurtung des in der Fig. 105 dargestellten Fachwerkträgers bestimmt werden. Bei (0) hat der Träger ein festes, bei (5) ein bewegliches Auflagergelenk. Letzteres wird auf einer unter dem Winkel ψ geneigten Geraden geführt.

Nachdem die Gewichte w_1 bis w_4 mittels Formel (10) berechnet worden sind, wird mit der Polweite 1 das Seilpolygon *I II III IV V* gezeichnet und die Schlusslinie eingetragen. Diese Linie ist durch die Bedingungen bestimmt, dass der Knoten (5) die senkrechte Verschiebung $\delta_5 = -\Delta l \sin \psi$ erfährt, wo Δl die Aenderung der Stabzugsehne

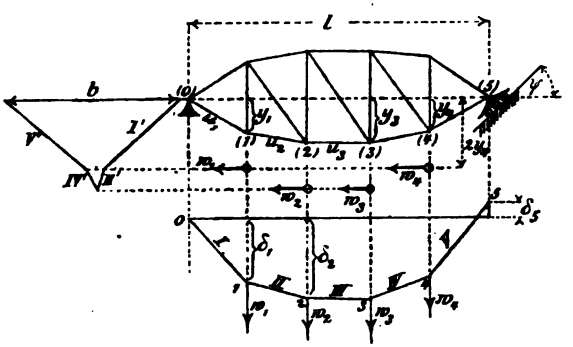


Fig. 106.

0—5 bedeutet, und dass ferner $\delta_0 = 0$ ist. Für Δl aber ergiebt sich, wenn 0—5 als Sehne des Stabzuges 0—1—2—3—4—5 aufgefasst wird, der Werth:

$$\Delta l = -\sum_{1}^{4} y_m w_m + \sum_{1}^{5} \Delta' u_m, \text{*)}$$

und zwar ist das erste Glied negativ, weil die Knoten 1, 2, 3, 4 unter-

*) Die Bedeutung von $\Delta' u$ ist auf Seite 106 erklärt.

halb der Sehne 0—5 liegen. Werden nun w_1, w_2, w_3, w_4 als wagerechte Kräfte betrachtet, die von 0—5 beziehungsweise die Abstände αy_1, αy_2, αy_3, αy_4 haben, wo α eine beliebige Zahl bedeutet,*) und wird zu diesen wagerechten Kräften mit der Polweite 1 ein Seilpolygon gezeichnet, so besteht zwischen der Strecke b, welche die äussersten Seiten dieses Polygons auf der Verlängerung von 0—5 abschneiden und den Gewichten w die Beziehung:

$$1 \cdot b = \sum_1^4 \alpha y_m w_m, \text{ und hieraus folgt: } \sum_1^4 y_m w_m = \frac{b}{\alpha}.$$

Da dem Seilpolyon $I\,II \ldots$ und $I'\,II' \ldots$ dieselbe Polweite entspricht, so ist $I' \perp I$, $II' \perp II$, ... In Fig. 105 wurde $\alpha = 2$ gewählt, weshalb sich schliesslich

$$\delta_5 = -\Delta l \sin\psi = \sin\psi \left(\tfrac{1}{2} b - \sum_1^5 \Delta' u_m\right)$$

ergiebt. Fig. 105 setzt voraus, dass δ_5 negativ ist, dass sich also Punkt (5) nach oben verschiebt.

Werden die δ in ν-facher Vergrösserung dargestellt (werden also die Polweiten 1 durch die Polweiten $1 : \nu$ ersetzt) so müssen in die Formel für δ_5 natürlich auch die ν-fachen Werthe $\Delta' u$ eingeführt werden.

49. Auffassung der Biegungsfläche als Momentenfläche. Berechnung der Durchbiegungen. Es sei $0'1'2' \ldots m' \ldots n'$ (Fig. 106) die Biegungslinie des Stabzuges $0—1—2— \ldots m \ldots n$ für die Verschiebungsrichtung AA' und AB die Schlusslinie. Die Durchbiegung an der Stelle m sei δ_m, und der zwischen dem Seilpolygon und der Geraden $0'n'$ gelegene Theil von δ_m möge mit η_m bezeichnet werden. Den Stabzug denken wir uns in einer senkrechten Ebene.

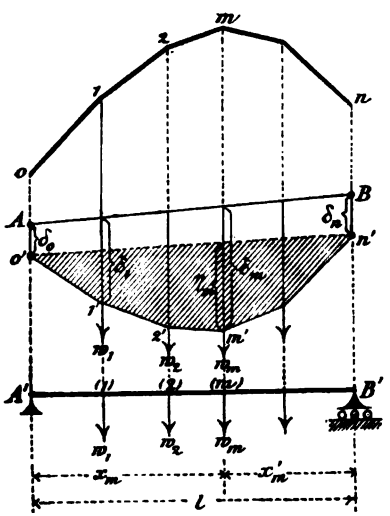


Fig. 106.

Die von der Biegungslinie und der Geraden $0'n'$ eingeschlossene Fläche lässt sich als die *Culmann*'sche Momentenfläche eines einfachen Balkens $A'B'$ deuten, dessen bewegliches Auflagergelenk auf einer zu AA'

*) Je flacher der Stabzug ist, desto grösser muss α gewäht werden, damit eine deutliche Figur erhalten wird.

rechtwinkligen Bahn geführt wird, dessen Stützpunkte auf den durch 0 und n zur Verschiebungsrichtung gezogenen Parallelen liegen und der mit $w_1, w_2, \ldots w_m, \ldots w_{n-1}$ belastet ist. Sind die w mittels einer der Gleichungen (3) oder (6) bis (17) berechnet worden, so ist die Polweite des Seilpolygons gleich der Zahl 1, und es besteht dann zwischen dem Biegungsmomente $M_{w.m}$ des Balkenquerschnitts m und der Verschiebung η_m die Beziehung:

$$1 \cdot \eta_m = M_{w.m}. \tag{22}$$

Wurde w_m aus Gleich. (4), Seite 102, gefunden, so ist die Polweite $= E$, und es ergiebt sich:

$$\eta_m = \frac{M_{w.m}}{E}. \tag{23}$$

Hiermit ist die Bestimmung der Durchbiegungen η auf die Berechnung der Biegungsmomente eines einfachen Balkens zurückgeführt. Sind die Verschiebungen δ_0 und δ_n bekannt, so findet man nach Ermittlung der η die δ mit Hilfe von:

$$\delta_m = \eta_m + \delta_0 \frac{x_m}{l} + \delta_n \frac{x_m}{l}.$$

Die Berechnung der Momente ist namentlich dann sehr einfach (und meistens schneller zum Ziele führend als die Aufzeichnung des Seilpolygons) wenn der Balken $A'B'$ symmetrisch belastet wird und die w-Kräfte in gleichen Abständen λ wirken. Man beachte dann das im § 20 des ersten Bandes gelehrte Verfahren und berechne zuerst die Verhältnisse $M_w \mid \lambda$.*)

Zahlenbeispiel. Für den auf Seite 107 (Fig. 88) untersuchten Fachwerkbalken wurde erhalten:

$w_1 = 0{,}0975$; $w_2 = 0{,}1830$; $w_3 = 0{,}1030$; $w_4 = 0{,}2575$; $w_5 = 0{,}1310$,

und zwar entsprechen diese Werthe den 180-fachen Längenänderungen der Stäbe. Die w wurden mittels der Gleichungen (8) und (9) berechnet, weshalb nach (22):

$$\eta_m = \frac{M_{w.m}}{180} = \frac{\lambda\,(M_{w.m} \mid \lambda)}{180}.$$

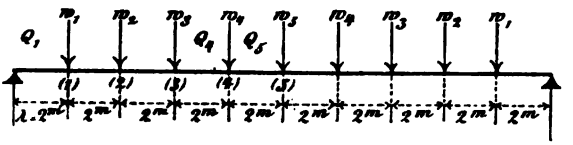


Fig. 107.

und mit $\lambda = 2000^{mm}$:

$$\eta_m = \frac{100}{9}\,(M_{w.m} \mid \lambda)\ \textit{Millimeter}.$$

*) $M \mid \lambda = \frac{M}{\lambda}$.

Die Berechnung der Querkräfte Q und der $(M_w \mid \lambda)$ geschieht nun nach folgendem Ansatz:

$Q_5 = \frac{1}{2}\, w_5 = 0{,}0655$	$(M_{w\cdot 1} \mid \lambda) = Q_1 = 0{,}7065$
$+ 0{,}2575 = w_4$	$+ 0{,}6090 = Q_2$
$Q_4 = 0{,}3230$	$(M_{w\cdot 2} \mid \lambda) = 1{,}3155$
$+ 0{,}1030 = w_3$	$+ 0{,}4260 = Q_3$
$Q_3 = 0{,}4260$	$(M_{w\cdot 3} \mid \lambda) = 1{,}7415$
$+ 0{,}1830 = w_2$	$+ 0{,}3230 = Q_4$
$Q_2 = 0{,}6090$	$(M_{w\cdot 4} \mid \lambda) = 2{,}0645$
$+ 0{,}0975 = w_1$	$+ 0{,}0655 = Q_5$
$Q_1 = 0{,}7065$	$(M_{w\cdot 5} \mid \lambda) = 2{,}1300.$

Hierauf erhält man (da $\delta_0 = 0$ und $\delta_n = 0$ ist, vergl. Fig. 106) die Durchbiegungen:

$$\delta_1 = \eta_1 = \frac{100}{9} \cdot 0{,}7065 = 7{,}85^{mm}; \quad \delta_2 = \frac{100}{9} \cdot 1{,}3155 = 14{,}6^{mm};$$

$\delta_3 = 19{,}35^{mm}$; $\delta_4 = 22{,}9^{mm}$; $\delta_5 = 23{,}7^{mm}$;

dieselben stimmen mit den in Fig. 88 durch Zeichnung ermittelten Verschiebungen überein.

50. Aufgaben. Die folgenden Beispiele zeigen die Anwendung der in No. 45—48 entwickelten Gesetze auf die Ermittlung der Biegungslinien der wichtigsten statisch bestimmten Träger. Die Form der Lösungen wählen wir so, dass auch die rechnerische Bestimmung der Durchbiegungen erledigt wird, indem wir angeben, in welcher Weise die Biegungslinien am zweckmässigsten als Momentenlinien gedeutet werden.

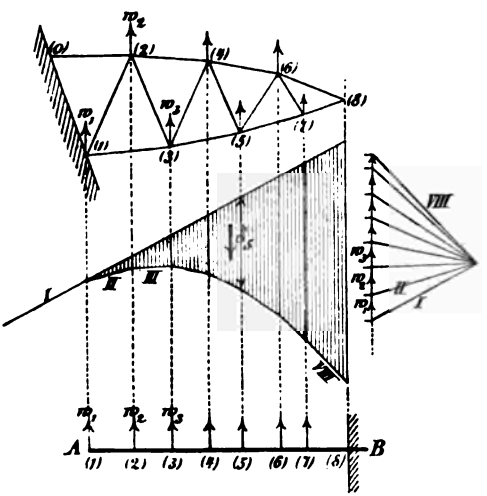


Fig. 108.

Wir setzen voraus, dass die Werthe w mittels der Gleichung (3) oder mit Hilfe von (6) bis (17) berechnet worden sind. Wird Gleichung (4) angewendet, so liefern die folgenden Regeln die E-fachen Durchbiegungen.

1. Beispiel. Gesucht sind die Durchbiegungen δ_2, δ_3, ... des in Fig. 108 dargestellten *Freiträgers*.

Man zeichne das Seilpolygon der gedachten Kräfte w_1 bis w_7 (welche in Fig. 108 negativ, also nach oben gerichtet angenommen wurden) und mache die erste Seite desselben zur Schlusslinie. Der neben δ_5 stehende Pfeil giebt die

Richtung der positiven Verschiebungen an. Die schraffirte Biegungsfläche lässt sich als Momentenfläche eines Balkens AB deuten, der bei B eingespannt, sonst aber frei und mit w_1, w_2, . . . belastet ist. Hat man also die Momente M_{w1}, M_{w2}, . . . dieses Balkens berechnet, so findet man:

$$\delta_m = M_{w.m}.$$

2. Beispiel. Gesucht sind die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte der unteren Gurtung des in der Fig. 109 abgebildeten *Fachwerkbalkens mit überstehenden Enden.* Ob A oder B auf einer wagerechten Bahn verschiebbar ist, ist gleichgültig.

Man bestimme (durch Zeichnung oder Rechnung) die Momentenlinie $C'A'NB'D'$ eines bei C' und D' frei aufliegenden Balkens, auf welchen die Lasten w_1, w_2, . . . (die in Fig. 109 theils positiv, also abwärts wirkend, theils negativ, mithin aufwärts gerichtet, angenommen wurden) wirken, bringe hierauf die Auflagersenkrechten in A' und B' mit der Momentenlinie zum Schnitte und lege durch diese beiden Punkte die Schlusslinie. Die in der Figur schraffirte Fläche ist die verlangte Biegungsfläche. Beispielsweise sind die Senkungen der Knotenpunkte 0 und 5 gleich δ_0 bezieh. δ_5.

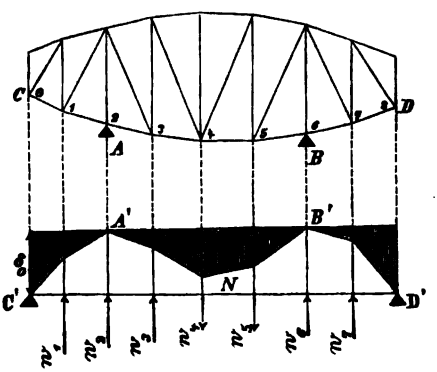


Fig. 109.

3. Beispiel. Es soll die Biegungsfläche der oberen Gurtung des *Gerber*'schen Balkens in Fig. 110 ermittelt werden. Die Vertheilung der auf wagerechten Bahnen beweglichen Auflagergelenke ist gleichgültig.

Nach Berechnung der w, welche theils positiv, theils negativ ausfallen, werden die folgenden Momentenlinien aufgetragen:

$C'ND'$ für den einfachen Balken $C'D'$ mit den Lasten w_1 bis w_3,
$D'LE'$ „ „ „ „ $D'E'$ „ „ „ w_4 „ w_{12},
$E'RF'$ „ „ „ „ $E'F'$ „ „ „ w_{13} „ w_{15}.

Hierauf werden die Senkrechten durch die Punkte A und B mit der Momentenlinie $D'LE'$ in A' und B' zum Schnitte gebracht, die Strecken:

$$\overline{A'A''} = \delta' = \text{Senkung des Punktes } A,$$
$$\overline{B'B''} = \delta'' = \text{„ „ „ } B$$

abgetragen und schliesslich der durch A'' und B'' gehende Linienzug $C'D''E''F'$, dessen Ecken senkrecht unter D und E liegen, eingezeichnet.

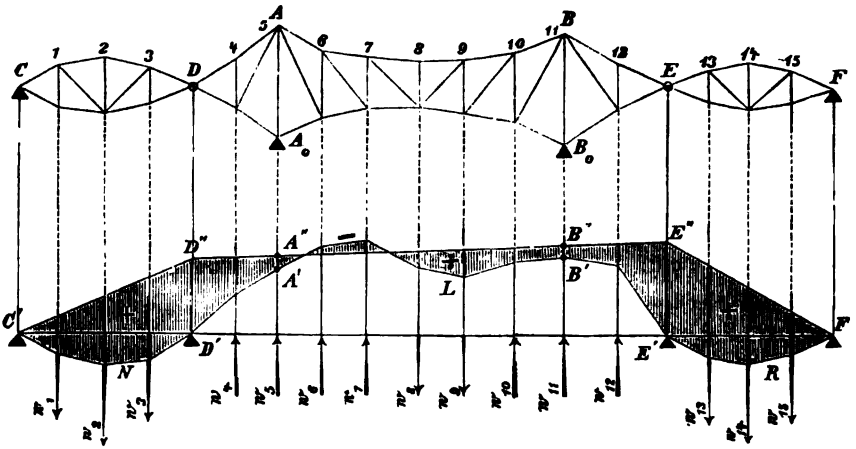


Fig. 110.

Die Fläche zwischen diesem Linienzuge und den Momentenlinien ist die gesuchte Biegungsfläche.

Bei starren Stützen A_0 und B_0 sind δ' und δ'' beziehungsweise gleich den Längenänderungen der Vertikalen AA_0 und BB_0. Erleiden diese Stäbe Verkürzungen, so liegen A'' und B'' oberhalb A' und B', sonst unterhalb.

4. Beispiel. Gesucht ist die Biegungslinie für die obere Gurtung des in Fig. 111 dargestellten *Fachwerkbogens mit drei Gelenken.* Die Werthe w_1 bis w_3 und w_5 bis w_7 seien nach No. 46 mit Hilfe der Winkeländerungen $\Delta\vartheta$ berechnet worden. Ist auch w_4 bekannt, so lässt sich die Momentenlinie des durch die Lasten w beanspruchten einfachen Balkens $A'B'$ ermitteln, worauf die Durchbiegungen $\delta_m = M_{w.m}$ gegeben sind. Um w_4 berechnen zu können, muss man die Winkeländerung $\Delta\vartheta_4$ haben, und diese lässt sich wie folgt bestimmen.

Nach Gleich. (4), Seite 98 ist die durch die Aenderungen der Winkel ϑ und der Spannungen σ in den Gurtstäben bedingte Aenderung Δl der Stützweite AB zunächst für den Fall $t = 0$:

$$\Delta l = y_1\Delta\vartheta_1 + y_2\Delta\vartheta_2 + y_3\Delta\vartheta_3 + y_4\Delta\vartheta_4 + y_5\Delta\vartheta_5 + y_6\Delta\vartheta_6 + y_7\Delta\vartheta_7 + \frac{\sigma_1}{E}\lambda_1 + \frac{\sigma_2}{E}\lambda_2 + \ldots + \frac{\sigma_8}{E}\lambda_8$$

und man erhält somit, bei gegebener Verschiebung Δl, für $\Delta\vartheta_4$ den Werth:

$$\Delta\vartheta_4 = \frac{\Delta l - \sum_1^3 y_m \Delta\vartheta_m - \sum_5^7 y_m \Delta\vartheta_m - \sum_1^8 \frac{\sigma_m}{E}\lambda_m}{y_4}. \tag{24}$$

Bei starren Stützen ist $\Delta l = 0$. Sind die Kämpfer A und B durch eine Zugstange vom Querschnitte F_0 verbunden, so ist Δl gleich der

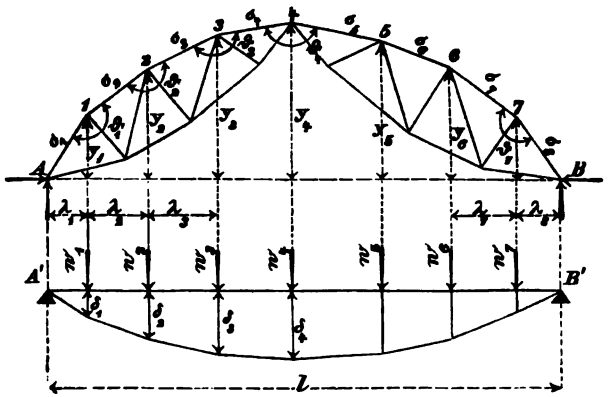


Fig. 111.

Verlängerung dieser den Horizontalschub H des Bogens aufnehmenden Stange; es folgt dann $\Delta l = \frac{Hl}{EF_0}$. Sollen Temperaturänderungen berücksichtigt werden, so sind die Spannungen σ in Gleich. (24) zu er-

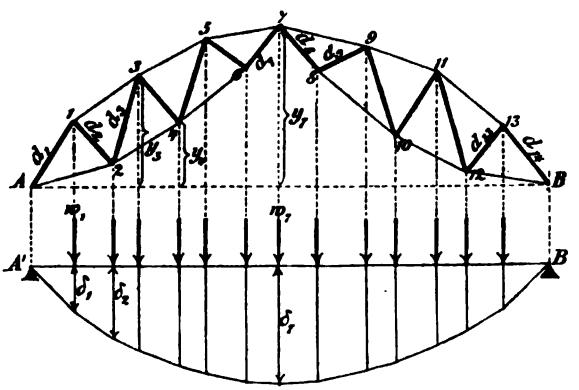


Fig. 112.

setzen durch die Werthe $\sigma_m + \varepsilon E t_m$, während für Δl der Werth $\frac{Hl}{EF_0} + \varepsilon t_0 l$ einzuführen ist. Hierbei bedeutet t_m die Temperatur-

änderung für den Stab s_m der oberen Gurtung und t_0 die Temperaturänderung für die Stange AB.

Will man die Biegungslinie ermitteln, ohne die Winkeländerungen zu berechnen, so bestimmt man w_1 bis w_6 (Fig. 112) und w_8 bis w_{13} mit Hilfe der in *No.* 47 entwickelten Formeln und wendet dann die Beziehung:

$$\Delta l = \sum_1^6 y_m w_m + y_7 w_7 + \sum_8^{13} y_m w_m + \sum_1^{14} \Delta' d_m \text{*)}$$

an. Man erhält:

$$w_7 = \frac{\Delta l - \sum_1^6 y_m w_m - \sum_8^{13} y_m w_m - \sum_1^{14} \Delta' d_m}{y_7}.$$

Zahlenbeispiel. (Figuren auf Tafel 2). Es soll die Biegungslinie der unteren Gurtung des in Fig. 113 abgebildeten Fachwerkbogens mit drei Gelenken für den Fall bestimmt werden, dass auf den Träger nur eine im Scheitelgelenk angreifende Einzellast 1000^k wirkt.

Sämmtliche Stäbe sind aus Winkeleisen zusammengesetzt; die Inhalte ihrer Querschnitte (ohne Abzug für Nietlöcher) sind in der folgenden Tabelle sowie in Fig. 113 zusammengestellt worden.

	Form des Querschnitts	Winkeleisensorte	Inhalt des Querschnitts
Obere Gurtung	⌐⌐	$80 \cdot 80 \cdot 10^{mm}$	30^{qcm}
Untere „	⌐⌐	$90 \cdot 90 \cdot 11$ „	74 „
Endvertikale	⌐⌐	$90 \cdot 90 \cdot 11$ „	37 „
Vertikale bei (1)	⌐⌐	$80 \cdot 80 \cdot 10$ „	30 „
„ „ (2) (3) (4)	⌐⌐	$60 \cdot 60 \cdot 10$ „	22 „
1te Diagonale	⌐⌐	$90 \cdot 90 \cdot 11$ „	37 „
2te und 5te Diagonale	⌐⌐	$80 \cdot 80 \cdot 10$ „	30 „
3te Diagonale	⌐⌐	$70 \cdot 70 \cdot 10$ „	26 „
4te „	⌐⌐	$60 \cdot 60 \cdot 10$ „	22 „

Die in die linke Hälfte des Trägernetzes (Fig. 113) eingeschriebenen Zahlen geben die Spannkräfte (in *kilogr.*) an; dieselben können u. A.

*) Die Stäbe $A1$, 6—7, 7—8 und $13B$, werden hier zweckmässig mit d_1, d_7, d_8, d_{14} bezeichnet.

sehr schnell mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes erhalten werden. [Der vorliegende Träger wurde im ersten Bande, § 46 und § 47, für verschiedene Belastungsweisen untersucht. Die in Fig. 113 angegebenen Spannkräfte stimmen mit den früher mit S_a bezeichneten überein und sind — in *Tonnen* ausgedrückt — in der Tabelle am Anhang von § 47, Band I, enthalten. Die dort fehlende Spannkraft im ersten Stabe des Untergurts findet man, indem man den Horizontalschub $H = 1875^t$ mit der Sekante des Stabneigungswinkels multiplicirt; es ergiebt sich der *Druck:* $1875 \frac{333}{300} = 2081^t$.]

Die schwarzen Zahlen in der rechten Hälfte des Trägernetzes (Fig. 113) bedeuten die Stablängen (in *cm*), während Fig. 114 eine übersichtliche Zusammenstellung der 10000-fachen Längenänderungen (aufgetragen im Maassstabe 1 : 40) bietet. Diese Werthe sind für $E = 1800000^t$ f. d. *qcm* (Schweisseisen) berechnet worden, und es ergab sich beispielsweise für den ersten Stab der oberen Gurtung:

$$10000\,\Delta o_1 = \frac{10000 \cdot O_1 o_1}{EF} = + \frac{10000 \cdot 315 \cdot 300}{1800000 \cdot 30} = + 17{,}5^{cm} = + 175^{mm},$$

für die Diagonale des ersten Feldes:

$$10000\,\Delta d_1 = \frac{10000 \cdot D_1 d_1}{EF} = - \frac{10000 \cdot 509 \cdot 485}{1800000 \cdot 37} = - 37{,}1^{cm} = - 371^{mm},$$

und für die Endvertikale:

$$10000\,\Delta h_0 = \frac{10000 \cdot V_0 h_0}{EF} = + \frac{10000 \cdot 400 \cdot 525}{1800000 \cdot 37} = + 31{,}5^{cm} = + 315^{mm}.$$

Nach Berechnung dieser Längenänderungen wurden die 10000-fachen Werthe $\Delta' u$, $\Delta' d$ (vergl. Seite 108) durch Zeichnung ermittelt. Für den ersten Stab der unteren Gurtung wurde z. B. der durch eine kräftig ausgezogene, mit dem fraglichen Stabe zusammenfallende Linie dargestellte Werth $10000\,\Delta' u = - 555^{mm}$ gefunden, für die erste Diagonale: $10000\,\Delta' d = - 600^{mm}$. Die Gewichte w wurden mittels Gleichung (10), Seite 109, bestimmt, da die Füllungsglieder die in der Fig. 91 dargestellte Anordnung haben. Es ist im vorliegenden Falle $\Delta' o = \Delta o$ und $b_m = a_m$, vergl. Fig. 91, also:

$$w_m = \frac{1}{h_m}(- \Delta o_m + \Delta' u_{m+1} + \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - a_{m-1} + a_m).$$

Die 10000-fachen Werthe a sind ebenfalls in der Fig. 114 angegeben*). Man erhält (mit Weglassung des Faktors 10000)

*) Die Strecke, welche a_8 darstellt, wurde — weil sehr klein — nicht eingezeichnet.

$w_1 = \frac{1}{8810}[-175-600-600+477-400+201] = -0{,}29$ | $y_1 w_1 = -\ 417{,}6^{mm}$
$w_2 = \frac{1}{8810}[-372-633-477+300-201+\ 77] = -0{,}49$ | $y_2 w_2 = -\ 1254{,}4$
$w_3 = \frac{1}{13190}[-529-663-300-104-\ 77-\ 11] = -0{,}89$ | $y_3 w_3 = -\ 2990{,}4$
$w_4 = \frac{1}{14110}[-473-616+104-601+\ 11-\ 53] = -1{,}15$ | $y_4 w_4 = -\ 4416{,}0$

$\Sigma \Delta' u = -(577+600+633+663+616)\cdot 2 = -6178.$ | $\sum_1^4 yw = -\ 9078{,}4$

Da nun im vorliegenden Falle:

$$\Delta l = 2\sum_1^4 yw + y_5 w_5 + \Sigma \Delta' u = 0$$

ist, so folgt

$$w_5 = -\frac{\left(\sum_1^4 yw\right) 2 + \Sigma \Delta' u}{y_5} = +\frac{9078{,}4 \cdot 2 + 6178}{4000} = +\ 6{,}08.$$

Die Ordinaten δ_1, δ_2, . . . der gesuchten Biegungslinie sollen zunächst berechnet und zu diesem Zwecke als Biegungsmomente eines mit w_1, w_2, . . . belasteten einfachen Balkens gedeutet werden. Für die Werthe $(M_w \mid \lambda)$ erhält man dann folgenden Ansatz:

$Q_5 = \frac{1}{2} w_5 = 3{,}04$	$(M_{w\cdot 1} \mid \lambda) = Q_1 = 0{,}22$
$-\ 1{,}15 = w_4$	$+\ 0{,}51 = Q_2$
$Q_4 = +\ 1{,}89$	$(M_{w\cdot 2} \mid \lambda) = +\ 0{,}73$
$-\ 0{,}89 = w_3$	$+\ 1{,}00 = Q_3$
$Q_3 = +\ 1{,}00$	$(M_{w\cdot 3} \mid \lambda) = +\ 1{,}73$
$-\ 0{,}49 = w_2$	$+\ 1{,}89 = Q_4$
$Q_2 = +\ 0{,}51$	$(M_{w\cdot 4} \mid \lambda) = +\ 3{,}62$
$-\ 0{,}29 = w_1$	$+\ 3{,}04 = Q_5$
$Q_1 = +\ 0{,}22$	$(M_{w\cdot 5} \mid \lambda) = +\ 6{,}66$

Da nun in die Formel für w die 10000-fachen Längenänderungen eingeführt wurden, so ergiebt sich:

$$\delta_m = \frac{M_w}{10000} = \frac{\lambda\,(M_{wm} \mid \lambda)}{10000} = \frac{8000\,(M_{wm} \mid \lambda)}{10000}, \quad \text{also:}$$

$\delta_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}22 = 0{,}066^{mm}$; $\quad \delta_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}73 = 0{,}219^{mm}$;
$\delta_3 = 0{,}8 \cdot 1{,}73 = 0{,}519^{mm}$; $\quad \delta_4 = 0{,}8 \cdot 3{,}62 = 1{,}086^{mm}$;
$\delta_5 = 0{,}8 \cdot 6{,}66 = 1{,}998^{mm}$.

Will man diese Werthe durch Zeichnung finden und zwar im Maassstabe 25 : 1, so ist für das Seilpolygon der Gewichte w die Polweite $10000 \cdot \frac{1}{300} \cdot \frac{1}{25} = \frac{4}{3}$ anzunehmen, weil der Längenmaassstab der Trägerzeichnung = 1 : 300 ist. Die Werthe w und die Polweite sind Zahlen, für welche in Fig. 113 der Maassstab $1 = 12^{mm}$ gewählt wurde.

Nach Ermittlung der Biegungslinie der *unteren* Gurtung ist diejenige der *oberen* Gurtung durch die Bedingung bestimmt, dass sich der Abstand zweier senkrecht übereinander gelegenen Knotenpunkte m um die Strecke Δh_m ändert. Für den oberen Knotenpunkt 2 ergiebt sich hiernach eine senkrechte Verschiebung von $0{,}219 - \Delta h_2 = 0{,}219 - 0{,}012 = 0{,}207^{mm}$. In Fig. 113 sind die auf zwei Stellen abgerundeten Werthe der Durchbiegungen zusammengestellt worden.

51. Vollständige Bestimmung der Verschiebungen. Durch Aufzeichnung einer Biegungslinie erhält man zunächst nur die Projektionen der Verschiebungen der Knotenpunkte auf eine feste Richtung, nicht aber diese Verschiebungen selbst. Wird also die vollständige Bestimmung der Formänderung eines Fachwerks verlangt, und will man diese Aufgabe mit Hilfe des Seilpolygons lösen, so muss man *zwei* Biegungslinien zeichnen. Wurde hierbei der Träger einmal auf ein Achsenkreuz (x_1, y_1), dann auf die Achsen (x_2, y_2) bezogen, Fig. 115, und sind mm_1 und mm_2 die für den Knoten m erhaltenen Ordinaten der für die Richtungen y_1 und y_2 ermittelten Biegungslinien, so ist die Verschiebung mm' des Punktes m bestimmt durch $m_1 m' \perp m_1 m$, $m_2 m' \perp m_2 m$. Es möge aber noch eine andere Darstellungsweise der Verschiebungen (die meistens den Vorzug verdienen wird) gezeigt werden, darin bestehend, dass nach Auftragung *einer* Biegungslinie das im § 2 gelehrte Stabzugverfahren zu Hilfe genommen wird. In Fig. 116 ist dieser Weg erläutert worden.

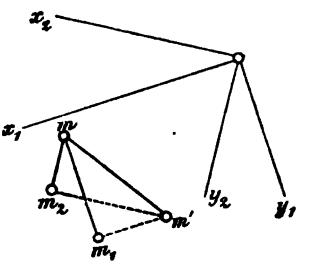


Fig. 115.

Gegeben seien die Verschiebungen Δy des auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz (x, y) bezogenen Stabzuges $0-1-2-3-\ldots$; ausserdem sei die Verschiebung Δx irgend eines Knotens bekannt. Es werde die vollständige Darstellung der Verschiebungen sämmtlicher Knoten gefordert.

AB sei die Schlusslinie der Biegungslinie $0''1''2''3''\ldots\ldots$ Die Punkte $0''$, $1''$, $2''\ldots$ projicire man durch Parallelen zu AB auf eine zur y-Achse parallele Gerade, welche von der Schlusslinie in A geschnitten werde, und ziehe durch A und durch die Projektionen $0'''$, $1'''$, $2'''\ldots$ der Punkte $0''$, $1''$, $2''$, $\ldots$ Parallelen $g_A, g_0, g_1, g_2, \ldots$ zur x-Achse. Auf der g_A nehme man den Pol O des verlangten Verschiebungsplanes beliebig an und bestimme nun zunächst die Verschiebung desjenigen Knotens, dessen Δx bekannt ist.

In Fig. 116 wurde Δx_2 als gegeben angenommen und der Strahl $O2'$, welcher die Verschiebung des Punktes 2 nach Grösse, Richtung und Sinn darstellt, eingezeichnet; sein Endpunkt $2'$ liegt auf der Ge-

raden g_2 (weil die Projektion von $O2'$ auf die Richtung y gleich Δy_2 sein muss) und im (negativ vorausgesetzten) Abstande Δx_2 von der durch O parallel zur y-Achse gezogenen Geraden OO'.

Trägt man nun an $2'$ die dem Stabe s_2 parallele Strecke $\Delta 2$ an, welche gleich der Aenderung der Länge s_2 ist und den Sinn $2-1$ oder $1-2$ erhält, je nachdem der Stab s_2 gedehnt oder verkürzt

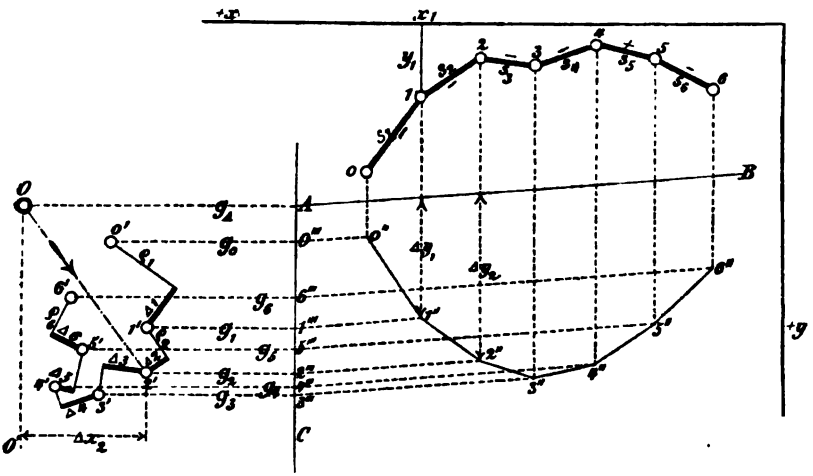


Fig. 116.

wird, und errichtet man im Endpunkte von $\Delta 2$ auf $\Delta 2$ ein Loth (ϱ_2), welches die Gerade g_1 in $1'$ schneidet, so giebt der Polstrahl $O1'$ nach Grösse, Richtung und Sinn die Verschiebung des Knotenpunktes 1 an, wie ohne weiteres aus dem im § 2 gelehrten Stabzugverfahren hervorgeht. Auf dieselbe Weise wurde die Lage des Punktes $0'$ bestimmt und — wieder von $2'$ aus — der Reihe nach $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ festgelegt. In Fig. 116 ist vorausgesetzt worden, dass alle Stäbe mit Ausnahme von s_5 Verkürzungen erleiden.

Will man die Δx durch Rechnung bestimmen, so differenzire man die Gleichung

$$s_m^2 = (x_{m-1} - x_m)^2 + (y_{m-1} - y_m)^2$$

und ersetze das Differentialzeichen durch das Zeichen Δ. Man erhält:

$$2 s_m \Delta s_m = 2 (x_{m-1} - x_m)(\Delta x_{m-1} - \Delta x_m) + 2 (y_{m-1} - y_m)(\Delta y_{m-1} - \Delta y_m)$$

und hieraus

$$\Delta x_{m-1} - \Delta x_m = \Delta s_m \sec \beta_m - (\Delta y_{m-1} - \Delta y_m) \operatorname{tg} \beta_m,$$

wo β_m den Neigungswinkel des Stabes s_m gegen die x-Achse bedeutet. Kennt man also einen der beiden Werthe Δx_{m-1} und Δx_m, so kann man auch den anderen angeben, so dass es möglich ist, mit Hilfe der vorstehenden Formel und mittels des in Nr. 49 zur Bestimmung der Δy entwickelten Verfahrens sämmtliche Seitenverschiebungen Δx, Δy eines Stabzuges *durch Rechnung*

zu finden, sobald ein Werth Δx und zwei Werthe Δy bekannt sind. Ein anderes rechnerisches Verfahren lässt sich leicht durch Projiciren des im § 2 eingeführten, durch Aneinanderreihung der Δs und ρ entstandenen Linienzuges auf zwei rechtwinklige Achsen x und y ableiten.

52. Einführung stellvertretender Stabzüge. Die in der Fig. 116 gezeigte Darstellungsweise der Verschiebungen wird besonders übersichtlich, sobald sämmtliche $\Delta s = 0$ sind, weil der Verschiebungsplan dann aus einem Linienzuge $0'1'2' \ldots$ besteht, dessen Eckpunkte $0'$, $1'$, $2'$, $\ldots$ in den Geraden g_0, g_1, g_2, $\ldots$ liegen, und dessen Seiten $0'-1'$, $1'-2'$, $\ldots$ rechtwinklig zu den entsprechenden Stabrichtungen $0-1$, $1-2$, $\ldots$ sind.*) Auch ist zu beachten, dass sich im Falle des Verschwindens der Δs für die Gewichte w (nach Gleich. 3, S. 101) die *von der Lage des Achsenkreuzes x, y unabhängigen* Werthe

$$w_m = \Delta \mathfrak{H}_m$$

ergeben, und es liegt daher der Gedanke sehr nahe, dass es zuweilen vortheilhaft sein dürfte, den *elastischen* Stabzug behufs Darstellung der Verschiebungen seiner Knotenpunkte durch einen aus *starren* Gliedern bestehenden zu ersetzen.**)

Zu einem solchen *stellvertretenden Stabzuge* gelangt man, indem man zwischen je zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten $m-1$, m einen neuen Knoten m_0 annimmt und diesen sowohl mit $m-1$ als auch mit m durch starre (in Fig. 117 gestrichelt angegebene) Stäbe verbindet. Der neue Randwinkel bei m sei $\alpha_m = \mathfrak{H}_m + \omega_m + \varkappa_{m+1}$, der Randwinkel bei m_0 sei τ_m. Die Aenderungen von τ_m und α_m sind:

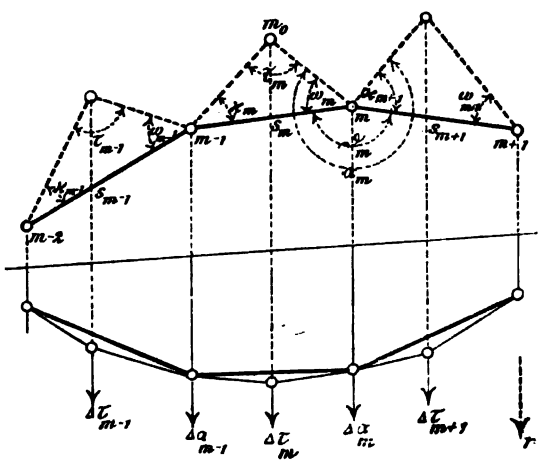


Fig. 117.

*) Vergl. auch Seite 96, Fig. 79. Dort wurde dieses Gesetz bereits auf anderem Wege abgeleitet.

**) Der Umstand, dass $w_m = \Delta \mathfrak{H}_m$ von der Lage des Achsenkreuzes (x, y) unabhängig ist, vereinfacht auch die Anwendung zweier Biegungslinien. Schliessen die beiden Richtungen, welche den Gewichten w zugeschrieben werden sollen,

$$\Delta\tau_m = \frac{\Delta s_m}{s_m}(\operatorname{cotg}\varkappa_m + \operatorname{cotg}\omega_m)$$

$$\Delta\alpha_m = \Delta\vartheta_m + \Delta\omega_m + \Delta\varkappa_{m+1} = \Delta\vartheta_m - \frac{\Delta s_m}{s_m}\operatorname{cotg}\varkappa_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}}\operatorname{cotg}\omega_{m+1}.$$

Betrachtet man die $\Delta\tau$ und $\Delta\alpha$ als Kräfte, welche in der Richtung r wirken, und verbindet man dieselben durch ein Seilpolygon mit der Polweite Eins, so ist dieses Seilgolygon die Biegungslinie des aus starren Gliedern bestehenden Stabzuges für die Richtung r, und das eingeschriebene Polygon, dessen Ecken den Knoten . . . $(m-2)$, $(m-1)$, m, $(m+1)$ . . . entsprechen, ist die Biegungslinie des elastischen Stabzuges . . . $(m-2)$ $(m-1)$ m $(m+1)$ . . .

Die Punkte m_0 wird man so annehmen, dass die Cotangenten der Winkel $\varkappa$ und ω runde Zahlen sind. Wählt man z. B. $\omega_m = \varkappa_m = 45°$, so erhält man sehr einfach:

$$\Delta\tau_m = 2\frac{\Delta s_m}{s_m} \text{ und } \Delta\alpha_m = \Delta\vartheta_m - \frac{\Delta s_m}{s_m} - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}}.*)$$

Hat die Elasticitätsziffer E für alle Stäbe denselben Werth, so ersetze man die Gewichte $\Delta\tau$ und $\Delta\alpha$ durch die Gewichte $E\Delta\tau$ bezw. $E\Delta\alpha$ und die Polweite 1 durch die Polweite E. Sollen dann Temperaturänderungen unberücksichtigt bleiben, so treten in den vorstehen-

---

den Winkel ψ ein, so denke man das Kräftepolygon nach Aufzeichnung der ersten Biegungslinie um ψ gedreht, um einzusehen, dass jede Seite des zweiten Seilpolygons mit der entsprechenden Seite der ersten Biegungslinie den Winkel ψ bilden muss. Mit Rücksicht auf die käuflichen Winkelbrettchen wird man für ψ einen der Winkel: 30°, 60°, 45°, 90° wählen. Auf weitere Beziehungen zwischen den beiden Biegungslinien gehen wir nicht ein, da sich der Linienzug $0'1'2'3'$ . . . ebenfalls schnell zeichnen lässt und die Verschiebungen sofort nach Grösse und Richtung liefert, so dass man die Zusammensetzung der Seitenverschiebungen (nach Fig. 115) spart.

*) Es ist darauf zu achten, dass keiner der hinzugefügten starren Stäbe die Richtung r erhalten darf, wenn ausser der Biegungslinie noch die vollständige Darstellung der Verschiebungen mit Hilfe des Linienzuges $0'1'2'$ . . . (Fig. 116) ohne jede weitere Zwischenrechnung erfolgen soll. Diese Zwischenrechnung, welche, wie leicht einzusehen ist, in der Ermittlung des Werthes ρ für jeden in die Richtung r fallenden Stab bestehen würde, ist zwar nicht schwierig, immerhin aber umständlicher als die Annahme besonderer Winkel ω und $\varkappa$ für diese Stelle des Stabzuges. Wird nur die Biegungslinie für die Richtung r verlangt, so dürfen Stäbe von der Richtung r vorkommen, denn es entsprechen dann den beiden Endpunkten solcher Stäbe im Sinne r gleichgrosse Verschiebungen. Zu beachten ist auch, dass die Gewichte $\Delta\tau$ und $\Delta\alpha$ in der Reihenfolge . . . $\Delta\tau_{m-1}$, $\Delta\alpha_{m-1}$, $\Delta\tau_m$, $\Delta\alpha_m$, $\Delta\tau_{m+1}$, $\Delta\alpha_{m+1}$ . . . durch das Seilpolygon verbunden werden müssen.

den Formeln an die Stelle der Verlängerungsverhältnisse $\Delta s/s$ die Spannungen σ. Ist $\omega = \varkappa = 45°$ so erhält man:

$$E\Delta\tau_m = 2\sigma_m, \quad E\Delta\alpha_m = E\Delta\vartheta_m - \sigma_m - \sigma_{m+1}.^*)$$

Für die in der Fig. 118 angegebene Lage der eingeschalteten Punkte m_0 ergiebt sich:

$$\Delta\tau_m = -\frac{\Delta s_m}{s_m}(\operatorname{cotg}\varkappa_m + \operatorname{cotg}\omega_m)$$

$$\Delta\alpha_m = \Delta\vartheta_m + \frac{\Delta s_m}{s_m}\operatorname{cotg}\varkappa_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}}\operatorname{cotg}\omega_{m+1}.$$

Welche der beiden Anordnungen (Fig. 117 oder Fig. 118) gewählt wird, ist für das Ergebniss gleichgiltig. Man strebe zur Erzielung übersichtlicher Kräftepolygone nach Möglichkeit gleiche Vorzeichen der Gewichte w an. Z. B. wird man bei einfachen Balkenbrücken in der Regel für die $\Delta\alpha$ der oberen und auch der unteren Gurtung positive Werthe erhalten und sich infolgedessen bei Untersuchung einer oberen Gurtung für die in Fig. 118 gegebene Anordnung entscheiden, weil die Δs und σ der Obergurtstäbe negativ sind. Bei einer unteren Gurtung wird besser nach Fig. 117 verfahren.

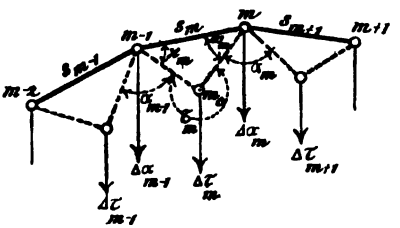


Fig. 118.

Eine andere Behandlungsweise des stellvertretenden Stabzuges schliesst sich der auf Seite 104 bis 112 gelösten Aufgabe an: die Gewichte w_m zu bestimmen, ohne vorher die Winkeländerungen $\Delta\vartheta$ zu berechnen. Dieses Verfahren kommt natürlich nur dann in Frage, wenn die Winkeländerungen nicht ohnehin zu anderen Zwecken**) angegeben werden müssen; dasselbe möge an dem in Fig. 119 dargestellten Beispiele erläutert werden.

Gesucht sei die Biegungslinie (für die Richtung r) der Gurtung $\ldots (m-1)\ m\ (m+1)\ldots$ eines einfachen Dreiecknetzes. Die den eingeschalteten Knoten m_0 entsprechenden Gewichte $\Delta\tau_m$ werden wie vorhin berechnet, das Gewicht w_m für einen Knoten m der Gurtung hingegen nach der auf Seite 105 bewiesenen Gleichung:

$$w_m = \Sigma\mu \cdot \Delta s.$$

---

*) Vergl. S. 102. Dem Einfluss von Temperaturänderungen t kann man auch Rechnung tragen, indem man σ ersetzt durch $\sigma + \varepsilon Et$.

**) Z. B. Bestimmung von Nebenspannungen. Vergl. auch Seite 95.

Hierin bedeutet μ die Spannkraft, welche in einem Stabe des in Fig. 119[I] herausgetragenen Fachwerktheiles in Folge der drei unter sich im Gleichgewichte befindlichen parallelen äusseren Kräfte $\frac{1}{e}, \frac{1}{e'}, \left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e'}\right)$ entsteht und Δs die Längenänderung des Stabes für denjenigen Belastungszustand, für welchen die Biegungslinie gesucht wird. e und e' sind die gegenseitigen Abstände jener 3 Kräfte, deren Richtung gelegentlich der früheren Ableitung der Gleichung $w_m = \Sigma \mu \Delta s$ parallel den w vorausgesetzt wurde, jetzt aber willkürlich gewählt werden darf, weil ja die Grösse der w eines aus starren Gliedern bestehenden Stabzuges unabhängig von der Richtung r ist. Die Summe Σ erstreckt

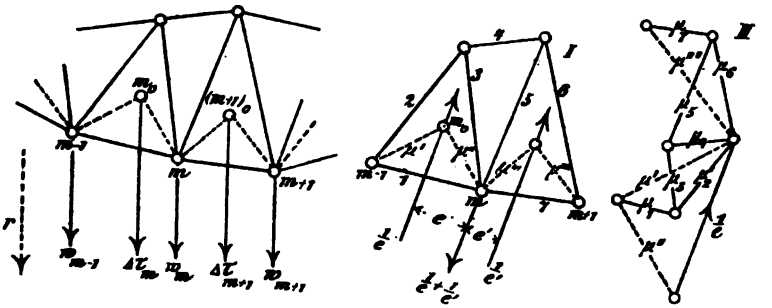


Fig. 119.

sich über die in der Fig. 119[I] mit den Ziffern 1, 2, 3, . . . 6, 7 bezeichneten Stäbe, deren Spannkräfte μ in Fig. 119[II] mittels eines Cremona'schen Kräfteplanes dargestellt wurden. Für die Fachwerkstäbe 3 und 5 ergaben sich Zugkräfte μ, für die übrigen Druckkräfte. Sind also die Längenänderungen der Stäbe 1, 2, 3 . . . bezieh. $= \Delta_1$, Δ_2, Δ_3, . . . so folgt:

$$w_m = -\mu_1 \Delta_1 - \mu_2 \Delta_2 + \mu_3 \Delta_3 - \mu_4 \Delta_4 + \mu_5 \Delta_5 - \mu_6 \Delta_6 - \mu_7 \Delta_7.$$

Es wird sich empfehlen, die Richtung der Kraft $\frac{1}{e}$ so zu wählen, dass e einen festen, durch eine runde Zahl ausdrückbaren Werth annimmt. Bei Ermittlung der verschiedenen w sind also verschiedene Kraftrichtungen anzunehmen.

Eine wichtige Anwendung der stellvertretenden Stabzüge findet sich in No. 75.

Uebungsaufgaben zu den §§ 1 bis 3.

1. Aufgabe. Es soll die Aenderung $\Delta \vartheta_5$ des Randwinkels ϑ_5 des in Fig. 120 dargestellten Fachwerks mit Hilfe eines *Williot*'schen Verschiebungsplanes bestimmt werden.

Lösung. Man nehme den Punkt a und die Richtung des Stabes ab als festliegend an, ermittle nach No. 82 (S. 58) der Reihe nach die Verschiebungen Ob', Oc', Od', Oe' der Punkte b, c, d, e und denke hierauf die Verschiebung von e nach dem Stabzugverfahren bestimmt. Man erkennt dann, dass das Loth von e' auf $\Delta 7$ gleich $s_7 \Delta \vartheta_b$ ist und findet

$$\Delta \vartheta_b = \frac{\rho}{s_7}.$$

Der Drehungssinn von s_7 gegen s_1 ist in der Figur durch einen Pfeil angegeben worden; hiernach ist $\Delta \vartheta_b$ positiv. Wir setzten voraus, dass die Stäbe 2, 4, 5 gedehnt, die übrigen verkürzt werden.

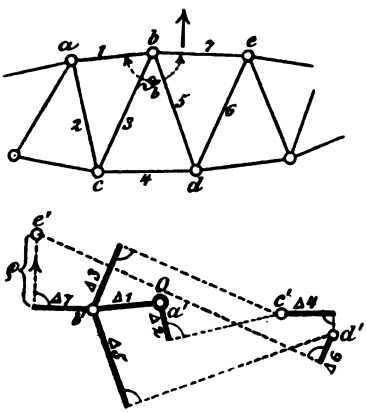


Fig. 120.

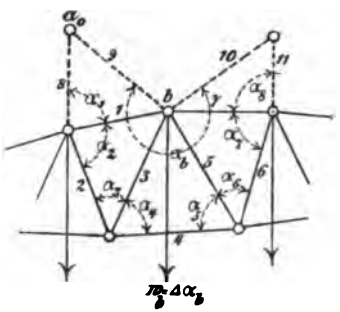


Fig. 121.

2. Aufgabe. Behufs Darstellung der Biegungslinie der oberen Gurtung des in Fig. 121 abgebildeten Fachwerks soll das Gewicht w_b mit Hilfe eines Williot'schen Planes dargestellt werden und zwar ohne gesonderte Ermittlung von $\Delta \vartheta_b$.

Lösung. Man füge die zu w_b parallelen starren beliebig langen Stäbe 8 und 11 hinzu, ferner die starren Stäbe 9 und 10. Dann ist (wenn die Polweite 1 gewählt wird) $w_b = \Delta \alpha_b$, welcher Werth nun auf die soeben gezeigte Weise bestimmt wird. Man nehme hierbei a_0 und die Richtung des Stabes 9 als festliegend an.

3. Aufgabe. Mit Bezugnahme auf Fig. 121 beweise man, dass, sobald die Polweite $= E$ gewählt wird und $\frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma}{E}$ ist, das Gewicht w_b nach der Formel

$$w_b = \operatorname{cotg} \alpha_1 (0 - \sigma_1)^*) + \operatorname{cotg} \alpha_2 (\sigma_2 - \sigma_1) + \operatorname{cotg} \alpha_3 (\sigma_3 - \sigma_3) + \operatorname{cotg} \alpha_4 (\sigma_4 - \sigma_3) + \operatorname{cotg} \alpha_5 (\sigma_4 - \sigma_5) + \operatorname{cotg} \alpha_6 (\sigma_6 - \sigma_5) + \operatorname{cotg} \alpha_7 (\sigma_6 - \sigma_7) + \operatorname{cotg} \alpha_8 (0 - \sigma_7)$$

berechnet werden darf.

Lösung. Man gelangt zur vorstehenden Formel ohne weiteres, indem man nach Gl. (2) Seite 90 die Aenderungen der Dreieckswinkel, aus denen sich

*) Zur besseren Uebersicht wurden die Spannungen 0 der Stäbe 8 und 11 mit aufgeführt.

α_b zusammensetzt, bestimmt und dieselben addirt. Die Multiplikationen mit cotg. werden zweckmässig zeichnerisch ausgeführt. Man könnte auch den Ausdruck nach den Spannungen σ ordnen. Der Einfluss von σ_2 auf w_b ist dann $= \sigma_2 \frac{s_2}{r_2}$, wo s_2 die Länge des Stabes 2 und r_2 das Loth von b auf 2 bedeutet. Wie stellt man den Einfluss der Spannung eines von b ausgehenden Stabes z. B. den von σ_3 am bequemsten dar?

4. Aufgabe. Gesucht sei die Biegungslinie (für die Richtung r) eines Stabzuges, dessen Δs und $\Delta \vartheta$ gegeben sind; einzelne Stäbe haben aber die Richtung r.

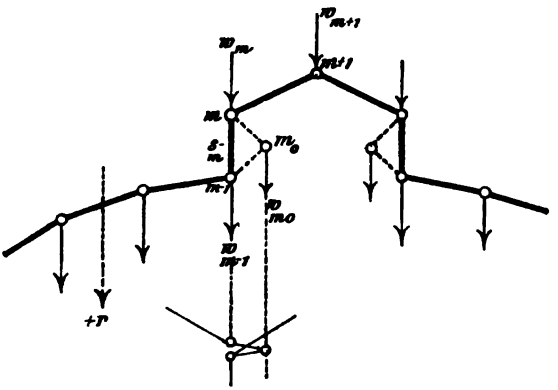


Fig. 122.

Lösung. Fällt s_m mit der Richtung r zusammen, so schalte man nach Fig. 122 zwischen $m-1$ und m mittels starrer Stäbe, welche mit s_m Winkel von 45° einschliessen, einen neuen Knoten m_0 ein, dessen Gewicht $w_{m0} = -2\frac{\Delta s_m}{s_m}$ ist. Für w_{m-1} und w_m erhält man:

$$w_{m-1} = \Delta\vartheta_{m-1} + \frac{\Delta s_m}{s_m}$$

$$w_m = \Delta\vartheta_m + \frac{\Delta s_m}{s_m}.$$

Ist Δs_m positiv, so ist w_{m0} im Sinne $(-r)$ anzunehmen. Figur 122 setzt also voraus, dass der Stab s_m gedrückt wird. Zu beachten ist, dass die Gewichte in der Reihenfolge w_{m-1}, w_{m0}, w_m durch das Seilpolygon verbunden werden müssen wie dies in Fig. 122 angedeutet ist.

5. Aufgabe. Es soll der Verschiebungsplan für die untere Gurtung 0 — 2 — 4 — 6 des in der Fig. 123 dargestellten Trägers mit Hilfe eines stellvertretenden, aus starren Gliedern bestehenden Stabzuges 0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 gezeichnet werden.

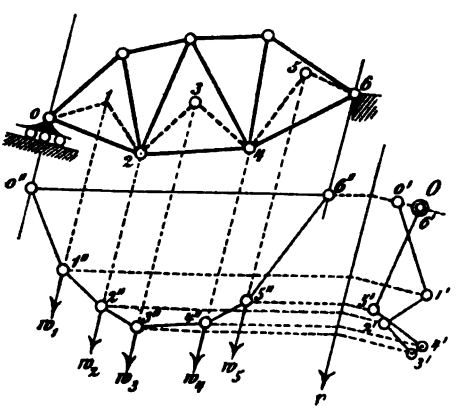


Fig. 123.

Die ***Lösung*** besteht darin, dass zuerst nach No. 52 die Biegungslinie für die zur Bahn des beweglichen Auflagers rechtwinklige Richtung r gezeichnet wird, weil dann die Schlusslinie 0″6″ sofort gegeben ist. Hierauf wird der Linienzug 6′5′4′3′2′1′0′ nach No. 51 bestimmt. Die Strahlen $O0'$, $O2'$, $O4'$ stellen nach Grösse, Richtung und Sinn die Verschiebungen der Punkte

0, 2, 4 dar. — Von den drei für diesen Träger in diesem Buche mitgetheilten Verfahren (vergl. Fig. 88, 105, 123) ist das erste im allgemeinen das einfachste. Die Lösung in Fig. 105 verdient den Vorzug, sobald die lothrechten Verschiebungen δ durch Rechnung bestimmt werden sollen und die zuletzt angegebene (Fig. 123) wird vortheilhaft, sobald die Winkeländerungen noch zu anderen Zwecken (z. B. zur Ermittlung von Nebenspannungen) gebraucht werden.

6. Aufgabe. Ein Fachwerk sei in der Weise erzeugt, dass zu einem Stabdreieck abc zwei neue Stäbe gefügt werden, die in einem neuen Knoten d miteinander verbunden sind, hierauf an zwei beliebige Knoten dieses Stabgebildes wieder zwei Stäbe mit einem Knoten e angeschlossen werden u. s. f. Es sollen die Winkeländerungen dieses Fachwerks berechnet werden.

Die *Lösung* stützt sich auf die Gleichung

$$\Delta s_1 = h\,\Delta\alpha_1 + \Delta s_2 \cos\alpha_2 + \Delta s_3 \cos\alpha_3,$$

welche einen besonderen Fall der auf S. 98 für Δl abgeleiteten Formel darstellt, und durch welche die Aenderung der Seitenlänge s_1 eines Dreiecks (Fig. 125) bestimmt ist, sobald die Aenderungen des Gegenwinkels und der beiden anderen Dreieckseiten bekannt sind.

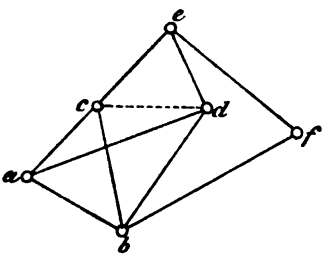


Fig. 124.

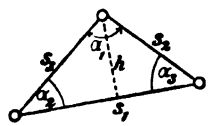


Fig. 125.

Liegt beispielsweise das Fachwerk in Fig. 124 vor, so berechnet man auf die in No. 40 gezeigte Weise die Winkeländerungen der Dreiecke acb und abd und drückt hierauf die Aenderung der Entfernung cd durch die Längenänderungen $\Delta\overline{ac}$ und $\Delta\overline{ad}$ der Seiten ac und ad und durch die Winkeländerung $\Delta(cad) = \Delta(cab) - \Delta(dab)$ aus. Jetzt bestimmt man die Winkeländerungen der Dreiecke acd, cdb und cde, drückt $\Delta\overline{eb}$ durch $\Delta\overline{ce}$, $\Delta\overline{cb}$ und $\Delta(ecb)$ aus, u. s. w.

Auf diesem Wege lassen sich z. B. sämmtliche Winkeländerungen der in den Figuren 49 und 50 abgebildeten Fachwerke berechnen, wie denn überhaupt leicht einzusehen ist, dass sich mit Hilfe der Formel für Δs_1 und mittels der in No. 37 u. 38 durchgeführten allgemeineren Untersuchungen die in den §§ 2 u. 3 angegebenen Darstellungsweisen auf ähnliche Art erweitern lassen, wie dies im § 1 mit dem von Williot ursprünglich auch nur für einen sehr einfachen Fall gegebenen Verfahren geschehen ist.

§ 4.

Einflusslinien und Einflusszahlen für elastische Verschiebungen.

53. — **Mit Hilfe der in den vorigen Paragraphen gelehrten Verfahren ist man im Stande, die Formänderung eines statisch bestimmten, irgendwie belasteten Fachwerks festzustellen. Es bedürfen aber diese Untersuchungen noch einer Ergänzung für den Fall, dass der Einfluss der am Fachwerk angreifenden Lasten P_1, P_2, . . . auf irgend eine der**

die Formänderung bestimmenden Grössen *gesondert* angegeben werden soll, etwa zu dem Zweck, die Grenzwerthe dieser Grösse (für welche natürlich das Gesetz von der Zusammenzählung der einzelnen Wirkungen gelten muss) zu ermitteln. Zwar könnte man diese Aufgabe in der Weise behandeln, dass man das Fachwerk zuerst nur mit P_1 belastet, dann nur mit P_2, u. s. w. und für jeden dieser Fälle einen Verschiebungsplan zeichnet; doch ist dieses Verfahren so umständlich, dass die Aufsuchung einer anderen Lösung geboten erscheint. Die Handhabe hierzu bietet der Maxwell'sche Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen (S. 30), dessen Anwendung zunächst an zwei Beispielen gezeigt werden soll.

1. Aufgabe. Gesucht ist die Einflusslinie für die Senkung δ_m des Knotenpunktes m eines durch lothrechte Lasten P beanspruchten Fachwerkträgers.

Man nehme das gewichtslose Fachwerk nur mit einer in m angreifenden lothrechten Kraft Eins belastet an, ermittle die herbei entstehenden Spannkräfte S und Längenänderungen Δs und bestimme (nach einem der in den §§ 1—3 angegebenen Verfahren) die diesen Δs entsprechende Biegungslinie derjenigen Gurtung (beispielsweise ACB), an welcher die Lasten P angreifen sollen. Ist nun die bei k gemessene Ordinate dieser Biegungslinie $= \eta_k$, so verschiebt die in m angreifende Last Eins den Knoten k im lothrechten Sinne um η_k, und es wird deshalb (nach dem Maxwell'schen Satze) eine in k angreifende Last Eins den Knotenpunkt m ebenfalls um η_k verschieben. Hieraus folgt aber, dass die gezeichnete Biegungslinie die Einflusslinie für δ_m ist.

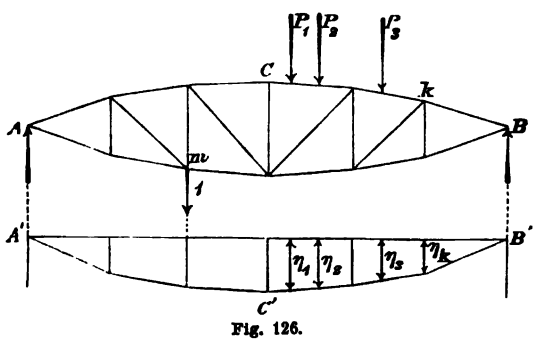


Fig. 126.

Die Lasten P_1, P_2, P_3 denen die Ordinaten η_1, η_2, η_3 entsprechen, verursachen beispielsweise bei m die Senkung

$$\delta_m = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3.$$

Beispiel. In Fig. 113 auf Tafel 2 wurden die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte eines Bogenträgers mit drei Gelenken für den Fall aufgetragen, dass im Scheitelgelenk eine Last $1^t = 1000^k$ wirkt. Die für die untere und obere Gurtung erhaltenen Biegungslinien sind daher die Einflusslinien für die lothrechte Verschiebung δ des Scheitelgelenks; mit Hilfe der ersteren kann der Einfluss von Lasten festgestellt werden, welche in den unteren Knotenpunkten angreifen, mittels der zweiten der Einfluss der Belastung der oberen

Knoten. Ist die oben angreifende Verkehrslast: $p = 0{,}665^t$ f. d. Meter und $p\lambda = 0{,}665 \cdot 3{,}0 = 2^t$ f. d. Knotenpunkt, so folgt für volle Belastung (also mit Vernachlässigung der kleinen negativen Beitragsstrecken an den Trägerenden)

$$\delta_{mm} = p\lambda\,[2{,}00 + 2\,(1{,}10 + 0{,}52 + 0{,}21 + 0{,}04)] = 11{,}5^{mm}.$$

Von der ständigen Belastung $g\lambda = 0{,}37 \cdot 3{,}0 = 1{,}11^t$ eines Feldes möge der Theil $g_u\lambda = 0{,}27$ (Gewicht der Hälfte eines Feldes des Hauptträgers) an der unteren Gurtung angreifend angenommen werden, der Theil $g_o\lambda = 0{,}84^t$ an der oberen Gurtung. Die Durchbiegung in Folge der ständigen Belastung beträgt dann:

$$\delta_g = g_u\lambda\,[2{,}00 + 2\,(1{,}09 + 0{,}52 + 0{,}22 + 0{,}07)]$$
$$+ g_o\lambda\left[2{,}00 + 2\,(1{,}10 + 0{,}52 + 0{,}21 + 0{,}04 - \frac{0{,}03^{*})}{2}\right] = 6{,}4^{mm}.$$

2. Aufgabe. **Ein Fachwerk sei mit beliebig gerichteten Kräften $P_1, P_2, \ldots$ belastet. Gesucht sei die Projektion δ_r der Verschiebung eines Knotens C auf eine feste Richtung r. Der Einfluss jeder Last P soll gesondert angegeben werden.**

Man zeichne den Verschiebungsplan für den Fall, dass auf das Fachwerk nur eine Last $P_r = 1$ wirkt, welche in C angreift und die Richtung r hat. Für irgend einen Knoten m ergebe dieser Plan die Verschiebung $m''\,m'$, deren Projektion auf die Richtung von P_m mit $\pm\,\delta_{mr}$ bezeichnet werden möge,) wobei das obere oder untere Vorzeichen gelten soll, jenachdem der Sinn jener Projektion mit dem Sinne von P_m übereinstimmt oder nicht.**

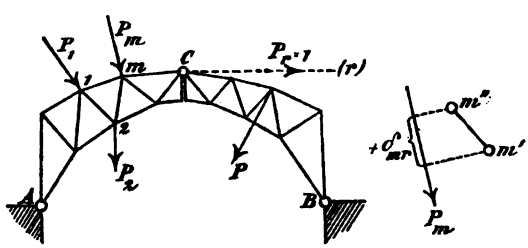


Fig. 127.

Nun ist aber nach dem Maxwell'schen Satze die gesuchte Verschiebung δ_{rm}, welche Punkt C in der Richtung r und in Folge von $P_m = 1$ erfährt, ebenso gross wie die bereits dargestellte Verschiebung δ_{mr} welche der Punkt m in der Richtung P_m und in Folge von $P_r = 1$ erleidet und daraus folgt, dass der Einfluss von P_m auf die Verschiebung δ_r gleich $P_m\delta_{mr}$ ist. Auf die gleiche Weise findet man die Einflüsse der Lasten $P_1, P_2, \ldots$ so dass man schliesslich

$$\delta_r = P_1\delta_{1r} + P_2\delta_{2r} + \ldots + P_m\delta_{mr} + \ldots$$

---

*) Die Knotenpunkte an den Trägerenden sind nur mit $\frac{1}{2}\,g_o\lambda$ belastet.

**) Nach der auf Seite 81 eingeführten Bezeichnungsweise.

erhält. Die Grössen δ_{1r}, δ_{2r}, ... nennen wir kurz die den einzelnen Lasten P_1, P_2 ... entsprechenden *Einflusszahlen;* sie ergeben sich sämmtlich aus dem für $P_r = 1$ gezeichneten Verschiebungsplane.

54. — Das in den vorstehenden Beispielen angewandte Verfahren ist ein allgemeines und führt auch dann zum Ziele, wenn die δ nicht Verschiebungen und die P nicht Einzellasten bedeuten, sondern diese Buchstaben zur Bezeichnung der auf Seite 81 erklärten Begriffe *„Weg einer Belastung"* und *„Belastung"* dienen. Stets wird man die darzustellende Grösse

$$\delta_r = \delta_{ra} P_a + \delta_{rb} P_b + \ldots + \delta_{rm} P_m + \ldots$$

mittels des Maxwell'schen Satzes umformen in

$$\delta_r = \delta_{ar} P_a + \delta_{br} P_b + \ldots + \delta_{mr} P_m + \ldots$$

und dann die Einflusszahlen δ_{ar}, δ_{br}, ... δ_{mr}, ... einem für den Zustand $P_r = 1$ gezeichneten Verschiebungsplane (an dessen Stelle häufig eine Biegungslinie treten darf) entnehmen. *Es verdient hervorgehoben zu werden, dass diese Regel auch für statisch unbestimmte Fachwerke gilt.*

§ 5.

Das statisch unbestimmte Fachwerk.

a. Berechnung der statisch nicht bestimmbaren Grössen mittels des Maxwell'schen Satzes.

55. — Wir haben bereits in der Einleitung gezeigt, dass die Berechnung eines statisch unbestimmten Fachwerks in die Lösung zweier Aufgaben zerfällt. Erstens sind die Spannkräfte der Stäbe und die Stützenwiderstände mittels der Gleichgewichtsbedingungen durch die gegebenen Lasten P und gewisse statisch nicht bestimmbare Grössen X auszudrücken, und zweitens sind die Grössen X mit Hilfe von Gleichungen zu berechnen, welche man erhält, indem man die Formveränderung des statisch bestimmten Fachwerks, in welches das unbestimmte im Falle des Verschwindens sämmtlicher Grössen X übergeht, gewissen Bedingungen unterwirft.

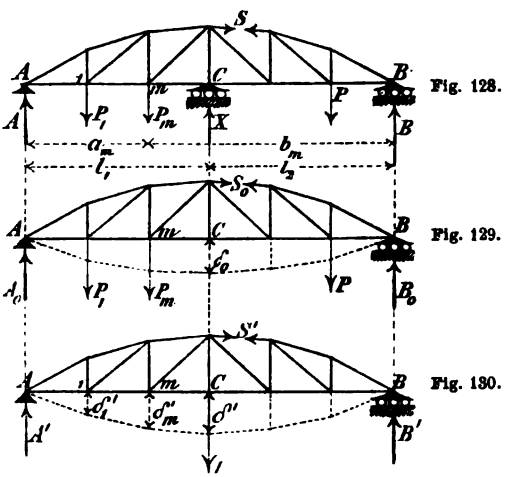
Der einzuschlagende Weg ist meistens sehr leicht zu finden, wie die folgenden Aufgaben zeigen werden, bei deren Lösnng wir von den in der Einleitung angestellten allgemeineren Untersuchungen zunächst nur den Maxwell'schen Satz zu Hilfe nehmen, während wir uns im übrigen lediglich auf die §§ 1—3 stützen. Denn es kommt uns besonders

darauf an, zu zeigen, dass die Berechnung eines gegebenen statisch unbestimmten Fachwerks für denjenigen eine sehr leichte Aufgabe ist, welcher sich mit der Darstellung der Formänderungen statisch bestimmter Fachwerke vertraut gemacht hat und das von uns kurz als Maxwell'scher Satz bezeichnete allgemeine Gesetz kennt.*) Später werden wir auch die übrigen in der Einleitung angegebenen Verfahren verwerthen.

56. Untersuchung eines über zwei Oeffnungen gestreckten Balkens ACB, Fig. 128, welcher durch lothrechte Lasten P beansprucht wird.

Der naheliegendste Rechnungsgang ist der folgende. Wäre der Widerstand X der Mittelstütze bekannt, so liessen sich die in A und B angreifenden Stützendrücke und sämmtliche Spannkräfte S des aus aneinandergereihten Dreiecken bestehenden Fachwerks angeben.

Nimmt man zunächst $X = 0$ an, so entsteht ein einfacher Balken AB, dessen Stützenwiderstände $A_0 = \frac{\Sigma Pb}{l_1 + l_2}$ und $B_0 = \frac{\Sigma Pa}{l_1 + l_2}$ sind, und dessen Spannkräfte S_0 leicht gefunden werden können, beispielsweise mittels eines Cremona'schen Kräfteplanes. Dieser einfache Balken wird an der Stelle C eine lothrechte Durchbiegung δ_0 erfahren, deren Grösse sich nach einem der in den §§ 1—3 gezeigten Verfahren ermitteln lässt.



(Das gestrichelte Polygon in Fig. 129 sei die Biegungslinie der Gurtung ACB). Denkt man jetzt die Kräfte P beseitigt und belastet den einfachen Balken AB nur mit einer in C angreifenden, nach *oben* gerichteten Last X, so wird der Punkt C im lothrechten Sinne um $\delta' X$

*) Die Untersuchung von Fachwerken, welche erst entworfen werden sollen, ist nur insofern umständlicher, als die statisch nicht bestimmbaren Grössen von den zunächst unbekannten Stabquerschnitten abhängen. Im allgemeinen wird man die Querschnittsgrössen zuerst schätzungsweise annehmen, hierauf die X und S ermitteln, die erforderlichen Querschnitte bestimmen und im Falle grösserer Unterschiede zwischen den gerechneten und den geschätzten Querschnitten das ganze Verfahren wiederholen. Vereinfachend wirkt hierbei der Umstand, dass der Einfluss der Belastung auf die Grössen X nur von dem gegenseitigen Verhältniss der Querschnitte abhängt. Vergl. auch No. 74.

gehoben, wobei δ' die mit Hilfe eines zweiten Verschiebungsplanes zu bestimmende lothrechte *Senkung* bedeutet, welche C erfährt, sobald der einfache Balken AB nur durch eine in C angreifende, lothrechte, *abwärts* gerichtete Last von der Grösse 1 beansprucht wird. Sind nun die Stützen des in Fig. 128 abgebildeten Trägers vollkommen starr, so muss die lothrechte Verschiebung von C gleich Null sein, und es folgt hieraus die Bedingung: $\delta_0 - \delta' X = 0$, aus welcher sich

$$X = 1 \frac{\delta_0}{\delta'}$$

ergiebt. Würde sich, bei nachgebenden Widerlagern, Punkt C gegen die relativ festliegend gedachte Gerade AB in lothrechter Richtung um δ_w nach unten verschieben, so wäre X aus der Gleichung $\delta_0 - \delta' X = \delta_w$ zu berechnen. Nach Bestimmung von X können die Spannkräfte S in den Stäben des Balkens ACB mittels der Formel

$$S = S_0 - S' X$$

gefunden werden, unter S' die Spannkraft für den in Fig. 130 dargestellten Belastungsfall $X = -1$ verstanden, und ganz ebenso erhält man die Stützenwiderstände: $A = A_0 - A' X'$, $B = B_0 - B' X'$.

Den Einfluss von Temperaturänderungen wird man stets gesondert bestimmen; man wird also die Verschiebung δ_0 des durch die Lasten P beanspruchten Balkens AB (Fig. 129) unter der Voraussetzung ermitteln, dass die Stäbe die Längenänderungen $\Delta s_0 = \frac{S_0 s}{EF}$ erfahren, und schliesslich wird man mit Hilfe eines dritten Verschiebungsplanes diejenige lothrechte Verrückung δ_t feststellen, welche der Punkt C des einfachen Balkens AB erfährt, sobald sich die Stablängen um $\Delta s_t = \varepsilon t s$ ändern. Der entsprechende Widerstand der Mittelstütze ist dann:

$$X_t = 1 \frac{\delta_t}{\delta'};$$

er erzeugt im Träger ACB (Fig. 128) die Spannkräfte: $S_t = -S' X_t$. Im Falle gleichmässiger Erwärmung sämmtlicher Stäbe ist $\delta_t = 0$, sobald die drei Punkte A, B, C in derselben Wagerechten liegen.

Unsere Aufgabe ist hiermit gelöst. Die Auflösung leidet aber noch an einer Weitläufigkeit, die darin besteht, dass δ_0 für jeden zu untersuchenden Belastungsfall von neuem bestimmt werden muss. Diese Schwierigkeit lässt sich nun durch Anwendung des Maxwell'schen Satzes leicht heben. Bezeichnet man nämlich mit δ'_m die dem Knoten m entsprechende Ordinate der in Fig. 130 für den Zustand $X = -1$ gezeichneten Biegungslinie, so darf man schliessen: Eine in C angreifende lothrechte Last Eins senkt den Punkt m um δ'_m, und es wird daher eine in m angreifende Last Eins den Punkt C ebenfalls um δ' senken

und eine Last P_m wird auf die Senkung δ_0 den Einfluss $\delta_0 = P_m \delta'_m$ ausüben. Daraus folgt aber

$$\delta_0 = P_1 \delta'_1 + P_2 \delta'_2 + \ldots + P_m \delta'_m + \ldots *)$$

und es ist daher der Einfluss der Lasten P auf X

$$X = \frac{1}{\delta'} [P_1 \delta'_1 + P_2 \delta'_2 + \ldots + P_m \delta'_m + \ldots] = \frac{1}{\delta'} \Sigma P_m \delta'_m.$$

Man darf aussprechen:

Die für den Zustand $X = -1$ gezeichnete Biegungslinie der zur Aufnahme der Lasten bestimmten Gurtung ist die Einflusslinie für X. Der Multiplikator dieser Linie ist $= 1 | \delta'$.

57. Untersuchung eines Fachwerkbogens mit Kämpfergelenken und ohne Scheitelgelenk, Fig. 131. Der Träger sei durch beliebig gerichtete Lasten P beansprucht. Die an den festen Auflagergelenken A und B angreifenden Widerstände seien in die zur Geraden AB rechtwinkligen Seitenkräfte A und B und die in die Gerade AB fallenden Seitenkräfte C und X zerlegt.

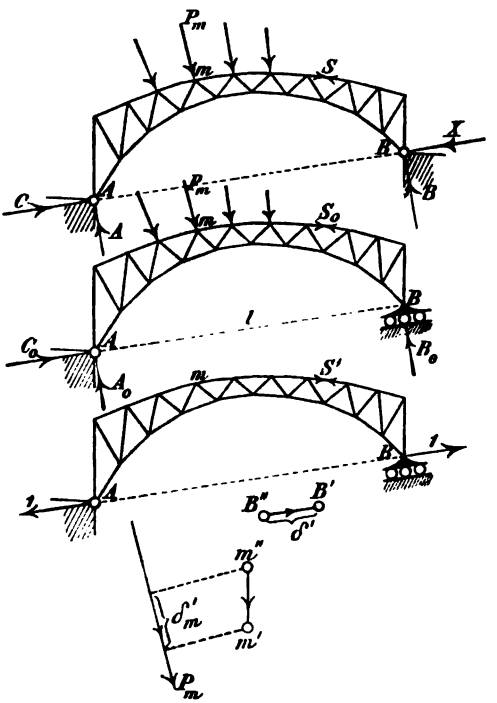


Fig. 131—133.

Wird $X = 0$ angenommen, wird also das feste Auflagergelenk durch ein in der Richtung AB bewegliches Lager ersetzt, so geht das Fachwerk in ein statisch bestimmtes über (Fig. 132). Die Auflagerkräfte A_0, B_0, C_0 und die Spannkräfte S_0 lassen sich für diesen Zustand leicht angeben.

Um X zu ermitteln, wird das erhaltene statisch bestimmte Fachwerk mit einer Kraft $X = -1$ belastet (Fig. 133), welche die Spannkräfte S' und Aenderungen $(\Delta s)' = \frac{S' s}{EF}$ der Stablängen hervorruft; dann wird für diese Angriffsweise ein Verschiebungsplan gezeichnet.

*) Vergl. auch Seite 188.

Dieser Plan möge für den Punkt B die zu AB parallele Verschiebung $B''B' = \delta'$ liefern und für irgend einen Knotenpunkt m die Verschiebung $m''m'$. Bezeichnet δ_m' die Projektion der Strecke $m''m'$ auf die Richtung von P_m, so folgt:

Eine in B und im Sinne AB angreifende Kraft 1 verschiebt den Punkt m im Sinne von P_m um δ_m', und es wird deshalb eine in m angreifende Last $P_m = 1$ eine Verlängerung der Stützweite $AB = l$ um δ_m' verursachen und eine Last P_m eine Verlängerung um $P_m\delta_m'$. Da nun eine von B nach A gerichtete Kraft X eine Verkürzung von AB um $X\delta'$ herbeiführt, so beträgt die Aenderung von l im ganzen:

$$\Delta l = \Sigma P_m\delta_m' - X\delta'.$$

Hieraus folgt aber für das Bogenfachwerk in Fig. 131 für den Fall unbeweglicher Widerlager (d. h. für $\Delta l = 0$):

$$X = \frac{\Sigma P_m\delta_m'}{\delta'}.$$

Geben die Widerlager nach und verschiebt sich hierbei B gegen A um δ_w, so ändert sich X um einen Werth ΔX, der durch die Gleichung

$$\delta_w = -\Delta X\delta'$$

gegeben ist. Den Einfluss X_t einer Temperaturänderung findet man, indem man die Aenderungen $\Delta s_t = \varepsilon t s$ der Stablängen berechnet, die hierdurch bedingte Vergrösserung δ_t der Strecke AB mit Hilfe eines Verschiebungsplanes bestimmt und die Bedingung $0 = \delta_t - X_t\delta'$ aufstellt. Es ergiebt sich:

$$\Delta X = -1\,\frac{\delta_w}{\delta'} \text{ und } X_t = 1\,\frac{\delta_t}{\delta'}.$$

Bei gleichmässiger Erwärmung ist $\delta_t = \varepsilon t l$.

Sobald X bekannt ist, können sämmtliche Spannkräfte S des Bogenfachwerks mittels der Formel

$$S = S_0 - S'X$$

berechnet werden. Für die Stützenwiderstände erhält man: $A = A_0$, $B = B_0$, $C = C_0 + X$.

58. Der Binder eines Freidaches (Fig. 134) sei bei B und C mittels fester Auflagergelenke und ausserdem noch durch eine Stange AD gestützt, welche bei D gelenkartig mit dem Widerlager verbunden ist.

Der Träger wird statisch bestimmt, sobald der Stab AD (dessen Spannkraft $= X$ sei) weggenommen wird. Für diesen Zustand $X = 0$ werden die Spannkräfte S_0 ermittelt und hierauf wird der Verschiebungsplan für den in Fig. 136 dargestellten Zustand $X = -1$, dem die

Spannkräfte S' entsprechen mögen, aufgezeichnet.*) Die Verschiebung von A sei dargestellt durch den Polstrahl OA', diejenige von m durch Om'. Die Projektion von OA' auf die Richtung von AD sei δ' (positiv im Sinne der in Fig. 136 angenommenen Kraft 1), diejenige von Om' auf P_m sei δ'_m (positiv im Sinne von P_m). Dann kann wie in der vorigen Aufgabe mittels des Maxwell'schen Satzes die Beziehung gefunden werden:

$$\Delta l = \Sigma P_m \delta'_m - X\delta',$$

wo l die Länge des Stabes AD bedeutet. Besitzt dieser Stab den Querschnitt F_1 und die Elasticitätsziffer E_1, so ist seine durch die Spannkraft X hervorgebrachte Längenänderung:

$$\Delta l = \frac{Xl}{E_1 F_1},$$

und man erhält schliesslich für X den Werth:

$$X = \frac{\Sigma P_m \delta'_m}{\delta' + \frac{l}{E_1 F_1}}.$$

Wird noch der Einfluss einer Aenderung der Temperatur gesucht, so bestimmt man mit Hilfe eines zweiten Verschiebungsplanes die von den Aenderungen $\Delta s = \varepsilon t s$ herrührende gegenseitige Verschiebung δ_t des Punktepaares A, D und stellt die Bedingung auf:

$$\Delta l = \delta_t - X_t \delta',$$

in welche für Δl jetzt der Werth:

$$\Delta l = \frac{X_t l}{E_1 F_1} + \varepsilon_1 t_1 l$$

einzusetzen ist, unter ε_1 und t_1 die Ausdehnungsziffer und die Temperaturänderung des Stabes AD verstanden. Man findet:

$$X_t = \frac{\delta_t - \varepsilon_1 t_1 l}{\delta' + \frac{l}{E_1 F_1}}.$$

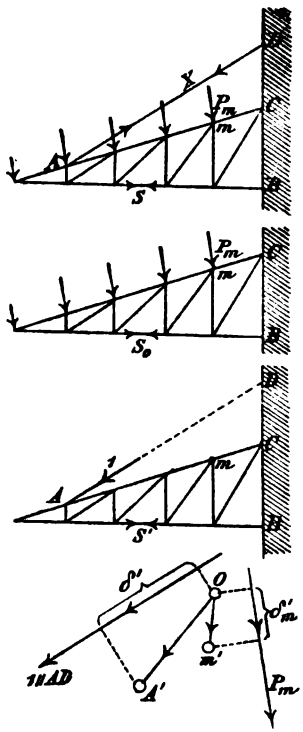


Fig. 134—136.

*) Beispielsweise nach dem in No. 32 angegebenen Verfahren.

59. Untersuchung des in Fig. 137 dargestellten Dachstuhls einer dreischiffigen Halle. Bei A ist ein festes, bei B ein auf wagerechter Bahn bewegliches Auflagergelenk angeordnet. CD und EF sind Säulen mit Kopf- und Fussgelenken (sogenannte Pendelsäulen oder Schwingstützen). Die lothrecht wirkenden Widerstände X_a und X_b der Säulen sollen als die statisch nicht bestimmbaren Grössen eingeführt werden; ihre Angriffspunkte erhalten die Ordnungsbuchstaben a und b.*)

Den Zustand $X_a = 0$, $X_b = 0$ (den wir kurz den Zustand $X = 0$ nennen wollen) zeigt Fig. 138; die Zustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ sind in den Figuren 139 und 140 dargestellt worden. In allen drei Fällen handelt es sich um die Untersuchung eines einfachen Fachwerkbalkens AB; die Stützenwiderstände und die Spannkräfte (S_0, S_a, S_b) lassen sich also leicht ermitteln. Ist dies geschehen, so werden die von den Spannkräften S_a und S_b sowie von Temperaturänderungen t hervorgerufenen Längenänderungen

$$\Delta s_a = \frac{S_a s}{EF}, \quad \Delta s_b = \frac{S_b s}{EF}, \quad \Delta s_t = \varepsilon t s$$

berechnet und die durch diese Δs verursachten Verschiebungen der Knotenpunkte ermittelt.

Der erste dieser Pläne liefert:

δ_{ma} = Verschiebung von m im Sinne von P_m**) in Folge $X_a = -1$
δ_{aa} = „ „ a „ „ „ $X_a = -1$†) „ $X_a = -1$
δ_{ba} = „ „ b „ „ „ $X_b = -1$ „ $X_a = -1$.

Der zweite Plan liefert:

δ_{mb} = Verschiebung von m im Sinne von P_m in Folge $X_b = -1$
δ_{ab} = „ „ a „ „ „ $X_a = -1$ „ $X_b = -1$
δ_{bb} = „ „ b „ „ „ $X_b = -1$ „ $X_b = -1$;

der dritte Plan endlich:

δ_{mt} = Verschiebung von m im Sinne von P_m in Folge der t
δ_{at} = „ „ a „ „ „ $X_a = -1$ „ t
δ_{bt} = „ „ b „ „ „ $X_b = -1$ „ t

(Nach dem Maxwell'schen Satze muss sich $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ herausstellen, eine Bedingung, die zur Prüfung der Zuverlässigkeit der Zeichnung benutzt werden kann).

---

*) Wir wählen jetzt dieselben Bezeichnungen wie in der Einleitung.

**) Abgekürzte Ausdrucksweise an Stelle von: δ_{ma} = Projektion der Verschiebung von m auf die Richtung von P_m, positiv im Sinne von P_m. Zu beachten ist, dass der zweite Buchstabe des an δ gesetzten Doppelzeigers stets auf die Ursache der Verschiebung hinweisen soll und mit dem Zeiger der Belastung X übereinstimmt.

†) Diese Verschiebung wird also positiv gezählt im Sinne der in a (Fig. 139) angenommenen Last 1.

Die Gleichungen zur Berechnung der X ergeben sich nun wie folgt.

Die auf das Fachwerk AB wirkenden Belastungen P_m, X_a, X_b werden im Verein mit Temperaturänderungen t und etwaigen anderen Ursachen (z. B. Bewegungen der Widerlager A und B) die Punkte a und b im Sinne $X_a = -1$ und $X_b = -1$ um Strecken δ_a und δ_b verschieben, welche geradlinige Funktionen der P, X_a, X_b, t sind*) und sich auf die Form bringen lassen:

$$\delta_a = \Sigma P_m \delta_{am} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} + \delta_{at} + \delta_{aw},$$
$$\delta_b = \Sigma P_m \delta_{bm} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bt} + \delta_{bw},$$

wobei die Grössen δ_{aw} und δ_{bw} den Einfluss jener „anderen Ursachen" zum Ausdruck bringen. Die Koefficienten der X sind bereits vorhin erklärt worden (δ_{aa} ist z. B. der Werth, den δ_a annimmt, wenn nur

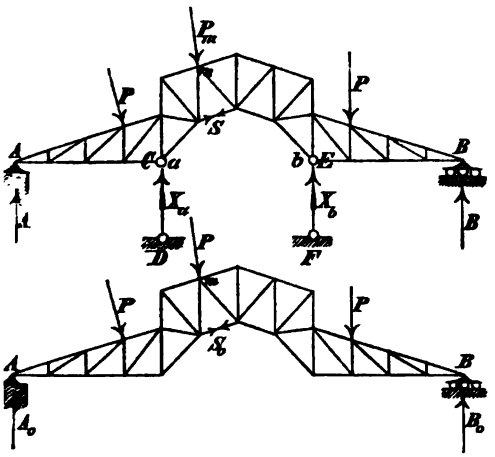


Fig. 137 u. 138.

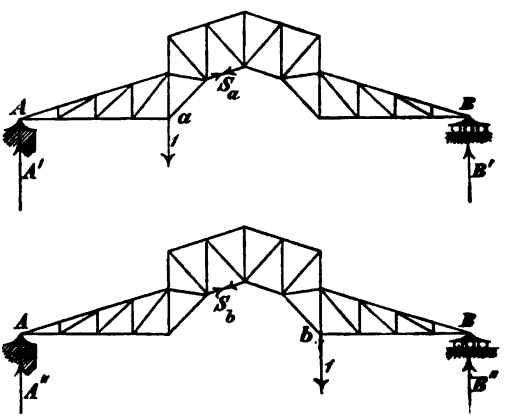


Fig. 139 u. 140.

die Ursache $X_a = -1$ wirkt) und ganz ebenso lassen sich die δ_{am} und δ_{bm} deuten, welche bezw. den Einfluss von $P_m = 1$ auf δ_a und δ_b darstellen.

Nun ist aber nach dem Maxwell'schen Satze die Verschiebung δ_{am} welche a im Sinne $X_a = -1$ und in Folge der Last $P_m = 1$ erfährt, ebenso gross wie die Verschiebung δ_{ma} von m im Sinne von P_m, hervorgerufen durch $X_a = -1$, und in gleicher Weise ergiebt sich $\delta_{bm} = \delta_{mb}$, so dass obige Gleichungen übergehen in

$$\delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} + \delta_{at} + \delta_{aw}$$
$$\delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bt} + \delta_{bw}.$$

*) Diese Eigenschaft ist in der Einleitung erörtert worden; sie folgt aber auch ohne weiteres aus den Untersuchungen in den §§ 1—3; denn zwischen den auf feste Richtungen projicirten Verschiebungen δ und Δs bestehen nur Beziehungen ersten Grades, ebenso zwischen den Δs und den Lasten.

Die auf der rechten Seite stehenden δ sind mit Ausnahme der δ_{aw} und δ_{bw} durch die vorhin angeführten drei Verschiebungspläne bereits bestimmt; für δ_a und δ_b sind die lothrechten Verschiebungen der Stützpunkte a und b einzuführen.

Setzen wir bei A und B starre Widerlager voraus, nehmen wir ferner an, dass weitere Ursachen, welche „Störungsglieder" δ_{aw}, δ_{bw} erzeugen, nicht vorhanden sind, so ist $\delta_{aw} = 0$, $\delta_{bw} = 0$. Vernachlässigen wir noch die Zusammendrückung der Grundpfeiler der Säulen und des Baugrundes, so ist δ_a gleich der Verkürzung der durch X_a auf Druck beanspruchten Säule CD, vermindert um die Verlängerung, welche diese Säule in Folge der Temperaturerhöhung erfährt.*)

Es ergiebt sich:

$$\delta_a = \frac{X_a h_a}{E_a F_a} - \varepsilon_a t_a h_a,$$

worin E_a, F_a, t_a, ε_a, h_a bezieh. die Elasticitätsziffer, den Querschnitt, die Temperaturerhöhung, die Ausdehnungsziffer für $t = 1^0$ und die Länge der Säule CD bedeuten: und ebenso folgt:

$$\delta_b = \frac{X_b h_b}{E_b F_b} - \varepsilon_b t_b h_b.$$

Jetzt können die Grössen X_a, X_b aus den beiden für δ_a und δ_b abgeleiteten Gleichungen berechnet und hierauf die Spannkräfte:

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b.$$

bestimmt werden.

60. Uebungsaufgaben. Der im vorstehenden Beispiele eingeschlagene Weg führt bei jedem statisch unbestimmten Fachwerke, welches sich durch Beseitigung von überzähligen Stäben und Auflagerbedingungen in ein statisch bestimmtes verwandeln lässt, zum Ziele. Treten mehrere statisch nicht bestimmbare Grössen X_a, X_b, X_c, . . . auf, so erhält man:

---

*) Es ist streng darauf zu achten, dass bei der Untersuchung des Einflusses der Bewegungen der Stützen auf die Glieder δ_{aw} und δ_{bw} nur die Widerlager des statisch bestimmten Trägers (hier der einfache Balken AB) in Betracht kommen; die X_a und X_b sind gewissermassen Lasten, welche ausser den P auf diesen statisch bestimmten Träger wirken. Die Bewegungen der überzähligen Stützenpunkte (C und E) werden bei Aufstellung der Bedingungen berücksichtigt, denen die Verschiebungen δ_a und δ_b schliesslich unterworfen werden. Als weitere Ursachen von Störungsgliedern δ_{aw} und δ_{bw} kommen in Wirklichkeit nur noch künstliche Anspannungen und unrichtige Ablängungen von Stäben in Betracht; diese lassen sich aber nach Seite 36 bei Wahl der Temperaturen t berücksichtigen. In der Regel werden die Glieder δ_{aw} und δ_{bw} gestrichen, da sie sich schwierig schätzen lassen. Vergl. auch Seite 22 den letzten Absatz.

$$(I)\quad \begin{cases} \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} - \ldots + \delta_{at} + \delta_{aw} \\ \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} - \ldots + \delta_{bt} + \delta_{bw} \\ \delta_c = \Sigma P_m \delta_{mc} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} - \ldots + \delta_{ct} + \delta_{cw} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die als Coefficienten der P und X auftretenden δ sind bestimmt, sobald die den Belastungszuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1 \ldots$ entsprechenden Verschiebungen der Knotenpunkte ermittelt worden sind.

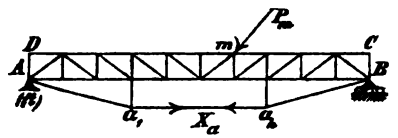


Fig. 141.

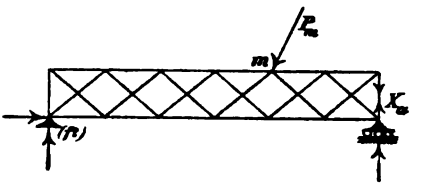


Fig. 142.

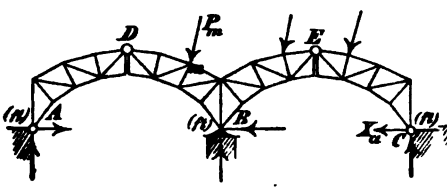


Fig. 143.

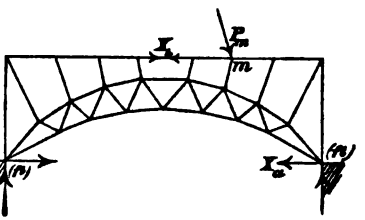


Fig. 144

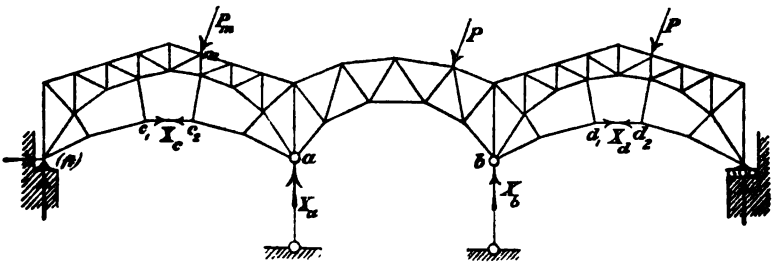


Fig. 145.

Die δ_{aw}, δ_{bw}, δ_{cw} . . . werden in der Regel $= 0$ gesetzt. Will man sie berücksichtigen, so beachte man, dass (nach Seite 35) $\delta_{aw} = -L_a$, $\delta_{bw} = -L_b$, . . . ist, wobei L_a die virtuelle Arbeit der Stützenwiderstände des statisch bestimmten Hauptnetzes für den Belastungszustand $X_a = -1$ ist, L_b für den Zustand $X_b = -1$, u. s. w. Die δ_a, δ_b, δ_c . . . werden schliesslich gewissen Bedingungen unterworfen und hierauf werden die Gleichungen (I) aufgelöst. *Dem Leser wird empfohlen, an dieser Stelle das in der Einleitung vorgeführte Beispiel noch einmal an der*

Hand des Maxwell'schen Satzes durchzugehen und dann die in den Figuren 141 bis 145 abgebildeten Fachwerke in derselben Weise zu behandeln. Welche Grössen als statisch nicht bestimmbar einzuführen sind, ist in den Figuren angegeben worden. Feste Auflagergelenke sind mit (*ft*) bezeichnet.

61. Ueber die Wahl der Grössen X. In der Regel wird es nicht schwer fallen, diejenigen Spannkräfte und Stützenwiderstände eines statisch unbestimmten Fachwerks herauszufinden, welche zweckmässig zu den mit Hilfe von Elasticitätsgleichungen zu bestimmenden Grössen X gewählt werden. Vor allem wird man danach streben, dass das statisch bestimmte Fachwerk, welches durch Beseitigung der als überzählig bezeichneten Stäbe und Auflagerbedingungen gewonnen wird, möglichst einfach ist. So leuchtet z. B. ohnes weiteres ein, dass die in No. 57 durchgeführte Verwandlung des Bogens mit zwei festen Gelenken in ein Fachwerk mit einem festen und einem beweglichen Gelenke zweckmässiger ist als die Verwandlung in einen Bogenträger mit drei Gelenken, zu welcher man durch Wegnahme eines Gurtstabes gelangt wäre; denn die Darstellung der Formänderung ist für diesen Bogenträger etwas umständlicher als für das Fachwerk in Fig. 132.

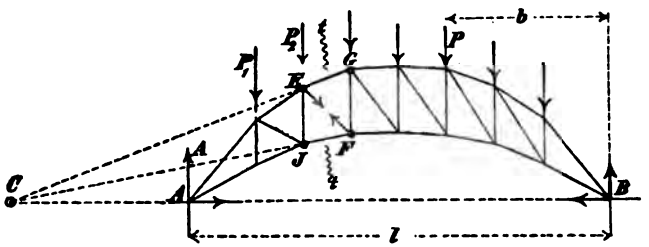


Fig. 146.

Sodann ist hervorzuheben, dass nicht jeder Stab und jede Auflagerbedingung eines statisch unbestimmten Fachwerks als überzählig bezeichnet werden dürfen. Wollte man z. B. bei dem in Fig. 146 abgebildeten sichelförmigen Bogenträger, dessen Gurtstäbe EG und JF sich in einem Punkte C der Geraden AB schneiden, die Spannkraft des Schrägstabes EF zur Grösse X wählen, so würde man mit $X = 0$ einen Bogenträger mit einem Gelenkviereck erhalten, der zwar im allgemeinen steif, im vorliegenden Sonderfalle aber von unendlich kleiner Beweglichkeit wäre, da die drei Punkte A, C, B in dieselbe Gerade fallen. Dass EF ein nothwendiger Stab ist, mithin nicht entfernt werden darf, erkennt man auch, wenn man die Spannkraft D des Stabes EF mittels des Ritter'schen Verfahrens berechnet,

d. h. die Summe der auf den Drehpunkt C bezogenen Momente der am Trägertheile links vom Schnitte tt angreifenden Kräfte $= 0$ setzt. In dieser Gleichung kommen ausser D nur noch die Lasten P_1, P_2 und der Stützenwiderstand A vor, und für den letzteren findet man aus der Momentengleichung für den Punkt B den Werth $A = \frac{\Sigma Pb}{l}$, so dass für D ein nur von den Kräften P abhängiger Ausdruck erhalten wird, der nur bei ganz bestimmter Lastvertheilung verschwindet.

Ein besonders lehrreiches Beispiel bietet der Träger in Figur 147 *), welcher drei feste Auflagergelenke A, B, C und zwei Mittelgelenke D und E besitzt und einfach statisch unbestimmt ist. Er sei so geformt, dass sich die Geraden AD und CE in einem Punkte F der Senkrechten durch B schneiden.

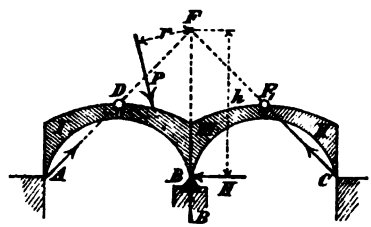


Fig 147.

Sind die Scheiben I und II unbelastet, so gehen die Widerstände der Stützen A und C beziehungsweise durch die Gelenke D und E. Zerlegt man nun den Widerstand der Mittelstütze in die senkrechte Seitenkraft B und in die wagerechte H, und belastet die Scheibe III mit einer Kraft P, so erhält man (mit den in die Figur eingetragenen Hebelarmen h und r) die Gleichgewichtsbedingung

$$Hh = Pr$$

und erkennt, dass H im allgemeinen nicht $= 0$ gesetzt werden darf; und in der That führt die Beseitigung der wagerechten Stützung des Punktes B zu einem Fachwerke, welches zwar die erforderliche Anzahl von Stäben und Auflagerbedingungen besitzt, trotzdem aber verschieblich ist, wie am sichersten und einfachsten mit Hilfe der im Band I Abschnitt XIII eingeführten Figur F' nachgewiesen werden kann. Zu diesem Zwecke ersetzen wir zunächst die steifen Scheiben I, II und III, deren Gestalt für die anzustellende Untersuchung gleichgiltig ist, durch einfacher geformte, nämlich I und II durch je einen Stab und III durch ein Dreieck (Fig. 148); sodann verbinden wir jedes feste Auflagergelenk durch *zwei* Stäbe und das bewegliche Auflagergelenk durch *einen* in die Richtung des Stützenwiderstandes B fallenden Stab mit dem die Gesammtheit der Widerlager vorstellenden Dreiecke HJK und erhalten auf diese Weise ein sehr leicht zu übersehendes Fachwerk. Dass sich

*) Vergl. auch Fig. 148, Seite 149.

nun für dieses Stabgebilde eine Figur (F') zeichnen lässt, welche der Fachwerksfigur (F) unähnlich ist, lehrt ein Blick auf die Abbildung 148*); und damit ist bewiesen, dass jenes Fachwerk beweglich ist. Die Beweglichkeit ist allerdings — starre Stäbe vorausgesetzt — eine unendlich kleine, der Träger ist aber in Folge dessen unbrauchbar.

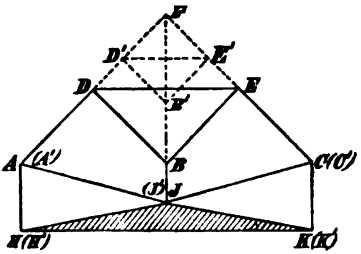


Fig. 148.

Es möge schliesslich noch darauf hingewiesen werden, dass im allgemeinen ein statisch unbestimmtes Fachwerk mit Hilfe der Figur F' auf Beweglichkeit untersucht werden muss, noch ehe auf die Frage, welche Grössen mit X zu bezeichnen sind, eingegangen wird; denn es kann vorkommen, dass die Beweglichkeit nicht erst durch Beseitigung von Stäben oder Auflagerkräften herbeigeführt wird, sondern schon vorher besteht. Beispiele hierfür bieten die Figuren 149 und 150. Erstere stellt ein ebenes Stabgebilde von endlicher Beweglichkeit vor, was leicht zu erkennen ist, weil das Gebilde aus der Form a in die Form b gebracht werden kann, und letztere zeigt ein ebenes

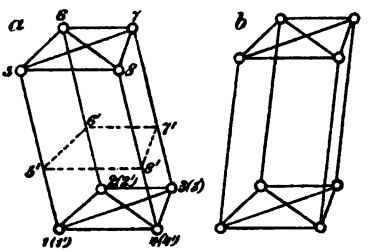


Fig. 149.

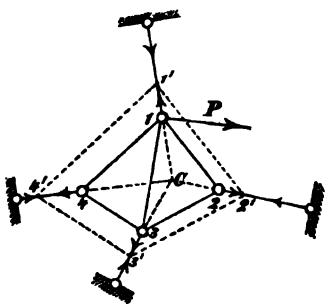


Fig. 150.

Fachwerk, welches selbst dann von unendlich kleiner Beweglichkeit sein würde, wenn sämmtliche Stäbe starr wären; denn die Scheibe 1—2—3—4 kann sich so lange um den Punkt C, in welchem die Achsen der an der Scheibe angreifenden Stäbe zusammentreffen, drehen, bis jene Achsen nicht mehr durch einen Punkt gehen, was nach einer unendlich kleinen Drehung der Scheibe der Fall sein wird. Bezüglich

*) Die Punkte A', C', H', J', K' wurden beziehw. mit A, C, H, J, K zusammenfallend angenommen.

der Stabgebilde von unendlich kleiner Beweglichkeit verweisen wir noch auf die in der Einleitung, Seite 87, angestellten Betrachtungen. Dort wurde gezeigt, dass bei solchen Fachwerken die Vernachlässigung der Längenänderungen der Stäbe nicht erlaubt ist, auch hervorgehoben, dass derartige Stabwerke als Träger ungeeignet sind.

b. Vereinfachung der mittels des Maxwell'schen Satzes abgeleiteten Elasticitätsgleichungen.

62. Allgemeines. Die Elasticitätsbedingungen I auf Seite 149 (s. auch Seite 35, Gleich. 35) lassen sich stets so umformen, dass in jeder Bedingung nur eine Unbekannte X vorkommt, welche dann ohne weiteres aus dieser Gleichung berechnet werden kann. Um dies zu erreichen, muss man die statisch nicht bestimmbaren Grössen so wählen, dass alle diejenigen Coefficienten δ der X verschwinden, welche einen aus zwei verschiedenen Buchstaben gebildeten Zeiger haben, nämlich: $\delta_{ab} = \delta_{ba}$, $\delta_{ac} = \delta_{ca}$, $\delta_{bc} = \delta_{cb}$, u. s. f.

Es ergeben sich dann die einfachen Beziehungen:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} + \delta_{at} + \delta_{au} \\ \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bt} + \delta_{bu} \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Diese Umformung bezweckt nicht allein die Umgehung der an und für sich einfachen Aufgabe, Gleichungen mit mehreren Unbekannten aufzulösen, sondern auch die Vermeidung grösserer Fehler, die bei Anwendung der Bedingungen (I) meistens unausbleiblich sind, sobald die Verschiebungen δ auf *zeichnerischem* Wege ermittelt werden. Liegt beispielsweise ein zweifach statisch unbestimmtes Fachwerk vor, für welches der Einfluss einer Einzellast P_m auf die Grössen X_a und X_b angegeben werden soll, so hat man (wenn $\delta_a = 0$ und $\delta_b = 0$ sind):

$$0 = P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab}$$
$$0 = P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb}$$

und hieraus:

$$\frac{X_a}{P_m} = \frac{\delta_{ma}\delta_{bb} - \delta_{mb}\delta_{ab}}{\delta_{aa}\delta_{bb} - \delta_{ab}^2} \qquad \frac{X_b}{P_m} = \frac{\delta_{mb}\delta_{aa} - \delta_{ma}\delta_{ba}}{\delta_{aa}\delta_{bb} - \delta_{ab}^2}.$$

Man erhält also, falls die Glieder, aus denen die vorstehenden Brüche bestehen, positiv sind, die $X : P$ als Verhältnisse von Unterschieden und kann schon bei geringen Zeichenfehlern zu ganz unrichtigen Ergebnissen gelangen. Wurden z. B. für Zähler und Nenner von $X_a : P_m$ die Werthe $151{,}87 - 149{,}12 = 2{,}75$ und $223{,}81 - 220{,}58 = 3{,}23$

anstatt der genaueren: 151,58 — 149,34 = 2,24 und 224,67 — 220,68 = 3,99 erhalten, so findet man

$$\frac{X_a}{P_m} = \frac{2{,}75}{3{,}23} = 0{,}85 \text{ statt } \frac{X_a}{P_m} = \frac{2.24}{3{,}99} = 0{,}56,$$

bekommt also trotz den geringen Fehlern in den einzelnen Zahlen einen um 52 % zu grossen Werth $X_a : P_m$.

Nach den Erfahrungen des Verfassers empfiehlt sich die Anwendung der Gleichungen (I) bei mehrfach statisch unbestimmten Fachwerken nur dann, wenn die Verschiebungen δ durch Rechnung ermittelt werden und zwar auf mehrere Decimalstellen, die erst nach Bestimmung der X zum Theil abzuwerfen sind. Meistens kommen nur parallele Lasten in Betracht, in welchem Falle nur die Berechnung von Biegungslinien nach dem in No. 49 gelehrten Verfahren verlangt wird.

Entscheidet man sich aber für die Anwendung von Verschiebungsplänen, so forme man die Gleichungen (I) auf die im folgenden gelehrte Weise in II um. Dabei wird sich zeigen, dass diese Umwandlung bei Fachwerken von niedrigerem Grade statischer Unbestimmtheit (und diese kommen ja fast allein vor) sehr einfach ist. Je grösser die Anzahl der X, desto umständlicher wird es, die Gleichungen (II) herbeizuführen.

Vorausgeschickt werde noch, dass in den nachstehenden Untersuchungen die X entweder Einzelkräfte oder Momente von an starren Scheiben angreifenden Kräftepaaren bedeuten. Im ersten Falle bezeichnet das zugehörige δ eine Verschiebung, im zweiten einen (im Bogenmaass ausgedrückten) Drehungswinkel. Ist also z. B. X_a eine im Punkte a angreifende Einzelkraft, so bedeutet δ_a die Projektion der Verschiebung von a auf die Richtung X_a. Stellt X_a das Moment eines an einer starren Scheibe $[a]$ angreifenden Kräftepaares vor, so giebt δ_a den Winkel an, um den sich die Scheibe $[a]$ dreht. Die $\delta_a, \delta_b, \ldots$ werden in entgegengesetztem Sinne positiv gezählt wie die zugehörigen Grössen X. Bezüglich der übrigen Bezeichnungen verweisen wir auf Seite 35 (vgl. auch No. 59). Greifen zwei Einzelkräfte X_r, X_s an demselben Punkte an, so wählen wir für diesen den Buchstaben r oder s, je nachdem wir den Punkt als den Angriffspunkt von X_r oder von X_s besonders ins Auge fassen.

Schliesslich machen wir darauf aufmerksam, dass in den folgenden Beispielen bei unverschieblichen Widerlagern mit den Grössen $\delta_{aa}, \delta_{bb}, \ldots$ auch stets die $\delta_a, \delta_b, \ldots$ verschwinden, so dass sich für den Einfluss der Lasten P auf die Grössen X die Formeln ergeben:

$$\text{(III)} \qquad X_a = \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}; \quad X_b = \frac{\Sigma P_m \delta_{mb}}{\delta_{bb}}; \ldots.$$

und für den Einfluss von Temperaturänderungen die Ausdrücke:

$$\text{(IV)} \qquad X_{at} = 1\,\frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}};\; X_{bt} = 1\,\frac{\delta_{bt}}{\delta_{bb}};\; \ldots.$$

63. Das zweifach statisch unbestimmte Fachwerk. Als statisch nicht bestimmbare Grössen lassen sich hier stets zwei in einem und demselben Punkte angreifende Einzelkräfte X_a und X_b einführen. Die Gleichungen II gelten, sobald $\delta_{ba} = \delta_{ab} = 0$ ist. Um dies zu erreichen, nehme man die Richtung von X_a willkürlich an, bestimme die Verschiebung aa_1, welche a in Folge des Belastungszustandes $X_a = -1$ erleidet und nehme X_b rechtwinklig zu aa_1 an. Dann wird $\delta_{ba} = 0$, denn es bedeutet δ_{ba} die Verschiebung, welche b in der Richtung X_b erfährt, wenn nur die Ursache $X_a = -1$ wirkt. Trägt man nun den Verschiebungsplan für den Zustand $X_b = -1$ auf, so muss sich bei sorgfältiger Zeichnung für den Punkt b eine zu X_a rechtwinklige Verschiebung bb_1 ergeben, denn sobald $\delta_{ba} = 0$ ist, muss auch $\delta_{ab} = 0$ sein, weil $\delta_{ba} = \delta_{ab}$ ist.

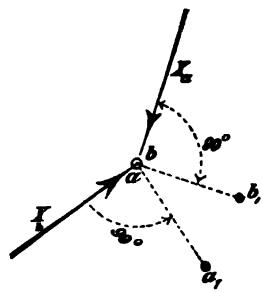


Fig. 151.

1. Beispiel.

Der in Fig. 152 dargestellte, über zwei Oeffnungen gespannte Bogenträger, welcher bei A und C feste, bei B ein bewegliches Auflagergelenk besitzt, ist zweifach statisch unbestimmt. Als Grössen X sollen die nach festen Richtungen wirkenden Seitenkräfte X_a und X_b des in A angreifenden Stützenwiderstandes eingeführt werden. Im Falle $X_a = 0$ u. $X_b = 0$ geht der Träger in einen statisch bestimmten Balken mit den Stützen B und C und einem auskragenden Arme BA über. Für diesen Balken wird nach willkürlicher Wahl der Richtung von X_a der dem Zustande $X_a = -1$ entsprechende Verschiebungsplan gezeichnet, welcher für a die Verschiebung aa_1 und für irgend einen Knoten m die Verschiebung mm_1 ergeben

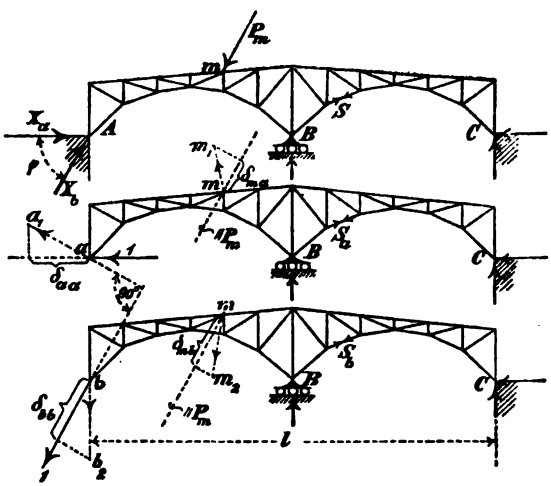


Fig. 152. 153. 154.

möge. Nun wird X_b rechtwinklig zu aa_1 angenommen und der Verschiebungsplan für $X_b = -1$ aufgetragen; derselbe liefert für den Punkt b eine zu X_a rechtwinklige Verschiebung bb_2 und für m die Verschiebung mm_2. Nach Bestimmung der in die Figur 152 eingetragenen Projektionen δ_{aa}, δ_{bb}, δ_{ma}, δ_{mb}, (von denen δ_{ma} negativ ist) erhält man den Einfluss von P_m:

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}; \quad X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}.$$

Wird sämmtlichen Stäben die gleiche Temperaturänderung t zugeschrieben, und liegen A, B, C in einer zur Bahn des Lagers B parallelen Geraden, so erfährt der Endpunkt A des Balkens ABC in Folge t eine wagerechte Verschiebung von der Grösse $\varepsilon t l$ (wo $l = \overline{AC}$), deren Projektionen auf die Richtungen von $X_a = -1$ und $X_b = -1$ beziehungsweise $\delta_{at} = \varepsilon t l$ und $\delta_{bt} = \varepsilon t l \cos\varphi$ sind (wo φ den Neigungswinkel von X_b gegen die Wagerechte bedeutet) und es ergiebt sich deshalb:

$$X_{at} = 1 \frac{\varepsilon t l}{\delta_{aa}}; \quad X_{bt} = 1 \frac{\varepsilon t l \cos\varphi}{\delta_{bb}}.$$

2. *Beispiel.* Der Fachwerkbogen in Fig. 155 ist bei A und B fest gelagert und besitzt einen überzähligen Stab CD; er ist also zweifach statisch unbestimmt. Wir verwandeln das feste Gelenk in ein bewegliches, denken uns aus dem Stabe CD ein Stück EF herausgeschnitten, führen die Punkte E und F in der Geraden CD, fügen die

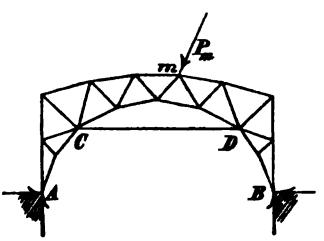


Fig. 155.

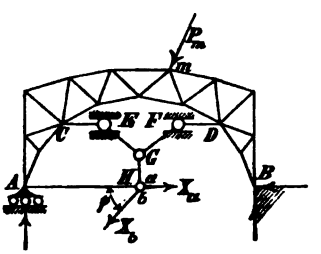


Fig. 156.

starren Stäbe EG, FG, GH und AH hinzu und bringen in H zwei Kräfte X_a und X_b an, welche wir so bestimmen, dass die gegenseitige Verschiebung des Punktepaares CD ebenso gross wird wie die Längenänderung des überzähligen Stabes und dass ferner (unbewegliche Widerlager vorausgesetzt) die Verschiebung des Punktes A den Werth Null annimmt. Dann stimmen die Spannkräfte der Träger in den Figuren 155 und 156 miteinander überein. Die Spannkraft des Stabes AH giebt den wagerechten Widerstand des festen Auflagergelenks A an. Zu beachten ist,

dass $GH \perp CD$ und $\angle EGH = \angle FGH$ sein muss, damit sich für die Stäbe CE und FD gleich grosse Spannkräfte ergeben; auch empfiehlt es sich, den Stäben CE und FD Querschnitte F', F'' und Temperaturänderungen t', t'' zuzuschreiben, welche zur Folge haben, dass die Summe der Längenänderungen von CE und FD gleich der Längenänderung des überzähligen Stabes CD ist. Entsprechen dem letzteren daher die Werthe F, t und ist $\overline{CD} = s$, $\overline{CE} = s'$, $\overline{FD} = s''$, so muss sein:

$$\frac{s'}{F'} + \frac{s''}{F''} = \frac{s}{F} \text{ und } t's' + t''s'' = ts.$$

Es wird dann ausser der Verschiebung des Punktes A die gegenseitige Verschiebung des Punktepaares EF gleich Null gesetzt und hieraus $\delta_a = 0$, $\delta_b = 0$ gefolgert. Wählt man nun nach willkürlicher Annahme der Richtung von X_a, die Kraft X_b rechtwinklig zu der Verschiebung, welche a in Folge von $X_a = -1$ erfährt, so gelten wie vorhin die Gleichungen:

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}; \quad X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}.$$

Schreibt man sämmtlichen Stäben die gleiche Temperaturänderung t zu (mit Ausnahme der Stäbe CE und FD, für welche t' bezieh. t'' anzunehmen sind) so erhält man wie im vorigen Beispiele:

$$X_{at} = 1 \frac{\varepsilon t l}{\delta_{aa}}; \quad X_{bt} = -1 \frac{\varepsilon t l \cos \varphi}{\delta_{bb}}.$$

Das Minuszeichen ist erforderlich, weil X_b jetzt einen anderen Richtungspfeil besitzt.

3. Beispiel. Träger mit einem festen und drei beweglichen Auflagergelenken, Fig. 157. Das Verfahren ist in der Abbildung angegeben worden. Die Stäbe AE und CF sind rechtwinklig zu den Bahnen der Auflager A und C; ihre Endpunkte E und F werden in den Richtungen AE und CF geführt.

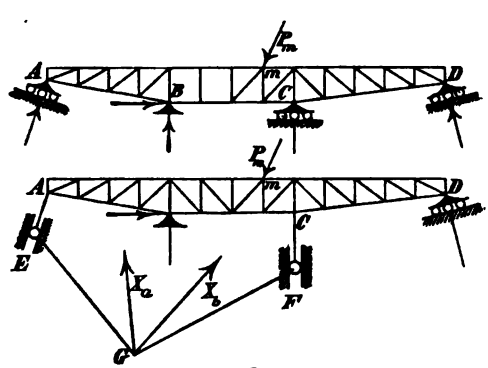


Fig. 157, 158.

64. Das dreifach statisch unbestimmte Fachwerk. Man schliesse an das statisch bestimmte Fachwerk, in welches das unbestimmte in Folge Beseitigung der

überzähligen Stäbe und Auflagerbedingungen übergeht, auf irgend eine Weise eine starre Scheibe an und belaste diese mit einem Kräftepaare, dessen Moment $= X_a$ ist, ferner mit zwei in demselben Punkte (b, c) angreifenden Einzelkräften X_b und X_c. Hierauf nehme man die Werthe δ_a (Drehungswinkel der Scheibe), δ_b (Verschiebung von b im Sinne $X_b = -1$) und δ_c (Verschiebung von c im Sinne $X_c = -1$) so an, dass die an der Scheibe angreifenden Kräfte auf das statisch bestimmte Fachwerk genau dieselbe Wirkung ausüben, wie die beseitigten überzähligen Glieder. Wählt man nun den Pol, um den sich die Scheibe in Folge des Belastungsfalles $X_a = -1$ dreht, zum Angriffspunkte von X_b und X_c, so erzielt man, dass $\delta_{ba} = 0$ und $\delta_{ca} = 0$ wird, und es müssen sich dann bei sorgfältiger Zeichnung oder Rechnung die Drehungswinkel δ_{ab} und δ_{ac}, welche die Scheibe in Folge $X_b = -1$ und $X_c = -1$ erfährt, ebenfalls $= 0$ ergeben. Nimmt man schliesslich, bei willkürlich gewählter Richtung von X_b, die Richtung von X_c rechtwinklig zu der Verschiebung an, welche der Punkt (b, c) in Folge der Ursache $X_b = -1$ erfährt, so wird $\delta_{cb} = 0$ und damit auch $\delta_{bc}' = 0$, und es gelten dann die Gleichungen II.

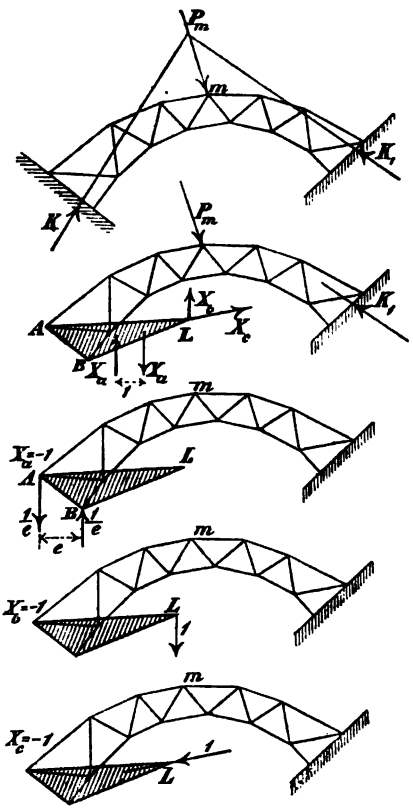


Fig. 159, 160, 161, 162, 163.

1. Beispiel. Liegt der in Fig. 159 dargestellte, in der Regel als *Fachwerkbogen mit eingespannten Enden* bezeichnete Träger vor, so ersetzt man das linke Widerlager durch die starre Scheibe ABL und den nach Lage und Grösse vorläufig unbekannten Kämpferdruck K durch ein Kräftepaar mit dem Momente X_a und durch zwei nach festen Richtungen wirkende Einzelkräfte X_b und X_c. Hierauf zeichnet man den Verschiebungsplan für den Belastungszustand $X_a = -1$, indem man in A und B zwei entgegengesetzt gleiche im Abstande e von einander wirkende, parallele Kräfte von der Grösse $\frac{1}{e}$

annimmt, bestimmt die Verschiebungen AA_1 und BB_1 von A und B und wählt hierauf den Angriffspunkt L von X_b und X_c so, dass $LA \perp AA_1$ und $LB \perp BB_1$ ist. Dann ist L der Drehpol der Scheibe für den Zustand $X_a = -1$; es ergiebt sich $\delta_{ba} = 0$, $\delta_{ca} = 0$ und deshalb auch $\delta_{ab} = 0$, $\delta_{ac} = 0$.

Die Richtung von X_b wird willkürlich gewählt und die Richtung von X_c rechtwinklig zu der Verschiebung angenommen, welche L in Folge $X_b = -1$ erfährt, damit $\delta_{cb} = \delta_{bc} = 0$ werde. Schliesslich werden bei starren Widerlagern die Werthe δ_a, δ_b und $\delta_c = 0$ gesetzt und die Gleichungen (II) aufgelöst. Für den Einfluss von P_m gelten die Gleichungen III, für denjenigen von t die Gleichungen IV (S. 154 u. 155).

2. Beispiel. Soll der in Fig. 164 abgebildete, über 3 Oeffnungen gespannte Bogenträger mit den festen Auflagergelenken A, D und den beweglichen Auflagergelenken B, C untersucht werden, so ersetze man die Stützen A und C auf die in der Figur angegebene Weise durch eine starre Scheibe AF und einen zur Bahn des Auflagers C rechtwinkligen Stab CF, belaste die Scheibe mit einem Kräftepaare X_a und zwei in demselben Punkte L angreifenden Einzelkräften X_b, X_c und

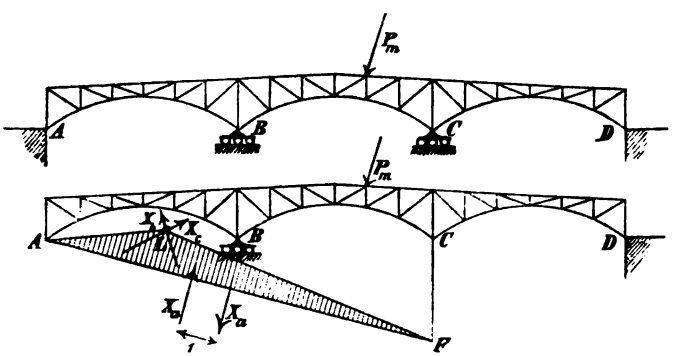


Fig. 164.

verfahre wie bei Lösung der vorigen Aufgabe. Behufs Bestimmung des Punktes L ermittle man für den Zustand $X_a = -1$ die Verschiebungen von A und C, hierauf die Verschiebung von F und trage AL und FL rechtwinklig zu den Bewegungsrichtungen der Punkte A bezieh. F ein. Bei starren Widerlagern sind δ_a, δ_b und δ_c gleich Null zu setzen.

65. Das vierfach statisch unbestimmte Fachwerk. Man lasse die Kräfte X_a, X_b, X_c, X_d auf eine aus zwei starren Scheiben I, II und zwei starren Stäben I', II' gebildete kinematische Kette (Fig. 165) wirken, welche mit dem statisch bestimmten Hauptsysteme so verbunden wird, dass sich die von den Ursachen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$,

$X_d = -1$ hervorgerufenen Spannkräfte S_a, S_b, S_c, S_d eindeutig und auf möglichst einfache Weise mittels der Gleichgewichtsbedingungen bestimmen lassen. Die Scheibe I belaste man hierbei mit den Einzelkräften X_a und X_b*), die Scheibe II mit den Einzelkräften X_c und X_d. Die ganze Anordnung wähle man so, dass man die Belastungszustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ vollständig erledigen kann, ohne die Lage der Scheibe II zu kennen.

Die Lage von X_a darf willkürlich angenommen werden; X_b muss durch den Pol I_a gehen, um den sich die Scheibe I in Folge der Belastung $X_a = -1$ dreht. Man erreicht dann: $\delta_{ba} = \delta_{ab} = 0$.

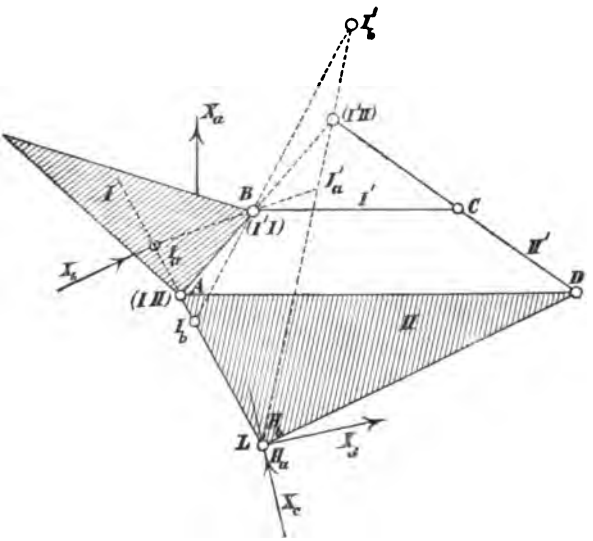


Fig 165.

Nach Bestimmung der Verschiebungen in Folge der Ursache $X_b = -1$, welche für die Scheibe I den Pol I_b liefern möge, gebe man der Scheibe II eine solche Lage, dass die Pole II_a und II_b um welche sich II bei Eintreten der Belastungszustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ dreht, zusammenfallen, und diesen gemeinschaftlichen (in der Fig. 165) mit L bezeichneten Pol wähle man zum Angriffspunkte der Kräfte X_c und X_d. Dann wird nämlich $\delta_{ca} = 0$, $\delta_{cb} = 0$, $\delta_{da} = 0$, $\delta_{db} = 0$ und in Folge dessen auch $\delta_{ac} = 0$, $\delta_{bc} = 0$, $\delta_{ad} = 0$, $\delta_{bd} = 0$. Schliesslich nehme man bei willkürlicher Wahl der Richtung von X_c die Kraft X_d rechtwinklig zu der Verschiebung an, welche Punkt L in Folge $X_c = -1$ erfährt, damit $\delta_{dc} = \delta_{cd} = 0$ werde. Die Gültigkeit der Elasticitätsgleichungen II ist hiermit erreicht.

Die Lage des Punktes L bestimmt man am schnellsten mit Hilfe des im I. Bande Abschnitt XIII abgeleiteten Satzes von den drei Polen. Die Pole $(I \cdot I')$ von I gegen I' und $(I' \cdot II)$ von I' gegen II

*) Die Kraft X_a darf auch durch ein Kräftepaar ersetzt werden.

fallen mit Gelenk B bezieh. dem Schnittpunkte von AB und CD zusammen, Pol $(I \cdot II)$ mit A. Die durch I_a und $(I \cdot I')$ ferner durch I_b und $(I \cdot I')$ gelegten Geraden sind die Oerter der Pole I_a' und I_b', um welche sich I' in Folge von $X_a = -1$ bezw. $X_b = -1$ dreht, und welche mit $(I' \cdot II')$ in derselben Geraden liegen. Da nun weiter die 3 Pole $(I.II)$, I_a, II_a in einer Geraden liegen müssen, desgleichen die Pole $(I \cdot II)$ I_b, II_b, so ergiebt sich die folgende Bestimmungsweise der gesuchten Kette.

Man nehme $(I \cdot II)$ in der Geraden $I_a - I_b$ an, wähle die Lage des Stabes BC nach Belieben, bestimme die Pole I_a' und I_b' um welche sich I' in Folge $X_a = -1$ und $X_b = -1$ dreht, bringe die Geraden $I_a' - I_b'$ und AB in $(I' II)$ zum Schnitt und stelle nun die (durch den Punkt $I' \cdot II$ gehende) Richtung des Stabes CD, dessen Länge willkürlich ist, fest. Schliesslich findet man L als Schnittpunkt der Geraden $I_a' - I_b'$ und $I_a - I_b$.

Beispiel. In Fig. 166 ist das beschriebene Verfahren auf einen über drei Oeffnungen gespannten Bogenträger mit den festen Gelenken A und E und den auf wagerechten Geraden beweglichen Gelenken B, C und D angewendet worden. Die Scheibe I wurde mit dem Kräftepaare X_a und der Einzelkraft X_b belastet. Die Einführung eines Kräftepaares X_a bietet den Vortheil, dass sich die Spannkräfte S_a und Längenänderungen Δs_a für den Zustand $X_a = -1$ angeben lassen, ohne dass über die Länge des Stabes CG etwas festgesetzt zu werden braucht, denn

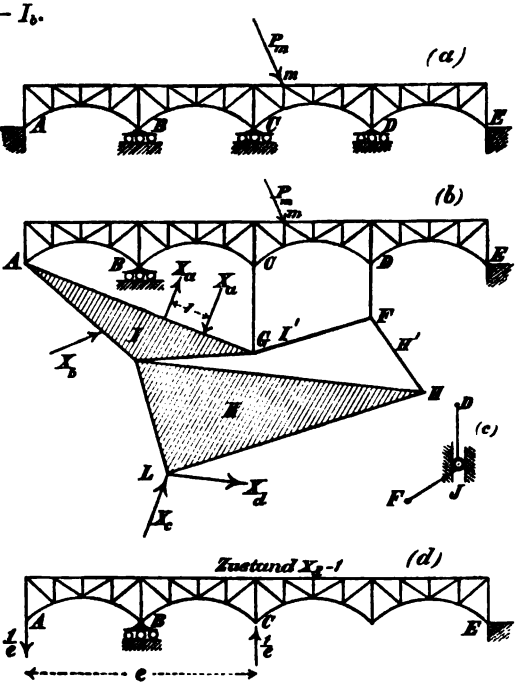


Fig. 166.

wie lang auch CG gewählt wird, stets werden durch die Scheibe I in Folge $X_a = -1$ auf die Punkte A und C des statisch bestimmten Hauptsystems zwei entgegengesetzt gleiche lothrechte Kräfte $\frac{1}{e}$ über-

tragen, wobei e = dem wagerechten Abstande AC ist. Hat man nun für diesen Belastungszustand die Verschiebungen der Punkte A und C ermittelt, so kann man durch eine passende Wahl des Punktes G eine bequemere Lage des Poles erzielen, um den sich I dreht und durch den dann X_b gehen muss. Ist der Belastungsfall $X_a = -1$ erledigt, so untersucht man den Zustand $X_b = -1$. Hierbei braucht man die Lagen der Stäbe I' und II' noch nicht zu kennen und wird diese nachträglich so wählen, dass der Angriffspunkt L (d. i. der Pol II_a und zugleich der Pol II_b) günstig liegt, wobei zu beachten ist, dass man den Stab DF auch nach Fig. 166^e durch zwei Stäbe DJ und FJ ersetzen darf, deren gemeinsames Gelenk J in lothrechter Richtung geführt wird. Bei starren Widerlagern wird schliesslich $\delta_a = 0$, $\delta_b = 0$, $\delta_c = 0$, $\delta_d = 0$ gesetzt.

66. Träger von höherem Grade statischer Unbestimmtheit. Ist die Anzahl der statisch nicht bestimmbaren Werthe X grösser als 4, so ist es möglich, das gesteckte Ziel durch wiederholte Lösung der in Fig. 165 behandelten Aufgabe zu erreichen: die Pole II_a und II_b miteinander zur Deckung zu bringen. Um dies an einem Beispiele zu zeigen, denken wir uns den Bogenträger in Fig. 166 rechts von E noch um mehrere Oeffnungen verlängert und nehmen an, dass über sämmtlichen Mittelstützen bewegliche Lager mit wagerechten Bahnen angeordnet sind, an beiden Enden hingegen feste Auflagergelenke. Die beweglichen Auflager seien beseitigt, an ihre Stelle mögen lothrechte Stäbe treten, an welche in gleicher Weise wie an die Stäbe CG und DF noch weitere starre Stäbe und Scheiben angereiht werden sollen. Ebenso wie nun die Scheibe II in Abb. 166 an den Stab DF und an die Scheibe I so angeschlossen wurde, dass sich II in Folge der beiden Belastungszustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ um denselben Pol L dreht, denken wir uns weitere Scheiben III, IV, V hinzugefügt, deren Anzahl mit derjenigen der rechts von E sich anreihenden Trägeröffnungen übereinstimmt, die sämmtlich mit I und mit je einem der von den beseitigten Stützpunkten ausgehenden lothrechten Stäben so verbunden sind, dass jeder Scheibe für die beiden Belastungszustände $X_a = -1$, $X_b = -1$ derselbe Drehpol entspricht, und zwar falle III_a mit III_b in M zusammen, IV_a mit IV_b in N usw. Es bleiben dann alle etwa noch an die Punkte L, M, N, . . . anzuschliessenden Stäbe und Scheiben bei Eintreten jener beiden Belastungszustände in Ruhe, und es folgt, wenn an diesen Gliedern Kräfte X_e, X_f, X_g, . . . angreifen: $\delta_{ea} = \delta_{ae} = 0$, $\delta_{fa} = \delta_{af} = 0$, . . . $\delta_{eb} = \delta_{be} = 0$, $\delta_{fb} = \delta_{bf} = 0$, . . . Gesetzt nun, es sei der Träger fünffach statisch unbestimmt, ein Fall der vorliegt, wenn rechts von E in Fig. 166 noch eine Oeffnung hinzutritt. Dann kommen nur die Scheiben II und III in Betracht; man füge die in einem Gelenke T aneinander-

hängenden Glieder LT und TM hinzu, bestimme die Pole S_e und S_d, um welche sich die Scheibe $S = TM$ in Folge von $X_e = -1$ bezieh. $X_d = -1$ dreht und belaste S mit einer in die Gerade $S_e S_d$ fallenden Einzelkraft X_s. Dann ergiebt sich $\delta_{se} = \delta_{es} = 0$ und $\delta_{sd} = \delta_{ds} = 0$, und es gelten die Gleichungen (5), weil sämmtliche δ, die in den Gleichungen 4 in Verbindung mit den X auftreten und deren Zeiger aus zwei ungleichen Buchstaben bestehen, verschwinden.

Wäre der Träger sechsfach statisch unbestimmt, so würde man an die Scheiben *II*, *III*, *IV* eine Scheibe S′ auf irgend eine Weise so anzuschliessen haben, dass die Drehpole S'_e und S'_d sich decken, und hierauf würde man diesen gemeinschaftlichen Pol zum Angriffspunkte von zwei Einzelkräften X_e und X_f wählen, wobei die Richtung von X_f rechtwinklig zu der Richtung der Verschiebung sein muss, welche der Angriffspunkt dieser Kraft in Folge $X_e = -1$ erfährt. Die Möglichkeit nun, im Falle noch höheren Grades statischer Unbestimmtheit, weitere Scheiben S″, S‴, . . . so anzureihen, dass S''_e mit S''_d zusammenfällt, S'''_e mit S'''_d usw. bildet die Handhabe zur planmässigen Ausbildung unseres Verfahrens; denn alle an die gemeinschaftlichen Pole angeschlossenen folgenden Stäbe und Scheiben bleiben nicht nur beim Eintreten der Zustände $X_e = -1$, $X_b = -1$, sondern auch in den Belastungsfällen $X_e = -1$ und $X_b = -1$ in Ruhe.

Der Verfasser hält übrigens bei in höherem Grade statisch unbestimmten Fachwerken die in No. 67 bis 70 durch Aufgaben erläuterte Berechnungsweise für unbedingt zweckmässiger, und hat sich aus diesem Grunde auch damit begnügt, von den verschiedenen möglichen Verfahren, die Gültigkeit der Gleichungen *II* auf Grund kinematischer Untersuchungen herbeizuführen, nur das eine anzugeben.

c. Anwendung der Elasticitätsgleichungen:

$$(V)\quad \begin{cases} X'\Sigma S'^2\rho + X''\Sigma S'S'\rho + X'''\Sigma S'S''\rho + \ldots = \Sigma P_m\delta_m' + \Sigma S'\varepsilon ts - L' \\ X'\Sigma S'S'\rho + X''\Sigma S''^2\rho + X'''\Sigma S''S'''\rho + \ldots = \Sigma P_m\delta_m'' + \Sigma S''\varepsilon ts - L'' \\ X'\Sigma S'''S'\rho + X''\Sigma S'''S''\rho + X'''\Sigma S'''^2\rho + \ldots = \Sigma P_m\delta_m''' + \Sigma S'''\varepsilon ts - L''' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

welche voraussetzen, dass sämmtliche Spannkräfte S und (nach festen Richtungen wirkenden) Stützenwiderstände C des statisch unbestimmten Fachwerks auf die Form gebracht worden sind:

$$S = S_0 - S'X' - S''X'' - S'''X''' - \ldots$$
$$C = C_0 - C'X' - C''X'' - C'''X''' - \ldots$$

wobei X', X'', X''' . . . die statisch nicht bestimmbaren Grössen bedeuten.*)

*) Vergl. Seite 25 bis 27.

δ_m', δ_m'', . . . sind die Verschiebungen, welche der Angriffspunkt m einer Last P_m erfährt, sobald auf das Fachwerk beziehungsweise nur die Ursache $X' = -1$ oder nur die Ursache $X'' = -1$ u. s. w. wirkt, während L', L'', . . . die virtuellen Arbeiten der Stützenwiderstände C', C'' . . . bedeuten. Alle in den obigen Gleichungen enthaltenen, von den S', S'', S''' . . . abhängigen Summenausdrücke erstrecken sich über sämmtliche Stäbe des Fachwerks, über die nothwendigen *und* überzähligen. Der Werth ρ ist

$$\rho = \frac{s}{EF}.$$

Meistens werden die Widerlager starr angenommen und die virtuellen Arbeiten $L = 0$ gesetzt.

Die Anwendung der vorstehenden Gleichungen ist namentlich dann zu empfehlen, wenn die Werthe X', X'' . . . durch Rechnung bestimmt werden sollen, was (wie schon auf Seite 153 hervorgehoben wurde) im allgemeinen geboten ist, sobald nicht jede Grösse X mittels einer einzigen Gleichung gefunden werden kann. In der Regel hat man es mit lothrechten Lasten zu thun; die δ_m', δ_m'', δ_m''', . . . sind dann Ordinaten von *Biegungslinien*, deren Berechnung sich (nach No. 49) stets auf die Ermittlung von Angriffsmomenten einfacher Balken zurückführen lässt. Aber auch der Einfluss schräg gerichteter, nicht paralleler Kräfte P kann auf dem am Schluss von No. 51 angegebenen Wege leicht durch Rechnung erledigt werden, nachdem die den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, . . . entsprechenden Biegungslinien für irgend eine Verschiebungsrichtung bestimmt worden sind. Wenn wir also in den folgenden Beispielen durchweg lothrechte Lasten annehmen, so geschieht dies nur der kürzeren Darstellungsweise wegen. Vergl. auch No. 75.

67. Untersuchung eines über drei Oeffnungen gespannten Bogenträgers, Fig. 167, mit Scheitelgelenken in den Seitenöffnungen, festen Kämpfergelenken und wagerechten Gleitlagern über den Mittelpfeilern.

Der Träger ist einfach statisch unbestimmt; als statisch nicht bestimmbare Grösse wird zweckmässig der Horizontalschub X eingeführt. Die Spannkräfte S sollen in der Form

$$S = S_0 - S'X$$

dargestellt werden. Wird $X = 0$ gesetzt, so geht der Bogen in einen *Gerber*'schen Balken über, dessen Spannkräfte S_0 sich leicht bestimmen lassen. S' bedeutet den Werth, welchen S annimmt, sobald $X = -1$ gemacht wird. Diesen Belastungszustand zeigt Fig. 168. In A und B greifen die wagerechten, nach aussen gerichteten Kräfte 1 an; ausserdem müssen — damit sich die Bogentheile AE und BF nicht um die

Gelenke E und F drehen — die lothrechten, nach unten gerichteten Kräfte $\frac{2h}{l_1}$ angebracht werden. Letztere bedingen bei C und D gleich grosse, nach oben wirkende Widerstände.

Nachdem die Spannkräfte S' für sämmtliche Stäbe bestimmt worden sind (beispielsweise mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes) kann X mit Hilfe der Elasticitätsbedingung

$$X\Sigma S'^2\rho = \Sigma P_m\delta_m' + \Sigma S'\varepsilon ts - L'$$

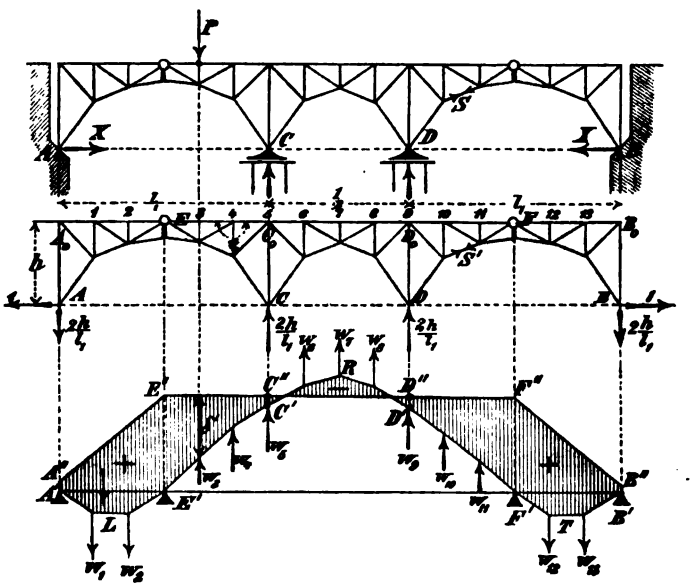


Fig. 167.

Fig. 168.

Fig. 169.

berechnet werden. Am besten bestimmt man getrennt:

den Einfluss einer Last P: $X = \frac{P\delta'}{\Sigma S'^2\rho}$

„ „ „ Temperaturänderung $X_t = \frac{\Sigma S'\varepsilon ts}{\Sigma S'^2\rho}$

„ „ von Verschiebungen der Stützen $\Delta X = -\frac{L'}{\Sigma S'^2\rho}$.

Die Werthe X_t und ΔX können bereits nach Ermittlung der S' ausgerechnet werden. L' bedeutet die virtuelle Arbeit der an den Stützpunkten A, B, C, D angreifenden äusseren Kräften des Zustandes $X = -1$. Wird z. B. der Einfluss einer Vergrösserung der Stützweite

AB um Δl gesucht, ferner der Einfluss von Senkungen der Punkte C und D um Strecken η' und η'', so hat man zu setzen:

$$L' = 1\,\Delta l - \frac{2h}{l_1}(\eta' + \eta'')$$

weil den in A und B angreifenden wagerechten Kräften 1 die positive virtuelle Arbeit $1 \cdot \Delta l$ entspricht und den nach oben gerichteten Kräften $\frac{2h}{l_1}$ die negative Arbeit $\left(-\frac{2h}{l_1}\eta' - \frac{2h}{l_1}\eta''\right)$.

Zur Bestimmung von X in Folge von P muss — da P an der oberen Gurtung angreift — die Biegungslinie dieser oberen Gurtung ermittelt werden, und zwar für den Zustand $X = -1$. Entscheidet man sich beispielsweise für den in No. 46 (Seite 100) angegebenen Weg, so berechne man die von den Spannungen $\sigma' = \frac{S'}{F}$ abhängigen Aenderungen $\Delta'\vartheta$ der Randwinkel ϑ, schreibe den Knoten 1, 2, 3 ... die Gewichte $w_1 = \Delta'\vartheta_1$, $w_2 = \Delta'\vartheta_2$, $w_3 = \Delta'\vartheta_3$, ... zu (denn die obere Gurtung ist wagerecht und es verschwinden in Gleich. 3, Seite 101 die Glieder mit Δs) und verfahre im übrigen nach Beispiel 8 auf Seite 123. In Fig. 169 wurden die Gewichte w_1, w_2, w_{12}, w_{13} positiv, die anderen w negativ vorausgesetzt.

Die Linienzüge $A'LE'$, $E'C'RD'F'$ und $F'T'B'$ sind die Momentenkurven einfacher Balken $A'E'$, $E'F'$ und $F'B'$, welche beziehw. belastet sind mit w_1, w_2, mit w_3 bis w_{11} und mit w_{12}, w_{13}. Der Schlusslinienzug $A''E''F''B''$ ist bestimmt durch die Längenänderungen der Vertikalen AA_0, CC_0, DD_0 und BB_0; es ist nämlich:

$$\overline{A''A'} = \Delta\overline{AA_0};\ \overline{C''C'} = \Delta\overline{CC_0};\ \overline{D''D'} = \Delta\overline{DD_0};\ \overline{B''B'} = \Delta\overline{BB_0}.$$

Diese Vertikalen werden gedrückt, und es liegen daher die Punkte A'', C'', D'', B'' oberhalb A', C', D', B.*) Die in Fig. 169 schraffirte Fläche ist die gesuchte Biegungsfläche und gleichzeitig Einflussfläche für X (mit dem Multiplikator $1 : \Sigma S''^2\rho$); der mittlere Theil derselben ist negativ, weshalb Lasten, die in den Knoten 6 bis 8 angreifen, einen negativen Horizontalschub X hervorbringen.

Hinzuzufügen bleibt, dass der für X abgeleitete Ausdruck sich für den in der Regel vorausgesetzten Fall einer gleichmässigen Erwärmung des Bogens noch vereinfachen lässt. Zu diesem Zwecke schreiben wir den Stablängen s des bei B auf wagerechter Bahn verschiebbar gedachten Bogens die verschwindend kleinen Aenderungen $\Delta s = \omega s$ zu, wobei ω für alle Stäbe gleich sein soll, und wenden auf diesen Ver-

*) Wir erinnern daran, dass wir die lothrechten Verschiebungen stets nach *unten positiv* zählen.

schiebungszustand und auf den Belastungszustand $X = -1$ das Gesetz der virtuellen Verschiebungen an. Wir erhalten dann, da sich $l = l_2 + 2l_1$ um $\Delta l = \omega l$ ändert, die Beziehung

$$1 \cdot \omega l = \Sigma S' \omega s, \text{ d. h. } \Sigma S' s = l$$

und finden nun (falls neben t auch ε einen festen Werth besitzt)

$$X_t = \frac{\varepsilon t \Sigma S' s}{\Sigma S'^2 \rho} = \frac{\varepsilon t l}{\Sigma S'^2 \rho}.$$

68. Kette, versteift durch einen Gerber'schen Balken. Wir knüpfen an die im ersten Bande (§ 49) durchgeführte Untersuchung an, welche lehrte, dass eine über beliebig viele Oeffnungen gespannte Kette mit durchgehendem Versteifungsbalken ein statisch bestimmtes Tragwerk ist, sobald der Versteifungsbalken ebensoviel Mittelgelenke erhält als die Brücke Oeffnungen besitzt, und die Mittelgelenke so vertheilt sind, dass nach Weglassung irgend eines derselben (welches wir kurz das Gelenk G' nennen wollen) der Versteifungsbalken ein Gerber'scher wird.*) Wir zeigten auch, dass nach Bestimmung des Horizontalzuges H der Kette die Spannkräfte Z der Hängestangen sich mittels des Gesetzes leicht angeben lassen, dass die Kette das Seilpolygon der Kräfte Z ist, womit dann alle am Balken angreifenden Kräfte bestimmt sind; und schliesslich ermittelten wir H, indem wir das Angriffsmoment für den Balkenquerschitt G' gleich Null setzten. Fehlt nun das Gelenk G', wird also die Kette durch einen Gerber'schen Balken versteift, so entsteht ein einfach statisch unbestimmtes Tragwerk, als dessen statisch nicht bestimmbare Grösse X am zweckmässigsten der Horizontalzug der Kette gewählt wird. Zur Berechnung von X dienen, wenn sämmtliche Spannkräfte S auf die Form

$$S = S_0 - S' X$$

gebracht werden, die Formeln:

Einfluss einer Einzellast: $$X = \frac{P\delta'}{\Sigma S'^2 \rho}.$$**)

„ „ Temperaturänderung: $$X_t = \frac{\Sigma S' \varepsilon t s}{\Sigma S'^2 \rho}.$$

„ von Verschiebungen der Stützen: $$\Delta X = -\frac{L'}{\Sigma S'^2 \rho}.$$

---

*) Wie beim Gerber'schen Balken die Gelenke über die verschiedenen Oeffnungen zu vertheilen sind, lehrt Abschnitt VI von Band I.

**) Es handelt sich hier nur um diejenigen Lasten, welche nach Ausführung der Versteifung der Kette aufgebracht werden, in der Regel also nur um die bewegliche Belastung. Vergl. Band I, § 49.

Das Verfahren möge an dem in Fig. 170 abgebildeten Träger erläutert werden. Der Versteifungsbalken besitzt hier zwei in der Mittelöffnung liegende Gelenke G und J. Um den Belastungszustand $X = -1$ zu erhalten, denke man in den Kettengliedern *Drücke* S_1', S_2', S_3', ... erzeugt, denen ein Horizontalschub von der Grösse *Eins* entspricht. Fig. 170[b] giebt an, wie diese Kräfte und die zugehörigen Drücke S_9', S_{10}', S_{11}' ..., in den Hängestangen dargestellt werden können, wobei es genügte, die linke Trägerhälfte zu behandeln. Die Drücke S_9', S_{10}', S_{11}' ... bilden die Belastungen des Versteifungsbalkens, dessen Stützenwiderstände A', B', C', D' nach Abschnitt VI, Band I, zu be-

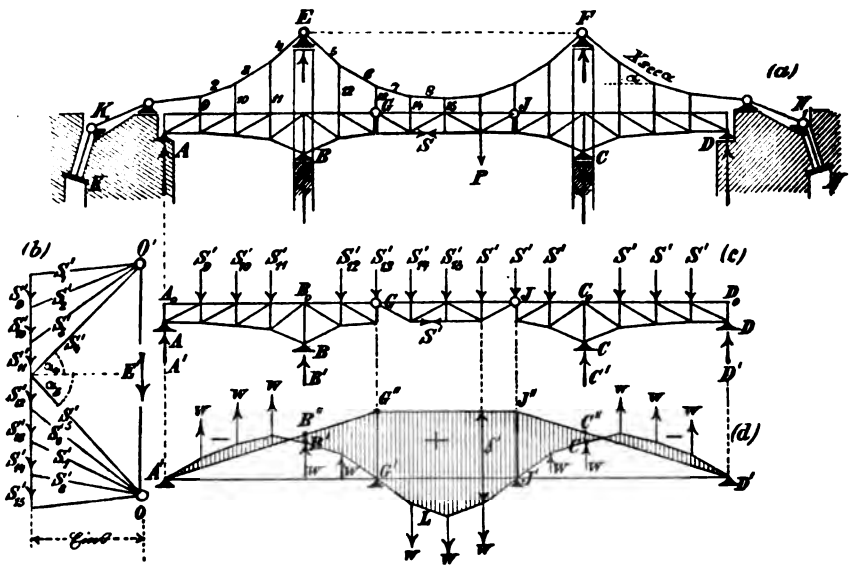


Fig. 170.

stimmen sind, worauf die Spannkräfte S' der Stäbe des Balkens mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes gezeichnet werden können. Ist dies geschehen, so werden die Spannungen $\sigma' = \frac{S'}{F}$ oder die Längenänderungen $(\Delta s)' = \frac{S' s}{EE}$ sämmtlicher Balkenstäbe berechnet, hierauf nach No. 46 oder No. 47 die Gewichte w ermittelt und die in Fig. 170[d] schraffirte Biegungsfläche der Gurtung $A_0 D_0$ bestimmt. Dieselbe ist die Einflussfläche für X $\left(\text{Multiplicator} = \frac{1}{\Sigma S'^2 \rho}\right)$ und wird begrenzt

durch die Momentenlinien $A'B'G'$, $G'L'J'$, $J'C'D'$ der mit den entsprechenden Gewichten w belasteten einfachen Balken $A'G'$, $G'J'$, $J'D'$ und den Schlusslinienzug $A'G''J''D'$, welcher bestimmt ist durch die Verkürzungen $\overline{B''B'}$ und $\overline{C''C'}$ der Vertikalen $\overline{B_0B}$ und $\overline{C_0C}$.*) Zu beachten ist, dass sich der Ausdruck $\Sigma S'^2\rho$ auf sämmtliche Stäbe des Tragwerks (Balkenstäbe, Hängestangen, Glieder der Tragketten und Rückhaltketten) bezieht.

Bei der Berechnung von X_t wird meistens angenommen, dass sich die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechenden Temperaturen sämmtlicher Stäbe um den gleichen Betrag t ändern. Es stellt sich dann heraus, dass der Einfluss der Temperaturänderungen der Balkenstäbe und Hängestangen ein verhältnissmässig sehr geringer ist, und dass es genügt, im *Zähler* des für X_t erhaltenen Ausdruckes nur die Glieder der Tragketten und Rückhaltketten zu berücksichtigen. Für ein unter α gegen die Wagerechte geneigtes Glied der Tragkette erhält man $S' = -1 \cdot \sec\alpha$, und für die Glieder der Rückhaltketten ergeben sich z. B. bei der in Fig. 171 veranschaulichten Anordnung die Werthe $S' = -1 \sec\alpha'$. Daraus folgt dann:

$$X_t = -\frac{\varepsilon t}{\Sigma S'^2\rho}\left\{\Sigma s \sec\alpha + 2\,(s_a + s_b)\sec\alpha'\right\},$$

worin $s_a = \overline{KK_1}$ und $s_b = \overline{K_1K_2}$. Die Summe $\Sigma s \sec\alpha$ erstreckt sich nur über die Glieder der Tragkette. In Folge einer Erhöhung der Temperatur wird der Horizontalzug der Kette verkleinert.

Verschiebungen der Widerlager bleiben meistens unberücksichtigt, obgleich Längenänderungen schlanker Mittelpfeiler und ein Nachgeben der Verankerungen von merklichem Einfluss auf X sein können. Es senke sich z. B. der Stützpunkt E um η_1, F um η_2, auch verschiebe sich der Stützpunkt K im Sinne KK_1 um η_3 und der entsprechende Stützpunkt des rechten Endpfeilers um η_4. In den Punkten E und K greifen beim Eintreten des Zustandes $X = -1$ die Stützenwiderstände an:

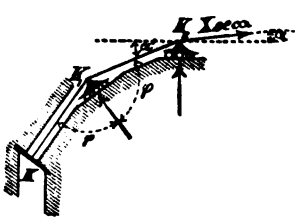


Fig. 171.

*) Die Vertikalen A_0A und D_0D des in der Fig. 170 abgebildeten Trägers sind für den Belastungszustand $X = -1$ spannungslos; ihre Längenänderungen sind also $= 0$.

$E' = 1\,(\mathrm{tg}\,\alpha_4 + \mathrm{tg}\,\alpha_5)$, nach abwärts gerichtet
$K' = 1\,\sec\alpha'$ „ „ oben „ *)

und entsprechend gleiche Widerstände wirken bei F und N.

Die virtuelle Arbeit dieser Auflagerkräfte ist:

$$L' = (\mathrm{tg}\,\alpha_4 + \mathrm{tg}\,\alpha_5)(\eta_1 + \eta_2) + \sec\alpha'(\eta_3 + \eta_4)$$

und man erhält daher:

$$\Delta X = -\frac{1}{\Sigma S'^2\rho}\left[(\mathrm{tg}\,\alpha_4 + \mathrm{tg}\,\alpha_5)(\eta_1 + \eta_2) + \sec\alpha'(\eta_3 + \eta_4)\right].$$

69. Kette, über eine Oeffnung gespannt und durch einen Bogenträger mit 2 Kämpfergelenken versteift, Fig. 172. Dieses Tragwerk ist *zweifach* statisch unbestimmt. Als statisch nicht bestimmbare Grössen werden zweckmässig der Horizontalzug X' der Kette und der Horizontalschub X'' des Bogens eingeführt. Die Spannkräfte werden auf die Form $S = S_0 - S'X' - S''X''$ gebracht.

Fig. 175 zeigt den einfachen Balken AB, in welchen das Fachwerk im Falle $X' = 0$ und $X'' = 0$ übergeht, während die Figuren 173 und 174 diesen Balken im Belastungszustande $X' = -1$ bezieh. $X'' = -1$ darstellen.

Bei Eintreten des Zustandes $X' = -1$ greifen am Balken AB die lothrechten Lasten S_7', S_8', ... an (d. h. die Drücke in den Hängestangen, welche genau so bestimmt werden wie im vorigen Beispiele), und im Belastungsfalle $X'' = -1$ befindet sich der Balken unter dem Einflusse zweier wagerechter Kräfte 1. Nach Berechnung der den Spannkräften S' und S'' entsprechenden Knotenpunktsgewichte w' und w'' werden die Biegungslinien (δ' und δ'') als Momentenlinien einfacher Balken AB ermittelt**) und schliesslich die Elasticitätsgleichungen aufgelöst:

$$X'\Sigma S'^2\rho + X''\Sigma S'S''\rho = P\delta' + \Sigma S'\varepsilon ts - L'$$
$$X'\Sigma S''S'\rho + X''\Sigma S''^2\rho = P\delta'' + \Sigma S''\varepsilon ts - L''.$$

---

*) Wir setzen voraus, dass bei K_1 und K_2 bewegliche Lager angeordnet sind. Der Widerstand des auf wagerechter Bahn geführten Stützpunktes K_2 ist lothrecht, der Widerstand bei K_1 halbire den Winkel KK_1K_2. Dann wird jedes der beiden Kettenglieder KK_1 und K_1K_2 durch eine Spannkraft $X\sec\alpha'$ beansprucht, wo α' den Neigungswinkel von K_1K_2 gegen die Wagerechte bedeutet. In K greift also ein von K_2 nach K_1 gerichteter *Widerstand* $X\sec\alpha'$ an und im Falle $X = -1$ ein von K_2 nach K_1 gerichteter von der Grösse $1\sec\alpha'$.

**) In Fig. 173 und 174 wurden die Längenänderungen der Endständer AA_0 und BB_0 vernachlässigt.

Man erhält den Einfluss der Belastung

$$X' = P(\omega''\delta' - \omega\delta'')$$
$$X'' = P(\omega'\delta'' - \omega\delta')$$

worin $\omega' = \frac{\Sigma S'^2\rho}{N}$, $\omega'' = \frac{\Sigma S''^2\rho}{N}$, $\omega = \frac{\Sigma S'S''\rho}{N}$

$$N = \Sigma S'^2\rho \cdot \Sigma S''^2\rho - (\Sigma S'S''\rho)^2,$$

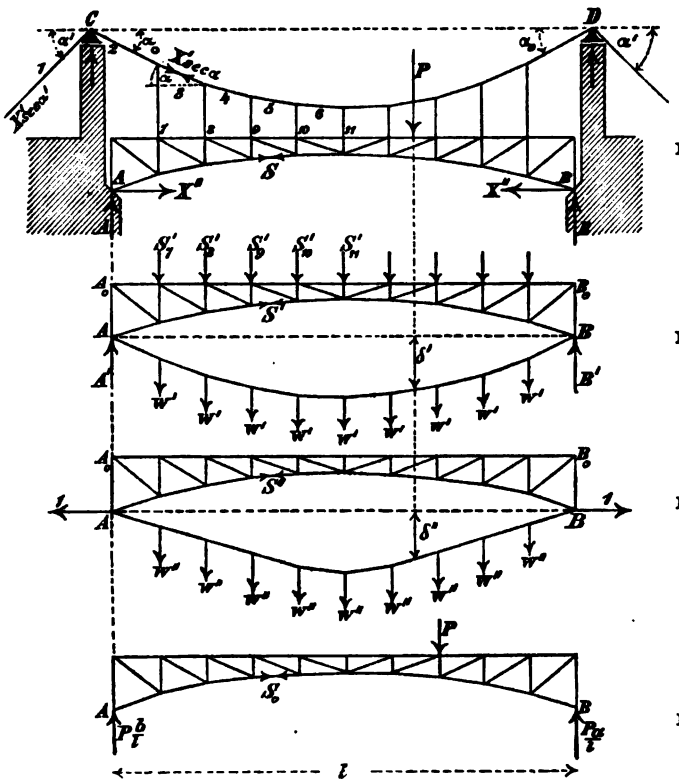


Fig. 172.

Fig. 173.

Fig. 174.

Fig. 175.

ferner den Einfluss einer Temperaturänderung:

$$X'_t = \omega''\Sigma S'\varepsilon ts - \omega\Sigma S''\varepsilon ts$$
$$X''_t = \omega'\Sigma S''\varepsilon ts - \omega\Sigma S'\varepsilon ts$$

und den Einfluss einer Bewegung der Stützen:

$$\Delta X' = -\omega'' L' + \omega L''$$
$$\Delta X'' = -\omega' L'' + \omega L'.$$

Die von S' abhängigen Summenausdrücke erstrecken sich über die Stäbe des Bogens, die Hängestangen, die Tragkette und die Rückhalt-

ketten, die von S'' abhängigen nur über den Bogen, da für die Kettenglieder und Hängestangen $S'' = 0$ ist.

Wird eine gleichmässige Temperaturänderung angenommen, so darf man, wie im vorigen Beispiele,

Fig. 176.

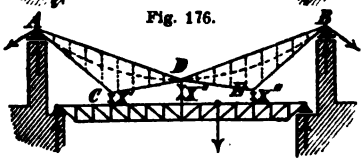


Fig. 177.

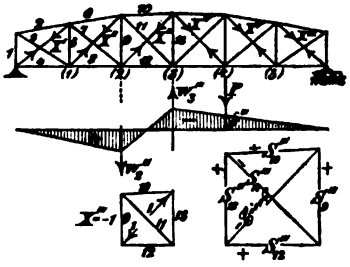


Fig. 179.

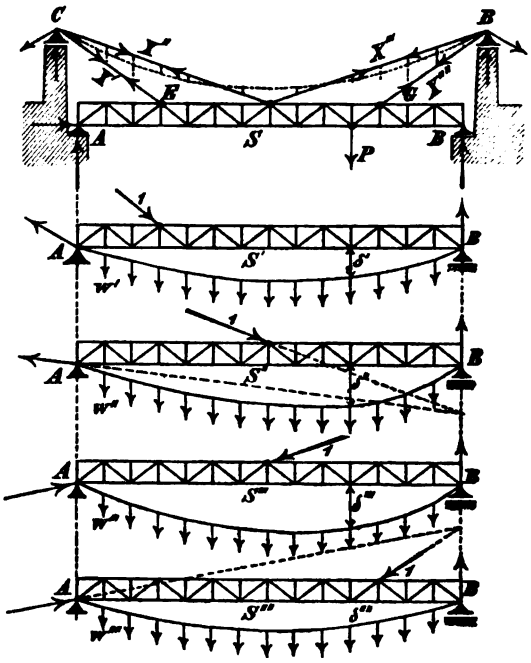


Fig. 178.

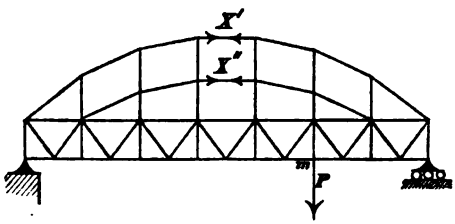


Fig. 180.

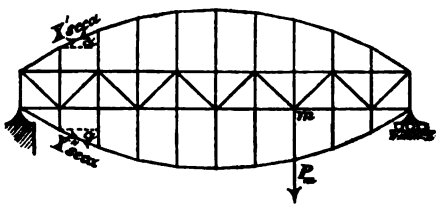


Fig. 181.

$$\Sigma S' \varepsilon t s = \Sigma s \sec\alpha + 2 s' \sec\alpha'$$

setzen, worin sich $\Sigma s \sec\alpha$ nur über die Glieder der Tragkette erstreckt und s' die Länge einer Rückhaltkette (bis zur Ankerplatte gemessen!) bedeutet. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Rückhaltkette entweder geradlinig oder, wenn gebrochen, derart mit Zwischenstützen versehen ist, dass die Spannkraft in der ganzen Kette gleich gross

ist. Vergl. Fig. 171. Weiter darf man (ähnlich wie beim ersten Beispiel, Fig. 167)

$$\Sigma S'' s t s = \varepsilon t l$$

setzen.

Sollen $\Delta X'$ und $\Delta X''$ unter der Voraussetzung berechnet werden, dass sich die Stützpunkte C und D um η_1 bezieh. η_2 senken, dass ferner die Ankerplatten links und rechts in der Richtung der Rückhaltketten um η_3 bezieh. η_4 nachgeben und l sich um Δl ändert, so hat man zu setzen:

$$L' = 1 \cdot (\operatorname{tg} \alpha_0 + \operatorname{tg} \alpha')(\eta_1 + \eta_2) + 1 \cdot \sec \alpha' (\eta_3 + \eta_4)$$
$$L'' = 1 \cdot \Delta l \qquad \text{(Vergl. das vorige Beispiel).}$$

70. Uebungsaufgaben. Die durch einen einfachen Balken versteifte Kette in Fig. 176 ist einfach statisch unbestimmt. Kennt man den Horizontalzug X, so kann man die Spannkräfte in den Hängestangen mittels der Bedingung finden, dass die Kette das Seilpolygon dieser Kräfte ist.

Figur 177 stellt ein dreifach statisch unbestimmtes Hängewerk *(System Ordish-Lefeuvre)* dar. Sind die Spannkräfte X', X'', X''' der lothrechten Hängestangen bekannt, so sind die in den Tragketten AC, CD, EB, ED, AD, DB und in den Rückhaltketten auftretenden Kräfte gegeben. Die durch eine gestrichelte Linie angedeutete Kette hat nur das Gewicht der Tragketten aufzunehmen. Bei symmetrischer Anordnung ist die Biegungslinie für $X''' = -1$ das Spiegelbild der Biegungslinie für $X' = -1$.

Ein ähnliches Hängewerk zeigt Figur 178; dasselbe ist 4-fach statisch unbestimmt. Die Belastungszustände $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$, $X'''' = -1$ des Versteifungsbalkens sind in der Figur dargestellt worden; es ist zu beachten, dass am festen Auflager A schräge Widerstände hervorgerufen werden.

Das Balkenfachwerk in Fig. 179 besitzt in jedem Felde zwei sich kreuzende Diagonalen, welche aber beide im Stande sind, Zug- und Druckkräfte zu übertragen. Hat das Fachwerk also n Felder, so ist es n-fach statisch unbestimmt. In der Figur ist der Kräfteplan für $X''' = -1$ vorgeführt worden; die Wirkung dieser Kraft erstreckt sich nur über die Stäbe 9, 10, 11, 12, 13, und es treten daher nur zwei Gewichte w auf, nämlich w_2''' und w_3''', welche am besten nach No 47 Gleich. 10 berechnet werden. Man erhält für w_2''' einen positiven, für w_3''' einen negativen Werth und gelangt daher zu der in der Abbildung angedeuteten Biegungslinie (δ'''). Ebenso werden die Zustände $X' = -1$, $X'' = -1$, u. s. untersucht.

Die Figuren 180 und 181 zeigen zweifach statisch unbestimmte Tragwerke, welche in ähnlicher Weise behandelt werden wie die versteiften Kettenbrücken in Fig. 170, 172, 176.

Wir heben zum Schluss noch einmal hervor, dass bei Anwendung der Gleichungen V auf Seite 168 die Summe Σ sich über sämmtliche Stäbe erstreckt, über die nothwendigen und überzähligen. So entsprechen beispielsweise dem überzähligen Stabe des ersten Feldes des Trägers in Fig. 179 die Werthe: $S' = -1$; $S'' = 0$; $S''' = 0$; $S'''' = 0$; u. s. w. dem des zweiten Feldes: $S' = 0$; $S'' = -1$; $S''' = 0$; $S'''' = 0$ u. s. w. Man vergl. auch Seite 26 der Einleitung.

§ 6.

Allgemeines über das Auftragen der Einflusslinien.

71. Sind die Einflusslinien für die Grössen X eines durch parallele Lasten P beanspruchten Fachwerks nach einem der in No. 56 bis 69 angegebenen Verfahren bestimmt worden, so lassen sich die Einflusslinien der Spannkräfte S und Stützenwiderstände C mittels der zwischen den S, C und X bestehenden Beziehungen ersten Grades darstellen. Soll beispielsweise die Einflusslinie für eine Spannkraft

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c - \ldots .$$

aufgetragen werden, so nehme man zuerst sämmtliche $X = 0$ an, zeichne die S_0-Linie des statisch bestimmten Hauptsystems auf die im I. Bande gezeigte Weise und verkleinere die Ordinaten derselben um die Summe der beziehungsweise mit S_a, S_b, S_c, ... multiplicirten entsprechenden Ordinaten der Einflusslinien für X_a, X_b, X_c, ..., wobei es sich empfiehlt, die Multiplikation mit Hilfe von Winkeln α, β, γ .... auszuführen, welche der Reihe nach durch

$$\operatorname{tg}\alpha = S_a, \quad \operatorname{tg}\beta = S_b, \quad \operatorname{tg}\gamma = S_c, \quad \ldots .$$

bestimmt sind.*)

In Fig. 182 ist dieses allgemeine Verfahren an einem Bogenträger mit festen Kämpfergelenken (A, B) und auf wagerechter Bahn beweglichem Auflagergelenke C erläutert worden. Als statisch nicht bestimmbare Grössen sind eingeführt: der Horizontalschub X_a und der Widerstand X_b der Mittelstütze. Gesucht sei die Einflusslinie für die Spannkraft S im Stabe $i - k$ der oberen Gurtung. Werden X_a und $X_b = 0$ gesetzt, so liegt ein einfacher Balken AB vor, und es besteht deshalb die S_0-Linie aus zwei Geraden AC und CB, welche nach Fig. 182c durch Auftragung von $AJ = -1\,\frac{x_m}{r_m}$ bestimmt sind, wobei r_m das

*) Auch der Proportionalcirkel leistet gute Dienste.

Loth vom Knotenpunkt m auf den Stab ik bedeutet. Die den Belastungszuständen $X_a = -1$ und $X_b = -1$ entsprechenden Spannkräfte S_a und S_b stellen sich hier *negativ* heraus, während X_a und X_b nur positive Werthe besitzen; das Glied: $-(S_a X_a + S_b X_b)$ ist also positiv; addirt man dasselbe zu dem negativen Werthe S_0, so erhält man für $P = 1$:

$$S = S_0 - S_a X_b - S_b X_b = P\eta$$

und gelangt zu der in der Fig. 182c voll schraffirten Einflussfläche für S. Dieselbe ermöglicht für jeden Belastungszustand die Ermittlung von

$$S = \Sigma P\eta.$$

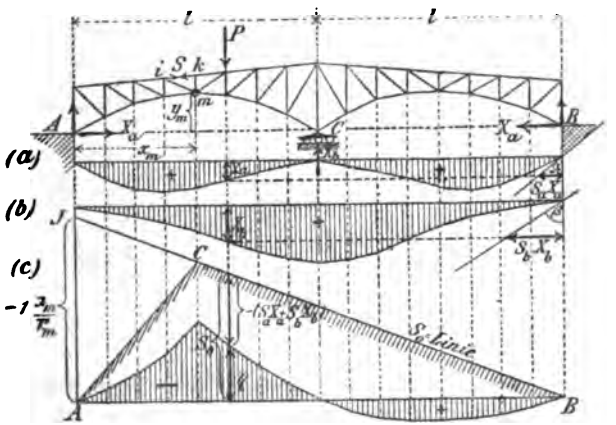


Fig. 182.

72. Die ziemlich umfangreiche Arbeit, welche die Auftragung der Einflusslinien für sämmtliche Spannkräfte S eines mehrfach statisch unbestimmten Fachwerks verursacht, lässt sich durch Verwerthung der zwischen den einzelnen Grössen S stattfindenden statischen Beziehungen meistens erheblich abkürzen. In der Regel liegen Fachwerke vor, die aus aneinander gereihten Dreiecken bestehen; es ist dann zu empfehlen, die Spannkräfte in den Füllungsstäben durch die Gurtkräfte auszudrücken. Bei belasteter oberer Gurtung betrachte man einen unteren Knotenpunkt m (Fig. 183), nehme zuerst $U_{m-1} = +1$ und $U_{m+1} = 0$ an und bestimme mit Hilfe des in Fig. 183a dargestellten Kräftepolygons die entsprechenden Spannkräfte: $-\varkappa_m$ (Druck) und $+\varkappa_{m+1}$ (Zug) der Wandglieder D_m und D_{m+1}. Ganz ebenso ermittle man für den Zustand $U_{m-1} = 0$ und $U_{m+1} = +1$ die Spannkräfte $+\nu_m$ und $-\nu_{m+1}$

jener Glieder, um hierauf die für jeden Belastungszustand gültigen Formeln zu erhalten:

$$D_m = -\varkappa_m U_{m-1} + \nu_m U_{m+1} = \nu_m \left(-\frac{\varkappa_m}{\nu_m} U_{m-1} + U_{m+1}\right)$$

$$D_{m+1} = +\varkappa_{m+1} U_{m-1} - \nu_{m+1} U_{m+1} = \nu_{m+1}\left(+\frac{\varkappa_{m+1}}{\nu_{m+1}} U_{m-1} - U_{m+1}\right).$$

Die Einflusslinien für die Klammerausdrücke wollen wir kurz die Einflusslinien für D_m beziehungsweise D_{m+1} nennen und die Faktoren ν_m und ν_{m+1} als *Multiplikatoren* dieser Linien bezeichnen. Die D_m-Linie erhält man, wenn man die mit $\varkappa_m : \nu_m$ multiplicirte U_{m-1}-Linie von der

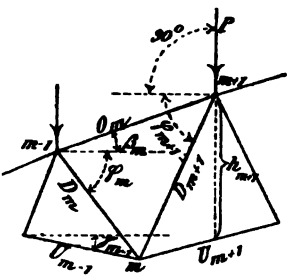


Fig. 183.

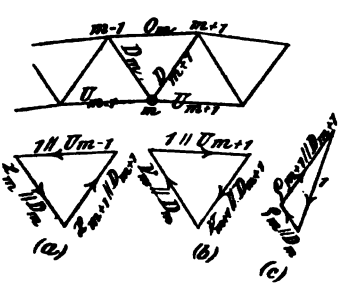


Fig. 184.

U_{m+1}-Linie in Abzug bringt, und ganz entsprechend ergiebt sich die D_{m+1}-Linie. Zur Ausführung der Multiplikationen mit $\varkappa_m : \nu_m$ und $\varkappa_{m+1} : \nu_{m+1}$ benutze man Hilfswinkel oder den Proportionalcirkel.

Bei belasteter unterer Gurtung drücke man die Spannkräfte D durch die Spannkräfte O aus.

Die oben für D_m und D_{m+1} abgeleiteten Gleichungen gelten auch für den Fall belasteter unterer Gurtung so lange im Knoten m keine Last angreift. Liegt die Lasteinheit bei m, so treten rechts noch Glieder ρ_m bezieh. ρ_{m+1} hinzu, die der Fig. 184c zu entnehmen sind. Hierauf ist zu achten, wenn beide Gurte belastet sind. Vergl. auch das ähnliche allgemeine Verfahren in Band I, § 35.

Sind nicht nur die Lasten, sondern überhaupt alle äusseren Kräfte (also auch die Stützenwiderstände) einander parallel, ein Fall der bei Balken auf mehreren Stützen, sowie bei den Versteifungsbalken von Kettenbrücken in der Regel vorliegen wird, so gehe man, falls sämmtliche Wandglieder gegen die Richtung der Lasten geneigt sind (Fig. 184), von den bereits im I. Bande benutzten Gleichungen aus:

$$D_m \cos\varphi_m = -U_{m-1}\cos\gamma_{m-1} - O_m \cos\beta_m$$
$$D_{m+1}\cos\varphi_{m+1} = -U_{m+1}\cos\gamma_{m+1} - O_m\cos\beta_m.$$

Sind dann mittels des in No. 71 beschriebenen Verfahrens die Einflusslinien für die $O \cos \beta$ und $U \cos \gamma$ gefunden worden, so sind auch die Einflusslinien für die $D \cos \varphi$ bestimmt.

Für das in Fig. 185 dargestellte, von parallelen äusseren Kräften angegriffene Fachwerk, dessen Stäbe zum Theil in die Kraftrichtung fallen, gelten die Beziehungen:

$$-O_m \cos \beta_m = +U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} = \frac{M_m}{h_m} \text{*)}$$

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

$$V_m = \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}\left[\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \cdot \frac{h_{m-1}}{h'_{m-1}} - \frac{M_m}{h_m}\right] \text{Last am Obergurt}$$

$$V_m = \frac{h''_{m+1}}{\lambda_{m+1}}\left[\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} \cdot \frac{h_{m+1}}{h''_{m+1}}\right] \text{Last am Untergurt;}$$

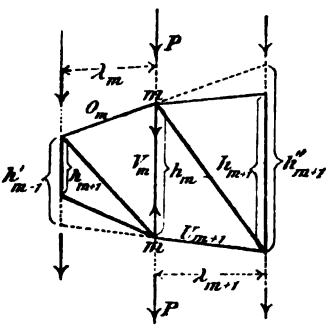


Fig. 185.

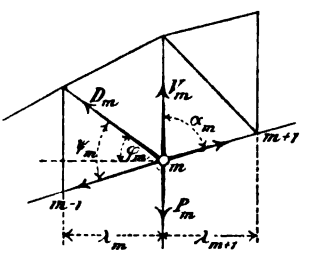


Fig. 186.

aus denen hervorgeht, dass es zweckmässig sein wird, zunächst die Einflussflächen für die Werthe $\frac{M}{h}$ darzustellen, um in dem Unterschiede zweier aufeinanderfolgenden $\frac{M}{h}$-Flächen eine $D \cos \varphi$-Fläche zu erhalten. Auch die V_m-Fläche ist durch zwei aufeinanderfolgende $\frac{M}{h}$-Flächen, von denen aber die eine mit einem Höhenverhältniss mul-

*) M_m bedeutet das Angriffsmoment für den Knoten m; dasselbe wird in der Form: $M_m = M_{0m} - M'_m X' - M''_m X'' - \ldots$ dargestellt, wenn X', X'', ... die statisch nicht bestimmbaren Grössen sind. Die Formeln für O, D und V sind im I. Bande, § 35 u. 39, abgeleitet worden. Die Ausdrücke für die V wurden oben in anderer Form geschrieben wie früher. Die Formeln für O und U gelten bei beliebig gerichteten äusseren Kräften

tiplicirt werden muss, bestimmt; ferner treten bei den V-Flächen Multiplicatoren auf.

Bei gerader Gurtung wird die Ermittlung der Kräfte V wesentlich einfacher. So findet man z. B. für den in Fig. 186 dargestellten Fall einer geraden unteren Gurtung die Gleichgewichtsbedingung:

$$(V_m - P)\sin\alpha_m + D_m \sin\psi_m = 0$$

und hieraus:

$$V_m = -\frac{D_m \sin\psi_m}{\sin\alpha_m} + P = \frac{\sin\psi_m}{\sin\alpha_m \cos\varphi_m}\left(-D_m\cos\varphi_m + \frac{P\cos\varphi_m \sin\alpha_m}{\sin\psi_m}\right).$$

So lange die über den Träger wandernde Lasteinheit ausserhalb der Felder λ_m und λ_{m+1} liegt, unterscheidet sich die Einflussfläche für den Klammerausdruck von der $D_m\cos\varphi_m$-Fläche nur durch das Vorzeichen; an der Stelle m ist zu der in entgegengesetztem Sinne zu nehmenden Ordinate der $D_m\cos\varphi_m$-Linie noch der Betrag: $\frac{1\cdot\cos\varphi_m\sin\alpha_m}{\sin\psi_m}$ zu addiren. Ist die untere Gurtung rechtwinklig zur Richtung der Lasten, so wird $\frac{\sin\psi_m}{\sin\alpha_m\cos\varphi_m} = \operatorname{tg}\varphi_m$.

Besonders einfach wird die ganze Untersuchung für Paralleliträger, deren äussere Kräfte rechtwinklig zu den Gurtungen sind. Hier kommt es nur darauf an, die Momente und Querkräfte zu bestimmen, aus denen sich dann sämmtliche Stabkräfte berechnen lassen.

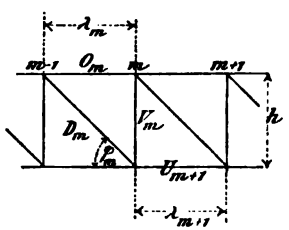


Fig. 187.

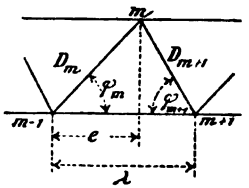


Fig. 188.

Für das in Fig. 187 dargestellte Fachwerk ergiebt sich z. B., wenn Q_m die Querkraft für das m^{te} Feld bedeutet,

$$-O_m h = +U_{m+1}h = M_m; \qquad D_m\sin\varphi_m = Q_m$$
$$V_m = -Q_m, \text{ Last oben,}$$
$$V_m = -Q_{m+1}, \text{ Last unten.}$$

Da nun $Q_m = \frac{1}{\lambda_m}(M_m - M_{m-1})$ ist, so kann man nach Ermittlung der M-Flächen jede $Q\lambda$-Fläche als den Unterschied zweier aufeinanderfolgender M-Flächen gewinnen, oder man zeichnet zuerst die $Q\lambda$-Flächen und benutzt hierauf die Beziehung

$$M_m = M_{m-1} + Q_m\lambda_m,$$

um aus der einen M-Fläche schrittweise alle übrigen abzuleiten.

Liegt das Fachwerk in Fig. 188 vor, und sind $m-1$ und $m+1$ Knotenpunkte der belasteten Gurtung, ferner Q die Querkraft für das Feld $(m-1)-(m+1)$, so beachte man die Beziehungen:

$$M_{m+1} = M_{m-1} + Q\lambda; \qquad M_m = M_{m-1} + Qe.$$

$$O_{m-1}h = -M_{m-1}, \quad U_m h = +M_m, \quad O_{m+1}h = -M_{m+1}$$

$$D_m \sin\varphi_m = -D_{m+1}\sin\varphi_{m+1} = +Q.$$

73. Auf eine sehr übersichtliche Weise lassen sich die Einflussflächen für die Spannkräfte *einfach* statisch unbestimmter Träger gewinnen; denn hier erscheint S in der Form

$$S = S_0 - S'X = S'\left(\frac{S_0}{S'} - X\right),$$

und es ist daher möglich, wenn S' als Multiplikator herausgezogen wird, jede S-Fläche als den Unterschied der X-Fläche und einer meistens von nur wenigen Geraden begrenzten S_0/S'-Fläche (deren Aufzeichnung ebenso schnell vor sich geht, wie die der S_0-Fläche) darzustellen.

Wir werden meistens die X und die $\eta' = S_0/S'$ (Figur 189[a]) von derselben Geraden $N'N$ aus auftragen und erhalten dann die S-Fläche (deren Ordinaten mit η bezeichnet werden mögen) gewissermassen auf die X-Linie als gebrochene Null-Achse bezogen. Giebt man aber der Einführung einer allen S-Flächen gemeinsamen geraden Nulllinie (die bei lothrechter Belastung meistens wagerecht gewählt wird) den Vorzug, so gelangt man zu der Darstellungsweise in Fig. 189[b], in welcher die Ordinaten η' von der X-Linie aus aufgetragen wurden, und aus welcher ohne weiteres das Gesetz abgelesen werden kann, dass innerhalb eines Gebietes, in welchem die S_0/S'-Linie der Fig. 189[a] geradlinig verläuft, entsprechende Seiten der S-Linie und X-Linie sich in Punkten einer Geraden schneiden, welche durch den Nullpunkt der S_0/S'-Linie geht und parallel zu P ist.*) Auf Grund dieser Eigenschaft

*) Die S-Linie ist also innerhalb eines von einer geraden S_0-Linie beherrschten Gebietes affin mit der X-Linie.

lässt sich die S-Linie aus der X-Linie ableiten, sobald eine Ordinate und die Nullpunkte der S_0/S'-Linie bekannt sind.*)

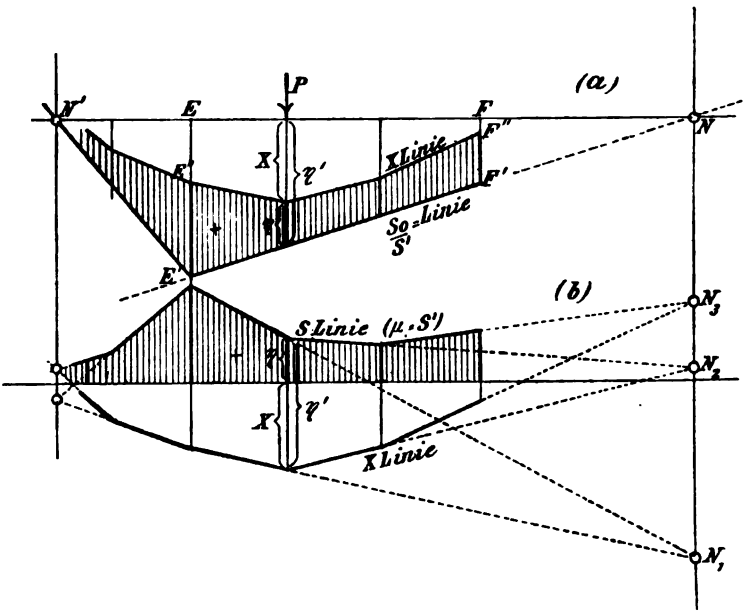


Fig. 189.

Beispiel. Für den in Fig. 190 abgebildeten, einfach statisch unbestimmten Bogenträger sei nach dem in No. 67 beschriebenen Verfahren die Einflusslinie für den Horizontalschub X ermittelt und von der geraden Nulllinie $A'B'$ aus aufgetragen worden.**) Es soll die Einflussfläche für die Spannkraft O des dem Knotenpunkte m gegenüberliegenden Stabes der oberen Gurtung gezeichnet werden.

Den Belastungszustand $X = -1$ zeigt Fig. 198. In A und B wurden Kräfte (K') angebracht, deren wagerechte nach aussen gerichtete Seitenkräfte von der Grösse 1 sind und welche durch die Gelenke E und F gehen müssen, damit sich die Bogentheile AE und BF nicht um E bezieh. F drehen. Sodann wurden die einander gleichen Kräfte

*) Wir erinnern hier u. A. an die Ermittlung der Nullpunkte der S_0-Linien mit Hilfe von Polbestimmungen kinematischer Ketten. Band I, XIII. Abschnitt.

**) In Figur 190 vernachlässigten wir die dem Zustande $X = -1$ entsprechenden Längenänderungen der von den Stützpunkten A, C, D, B ausgehenden lothrechten Füllungsstäbe. Vergl. Fig. 169, Seite 165.

(C') und (D') hinzugefügt, welche den (K') das Gleichgewicht halten. Der aus drei Geraden bestehende Linienzug A, C_1, D_1, B ist das Seilpolygon (Mittelkraftspolygon) der Kräfte K', C', D', K'.

Ein behufs Bestimmung der Spannkraft O' durch das Fachwerk geführter Schnitt tt trifft die Seilpolygonseite $C_1 D_1$, welche die Lage der Mittelkraft (R) der links von tt wirksamen äusseren Kräfte K' und

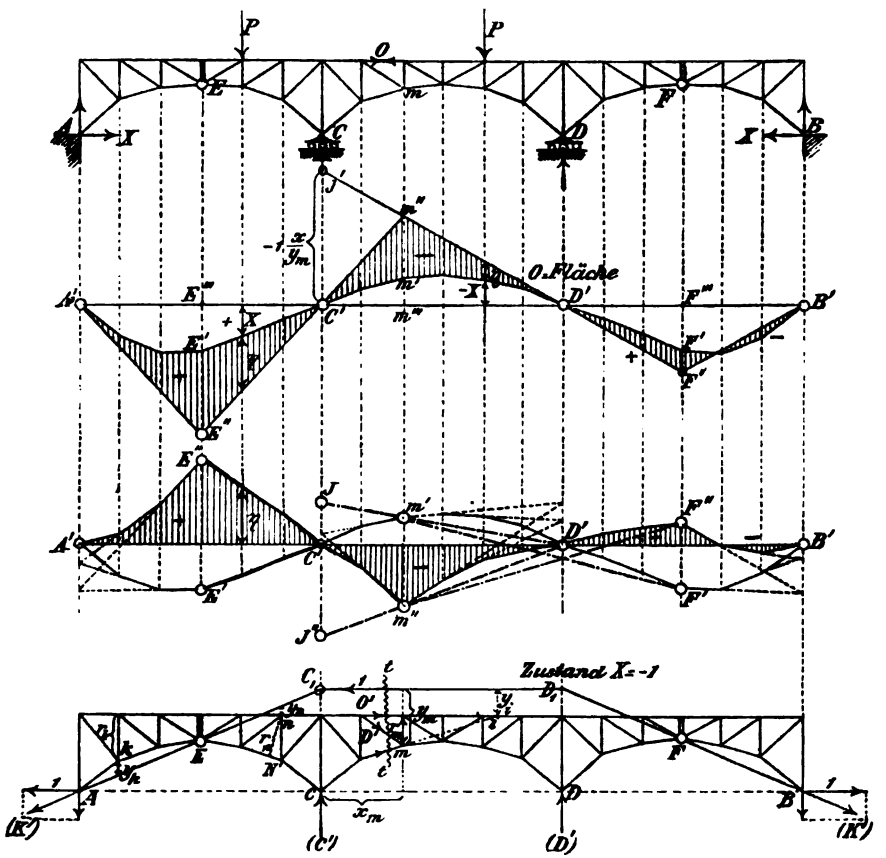


Fig. 190, 191, 192, 193.

C' bestimmt. Misst man also den lothrechten Abstand y_m des Punktes m von der Seite $C_1 D_1$ und erwägt, dass die wagerechte Seitenkraft von R die Grösse 1 besitzt, so lautet die Ritter'sche Momentengleichung für den Drehpunkt m:

$$O' r_m - 1 \cdot y_m = 0, \text{ woraus } O' = + 1 \frac{y_m}{r_m},$$

weshalb schliesslich

$$O = O'\left(\frac{O_0}{O'} - X\right) = \frac{y_m}{r_m}\left(\frac{r_m}{y_m} O_0 - X\right)$$

erhalten wird.

[Die vorstehende Beschreibung der Bestimmungsweise der Spannkräfte S' berücksichtigt eine beliebige Neigung der vom Schnitte tt getroffenen Seite des Mittelkraftspolygons; sie liefert z. B. für den Obergurtstab des ersten Feldes: $O' = -1\frac{y_k}{r_k}$, für den Untergurtstab des 5ten Feldes: $U' = -1 \cdot \frac{y_n}{r_n}$, für die vom Schnitte tt getroffene Diagonale: $D' = -1 \cdot \frac{y_i}{r_i}$, wo r_i das Loth von i auf D' bedeutet.]

Im Falle $X = 0$ geht der Träger in einen Gerber'schen Balken über, und es besteht deshalb (nach Band I, § 41) die Einflusslinie für $\frac{r_m}{y_m} \cdot O_0$ aus 4 Geraden $A'E''$, $E''C'm''$, $m''D'F''$ und $F''B'$ (Fig. 191), deren Nullpunkte den Auflagergelenken entsprechen und deren Schnittpunkte in den Senkrechten durch E, m, F liegen. Die Gerade $D'm''$ muss auf der Senkrechten durch C die Strecke:

$$\overline{C'J'} = \frac{r_m}{y_m}\left(-\frac{x_m}{r_m}\right) = -\frac{x_m}{y_m}$$

abschneiden. Bringt man nun von der $\frac{r_m}{y_m} \cdot O_0$-Fläche die X-Fläche in Abzug, so erhält man die in Fig. 191 durch Schraffirung hervorgehobene O-Fläche; der Multiplikator derselben ist $= y_m/r_m$. Lothrechte Lasten P erzeugen:

$$O = \frac{y_m}{r_m} \Sigma P\eta.$$

In Fig. 192 ist die O-Fläche noch einmal, auf eine wagerechte Nulllinie bezogen, dargestellt worden. Nach Auftragung der X-Linie wurde die Gerade $D'm'$ mit der Senkrechten durch C' in J zum Schnitt gebracht, die Strecke $\overline{JJ''} = 1\frac{x_m}{y_m}$ abgetragen und mittels der Geraden $J''D'$ der Punkt m'' der O-Linie bestimmt. Zur Festlegung der Punkte F'' und E'' dienten die aus dem Verlauf der O_0-Linie (welche man für diesen Zweck nur zu skizziren braucht) gefolgerten Bedingungen, dass sich die Geraden $m''F''$ und $m'F'$ in einem Punkte der Senkrechten durch D' schneiden müssen und die (in unserer Figur nicht ausgezogenen) Geraden $m''E''$ und $m'E'$ in einem Punkte der Senkrechten

durch C', und schliesslich wurden die sechs Zweige der O-Linie in der auf Seite 180 beschriebenen Weise (vergl. auch Fig. 189) aus den entsprechenden Zweigen der X-Linie abgeleitet.

Die Darstellungsweise in Fig. 191 ist unbedingt die übersichtlichere und verdient stets den Vorzug. Nach den Erfahrungen, welche der Verfasser bei den von ihm selbst und von den Hörern seiner Vorträge durchgeführten Berechnungen gesammelt hat, empfiehlt sich folgendes Vorgehen.

Man vertheile die Zeichnungen im allgemeinen*) auf 4 Blätter, welche der Reihe nach zur Auftragung der Einflusslinien für die Obergurtstäbe, Untergurtstäbe, Diagonalen und Vertikalen benutzt werden. Auf jedem dieser Blätter bestimme man mit Hilfe einer einzigen X-Linie nach dem in Fig. 191 angewandten Verfahren die Einflusslinien für die in Frage kommenden Spannkräfte, und trage schliesslich jede Einflusslinie von einer **besonderen**, geraden Nulllinie aus auf, wobei die Ordinaten der nach Fig. 191 angefertigten Zeichnung zu ent-

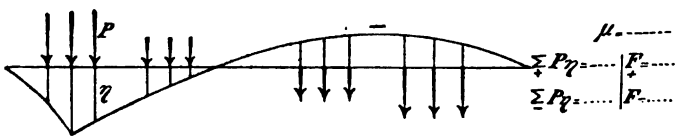


Fig. 194.

nehmen sind. Nun gebe man die gefährlichsten Zugstellungen (welche am besten durch Versuche bestimmt werden) an und schreibe neben jede Einflusslinie die folgenden Werthe:

1. den Multiplikator (den wir von jetzt an stets mit μ bezeichnen werden),
2. die den Lasten P entsprechenden Werthe $\Sigma P\eta$, wobei es sich empfiehlt, durch einen an das Zeichen Σ gesetzten Zeiger $+$ oder $-$ anzudeuten, dass es sich um den Einfluss der auf den positiven oder den negativen Beitragsstrecken liegenden Lasten P handelt,
3. diejenigen Grössen, durch welche der Einfluss der ständigen Belastung bestimmt wird. Bei ungleichen Feldweiten ist es am zweckmässigsten, die Inhalte F und F des positiven bezieh.
   $+$ $-$

*) Auf Vereinfachungen, die sich an der Hand der Betrachtungen in No. 72 ergeben, werden wir in dem von den wichtigsten Trägern handelnden Abschnitt II hinweisen.

negativen Theiles der Einflussfläche zu berechnen und die von der ständigen Belastung (g für die Längeneinheit) herrührende Spannkraft S_g mittels der Formel $S_g = g\,(F - F)$ zu ermitteln, wobei die unter den F stehenden $+$ und $-$ *nicht Vorzeichen sondern nur Zeiger* bedeuten. Haben sämmtliche Felder die gleiche Länge λ so ist die Rechnung mit Knotenlasten $g\lambda$ vorzuziehen. Man bestimme dann die Summe aller positiven, an den Knotenpunkten gemessenen Ordinaten, desgleichen die Summe aller negativen Ordinaten, bezeichne diese Summen kurz mit Σ und Σ und setze schliesslich $S_g = g\lambda\,(\Sigma - \Sigma)$.

Auf diese Weise erhält man sehr übersichtliche Kräftepläne, die von Jedermann schnell geprüft werden können.

Die Formeln zur Berechnung der Grenzwerthe der Spannkräfte lauten mit den vorstehenden Bezeichnungen und mit Berücksichtigung des Einflusses ($S_t = \pm S' X_t = \pm \mu X_t$) einer Erwärmung bezieh. Abkühlung:

$$(1)\qquad \begin{cases} {}_{max}S = \mu\,[+\,\Sigma P\eta + g\,(F - F) + X_t] \\ {}_{min}S = \mu\,[-\,\Sigma P\eta + g\,(F - F) - X_t]: \end{cases}$$

und bei gleichlangen Feldern:

$$(2)\qquad \begin{cases} {}_{max}S = \mu\,[+\,\Sigma P\eta + g\lambda\,(\Sigma - \Sigma) + X_t] \\ {}_{min}S = \mu\,[-\,\Sigma P\eta + g\lambda\,(\Sigma - \Sigma) - X_t]. \end{cases}$$

Es ist darauf zu achten, dass die neben die Einflusslinien zu schreibenden: μ, $\Sigma P\eta$, $\Sigma P\eta$, F, F, Σ, Σ die absoluten Werthe der fraglichen Grössen vorstellen.

Aehnlich verfahre man bei mehrfach statisch unbestimmten Fachwerken. Den Maassstab für die Einflusslinien (den man für die Gurtkräfte und die Spannkräfte in den Füllungsstäben im allgemeinen verschieden annehmen muss) wähle man nicht zu gross, damit man möglichst viele Ordinaten mit dem Cirkel addiren kann. Bei Bestimmung der $\Sigma P\eta$ und $\Sigma P\eta$ beachte man das auf Seite 120 des I. Bandes gesagte.

Bei gleichförmiger Verkehrslast p erhält man (mit der Bezeichnung $q = g + p$):

$$(3)\qquad \begin{cases} {}_{max}S = \mu\left[qF - gF + X_t\right] \\ {}_{min}S = \mu\left[gF - qF - X_t\right] \end{cases}$$

wofür man bei gleichlangen Feldern auch setzen darf:*)

*) Band I, Seite 118.

$$(4)\qquad \begin{cases} {}_{max}S = \mu\left[q\lambda\underset{+}{\Sigma} - g\lambda\underset{-}{\Sigma} + X_t\right] \\ {}_{min}S = \mu\left[g\lambda\underset{+}{\Sigma} - q\lambda\underset{-}{\Sigma} - X_t\right]. \end{cases}$$

Noch sei hervorgehoben, dass es manchmal zweckmässig ist, den Einfluss S_g der ständigen Belastung nach Ermittlung von X_g gesondert mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes zu bestimmen, und im Falle gleichförmiger Verkehrslast die folgenden für alle Träger von unveränderlicher Gliederung und Stützungsart (Vgl. Seite 6 u. 7) geltenden Beziehungen zu benutzen.

Die Spannkraft ${}_{max}S$ entsteht, wenn die positiven Beitragsstrecken mit q, die negativen mit g belastet werden, und die Spannkraft ${}_{min}S$ erhält man, wenn man die positiven Beitragsstrecken mit g und die negativen mit q belastet. Die Zusammenzählung beider Belastungen führt zur gänzlichen Belastung des Trägers mit $q + g$. Hat man nun S_g in der Form

$$(5)\qquad S_g = g\,C_0$$

dargestellt, wo C_0 den Werth bedeutet, den S_g im Falle $g = 1$ annehmen würde, so findet man

$$(6)\qquad {}_{max}S + {}_{min}S = (q + g)\,C_0$$

kann also nach Berechnung des einen Grenzwerthes ohne weiteres den anderen angeben.

Ist die Berechnung von ${}_{max}S$ einfacher als die von ${}_{min}S$, so wird man den Einfluss von p in der Form

$$(7)\qquad {}_{max}S_p = p\,C_1$$

ermitteln und erhält dann

$$(8)\qquad \begin{cases} {}_{max}S = g\,C_0 + p\,C_1 \\ {}_{min}S = q\,C_0 - p\,C_1 \end{cases}$$

Probe: ${}_{max}S + {}_{min}S = (g + q)\,C_0$.

Sollte die Berechnung von ${}_{min}S$ die einfachere sein, so suche man

$$(9)\qquad {}_{min}S = -\,p\,C_2$$

auf, um dann zu erhalten:

$$(10)\qquad \begin{cases} {}_{min}S = g\,C_0 - p\,C_2 \\ {}_{max}S = q\,C_0 + p\,C_2. \end{cases}$$

Die Gesetze (6) bis (10) gelten nicht nur für Spannkräfte, sondern auch für die nach festen Richtungen gebildeten Seitenkräfte von Stützen-

widerständen, für Angriffsmomente und Querkräfte; sie gestatten in vielen Fällen eine wesentliche Abkürzung der Rechnung. Zu beachten ist, dass die nach den Gleichungen (8) und (10) berechneten Grenzwerthe S noch um den Einfluss S_t einer Temperaturänderung zu vergrössern sind.

Annahmen, behufs Vereinfachung der Berechnung von neu zu entwerfenden statisch unbestimmten Trägern.

74. Die genaue Berechnung von neu zu entwerfenden statisch unbestimmten Fachwerken wird durch den Umstand sehr erschwert, dass die Grössen X von den vorläufig unbekannten Stabquerschnitten oder — wenn es sich nur um den Einfluss der Belastung handelt — von dem gegenseitigen Verhältnisse dieser Querschnitte abhängen. Es müssen deshalb im allgemeinen die Querschnittsflächen zunächst abgeschätzt und hierauf an der Hand der Ergebnisse der schärferen Untersuchung geändert werden. Bei wesentlichen Abweichungen zwischen den so erhaltenen und den zuerst angenommenen Querschnitten muss die ganze Rechnung wiederholt werden.

In allen wichtigen Fällen lässt sich nun eine Abkürzung (ohne dass die Ergebnisse der Rechnung an Zuverlässigkeit einbüssen) dadurch erzielen, dass bei der Berechnung der Grössen X die Formänderungen der Füllungsglieder des statisch bestimmten Hauptsystems vernachlässigt und hinsichtlich der Gurtungen vereinfachende Annahmen (z. B. Einführung eines gleichen Querschnitts für die Stäbe einer oder auch beider Gurtungen) gemacht werden.

Es liege z. B. der in No. 57 untersuchte Fachwerkbogen vor. Behufs Bestimmung von X muss für den Zustand $X = -1$, welchem die Längenänderungen $(\Delta s)' = \frac{S's}{EF}$ entsprechen, ein Williot'scher Verschiebungsplan gezeichnet werden. Hierbei weise man jedem Füllungsstabe zunächst den Werth $(\Delta s)' = 0$ zu, was zur Folge hat, dass einem zwei Knoten i und k verbindenden Wandgliede ik im Verschiebungsplane eine zu ik rechtwinklige Gerade $i'k'$ entspricht, und ferner nehme man für alle Gurtstäbe gleich grosse Werthe $\frac{1}{EF}$ an. Setzt man nun $(\Delta s)' = S's$ $\left(\text{anstatt } \Delta s' = \frac{S's}{EF}\right)$ so liefert der Verschiebungsplan die EF-fachen Knotenpunktsverschiebungen; es bleibt aber die Gleichung $X = \frac{\Sigma P_m \delta'_m}{\delta'}$ bestehen, da in Zähler und Nenner die in gleichem

Maasse vergrösserten Verschiebungen δ'_m und δ' eingeführt werden. Hingegen ist die (einer gleichmässigen Temperaturerhöhung entsprechende) Formel $X_t = 1 \frac{\varepsilon t l}{\delta'}$ zu ersetzen durch $X_t = \frac{\varepsilon E F t l}{\delta'}$. Meistens sind die Feldweiten annähernd gleich und dann empfiehlt es sich, den Werth $\frac{s}{EF}$ für alle Gurtstäbe gleich gross anzunehmen und mit $(\Delta s)' = S'$ zu rechnen. Der Einfluss von t ist jetzt: $X_t = \frac{\varepsilon E F t l}{s \delta'}$. Will man für die obere und die untere Gurtung verschieden grosse Querschnitte F_o und F_u einführen und einem Obergurt-Stabe den Werth $(\Delta s)' = S'$ zuweisen, so muss man für einen Untergurtstab $(\Delta s)' = S' \frac{F_o}{F_u}$ annehmen und $X_t = \frac{\varepsilon E F_o t l}{s \delta'}$ setzen. Hervorzuheben bleibt aber, dass im allgemeinen unter F_o und F_u nicht die mittleren Querschnitte der oberen und unteren Gurtung zu verstehen sind und unter s nicht eine mittlere Stablänge, sondern dass häufig die Längenänderungen gewisser Stäbe von ganz hervorragendem Einflusse auf die Formänderung des Fachwerkes sind und die Abmessungen dieser Stäbe daher besonders ins Gewicht fallen. Erhält z. B. der betrachtete Bogenträger im Scheitel eine wesentlich geringere Höhe wie an den Kämpfern, so muss man für F_o, F_u und s die Gurtquerschnitte und die Stablänge im Scheitel wählen.

Indem wir hinsichtlich der bei den wichtigsten Fachwerken einzuführenden Annahmen auf den folgenden Abschnitt verweisen, heben wir noch hervor, dass die dort bevorzugte Benutzung der Biegungslinien den Vortheil bietet, bereits bei Berechnung der Werthe w häufig das besondere Gewicht einzelner Stäbe erkennen zu lassen. Es ist dieser Weg nach den Erfahrungen des Verfassers unbedingt dann vorzuziehen, wenn nur Lasten gleicher Richtung in Betracht kommen, wenn es sich also beispielsweise um den besonders wichtigen Fall *lothrechter* Lasten handelt.

In der Regel greifen die Lasten P in den Knotenpunkten des statisch bestimmten Hauptsystems an, und dieses Hauptsystem ist meistens ein einfaches Dreiecknetz. Werden die Gleichungen (V) auf Seite 163 angewendet, so handelt es sich zunächst darum, die den Belastungszuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, . . . entsprechenden Biegungslinien (δ', δ'' . . .) dieses Dreiecknetzes zu bestimmen.

Bezeichnet nun M'_m das durch die Ursache $X' = -1$ hervorgerufene Angriffsmoment für den Knotenpunkt m, so ergiebt sich für den

dem Punkte m gegenüberliegenden Gurtstab s_m die Spannkraft $S'_m = \mp \frac{M'_m}{r_m}$, wobei r_m die Länge des Lothes von m auf s_m bedeutet. Das obere Vorzeichen bezieht sich auf die obere, das untere auf die untere Gurtung. Das Gewicht w'_m des Knotens m ist (nach No. 47)

$$(1) \qquad w'_m = \mp \frac{(\Delta s_m)'}{r_m} = \mp \frac{S'_m s_m}{EF_m r_m} = + \frac{M'_m s_m}{EF_m r_m^2}$$

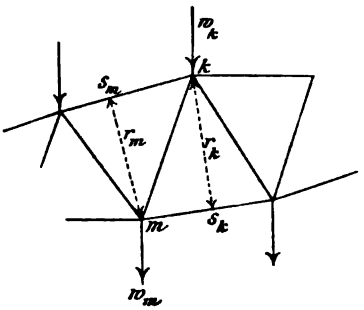


Fig. 195.

und ebenso erhält man für die Zustände $X'' = -1$, $X''' = -1$, ... die Gewichte

$$w_m'' = \frac{M_m'' s_m}{EF_m r_m^2};$$

$$w_m''' = \frac{M_m''' s_m}{EF_m r_m^2}; \ldots$$

Hat E für alle Stäbe denselben Werth, so multiplicire man die w', w'', ... mit E. Ausserdem empfiehlt sich stets noch die Multiplikation mit einer vorläufig beliebigen Querschnittsgrösse F_c (die aber für alle w gleich genommen werden muss) womit sich dann

$$(2) \qquad w' = \frac{M'_m s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}; \; w_m'' = \frac{M_m'' s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}; \ldots.$$

ergiebt. Legt man diese Gewichte der Berechnung der Ordinaten δ', δ'', ... der den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, ... entsprechenden Biegungslinien zu Grunde, so muss man alle Glieder der Gleichungen V (mit Ausnahme der Glieder $\Sigma P_m \delta'_m$, $\Sigma P_m \delta_m''$ ....) mit EF_c multipliciren. Auch ist zu beachten, dass eine weitere Multiplikation mit ν erforderlich wird, sobald die Werthe w', w'' ... aus irgend einem Grunde mit ν multiplicirt werden.*)

Wendet man diese Regeln beispielsweise auf das einfach statisch unbestimmte Fachwerk an, so erhält man zur Berechnung von X die Gleichung:

---

*) Wäre z. B. das Fachwerk in Fig. 195 ein Paralleträger von der Höhe h, und hätten sämmtliche Gurtstäbe die gleiche Länge λ, so wäre $\frac{s_m}{r_m^2} = \frac{\lambda}{h^2}$. Man würde dann die w', w'', ... mit $\nu = \frac{h^2}{\lambda}$ multipliciren und einfacher $w' = M'_m \frac{F_c}{F_m}$ u. s. w. setzen.

$$EF_c L' = \Sigma P_m \delta_m' - X \Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F} + EF_c \Sigma \varepsilon t S' s$$

und findet hieraus für den Einfluss einer Last P, für den Einfluss von Temperaturänderungen und für den Einfluss von Verschiebungen der Widerlager der Reihe nach die Werthe:

$$(3)\quad \begin{cases} X = P_m \dfrac{\delta_m'}{\mathfrak{N}}; \quad X_t = \dfrac{\varepsilon EF_c \Sigma S' ts}{\mathfrak{N}}, \quad \Delta X = \dfrac{-EF_c L'}{\mathfrak{N}} \\ \text{wo } \mathfrak{N} = \Sigma S'^2 s \dfrac{F_c}{F}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen (2) und (3) werden wir im folgenden Abschnitte vorzugsweise anwenden.

Verwerthung von stellvertretenden, aus steifen Gliedern gebildeten Stabzügen.

75. Bedeutet X die Spannkraft eines Stabes ik, der als überzählig bezeichnet werden darf, durch dessen Beseitigung also das z-fach statisch unbestimmt angenommene Fachwerk seine Steifigkeit nicht verliert, und werden alle Spannkräfte auf die Form

$$(1)\qquad S = \mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}' X$$

gebracht, unter $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}'$ die den Zuständen $X = 0$ und $X = -1$ entsprechenden Werthe von S verstanden, so lautet die Arbeitsgleichung für den Zustand $X = -1$:

$$(2)\qquad 0 = \Sigma \mathfrak{S}' \Delta s,$$

wobei vorausgesetzt wird, dass Bewegungen der Widerlager ausgeschlossen sind und die Summe in (2) auch den Stab ik, dem $\mathfrak{S}' = -1$ entspricht, umschliesst. Die Einführung von $\Delta s = S\rho = (\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}' X)\rho$, wo $\rho = s : EF$, und die Beachtung der Gleichungen (30) auf Seite 27 liefert den Ausdruck

$$(3)\qquad X = \frac{\Sigma P_m \delta_m'}{\Sigma \mathfrak{S}'^2 \rho},$$

in welchem δ_m' die Verschiebung bedeutet, die der Angriffspunkt m von P_m im Sinne von P_m erfährt, sobald auf das nunmehr $(z-1)$fach statisch unbestimmte Fachwerk nur die Ursache $X = -1$ wirkt.*)

Auf Grund dieses Gesetzes darf die Einflusslinie für jede Stabkraft und — wie ohne weiteres einleuchtet — auch für jeden nach einer festen Richtung wirkenden Stützenwiderstand als *Biegungslinie* (deren

*) Gleichung 3 hat dieselbe Form wie die früher für das einfach statisch unbestimmte Fachwerk aufgestellte Beziehung: $X = \frac{\Sigma P \delta'}{\Sigma S'^2 \rho}$; vgl. S. 166 u. 167.

Multiplikator in dem hier betrachteten Falle $= 1 : \Sigma \mathfrak{S}'^2 \rho$ ist) gedeutet werden, wobei nur die Einschränkung besteht, dass das Fachwerk in Folge Beseitigung des fraglichen Stabes nicht seine Steifigkeit und in Folge Aufhebung des fraglichen Stützenwiderstandes nicht seine Standfestigkeit einbüsst.*) Zu beachten ist allerdings, dass die Anwendung der Gleichung (3) zur Aufsuchung der X-Linie die Auftragung der Biegungslinie für ein durch die Ursache $X = -1$ belastetes $(z-1)$fach statisch unbestimmtes Fachwerk erheischt; sie bietet nur in ganz bestimmten Fällen (die wir bei den späteren Anwendungen behandeln wollen) einen Ersatz für den früher gewiesenen Weg: die Einflusslinien für z passend ausgewählte Grössen X', X'', . . . mit Hilfe von z Biegungslinien eines *statisch bestimmten* Fachwerks zu ermitteln und hierauf die Einflusslinien aller übrigen Grössen mittels der Gleichgewichtsbedingungen zu gewinnen.

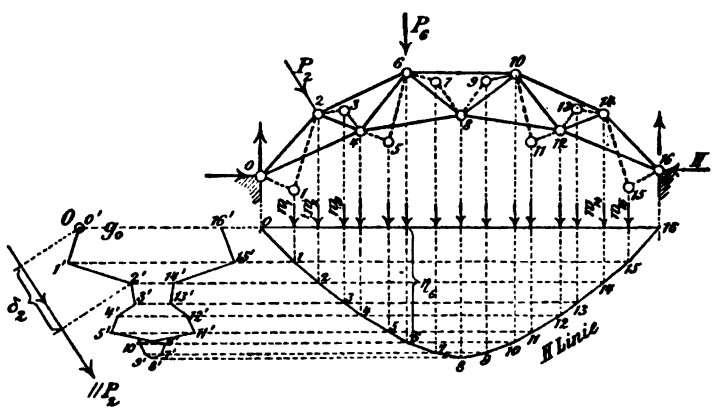


Fig. 196.

Trotzdem ist die in Gleich. (3) ausgesprochene Deutung jeder Einflusslinie als Biegungslinie stets von Vortheil, denn sie gestattet eine unmittelbare Verwerthung der in No. 51 behandelten Beziehungen zwischen den vollständigen Verschiebungsplänen und den Biegungslinien — Gesetze, die uns bei Beachtung des in No. 52 gelehrten Kunstgriffs der Einführung von stellvertretenden steifen Stabzügen in den Stand setzen, nach Auftragung der Einflusslinien für eine feste Lastrichtung schnell Figuren zu zeichnen, welche auch die Wirkung anders gerichteter Kräfte P bestimmen.

Zwei Beispiele werden genügen, dieses Verfahren zu erläutern. In Figur 196 handelt es sich um die Ermittlung des rechtsseitigen

*) Vergl. No. 61.

wagerechten Stützenwiderstandes H eines Bogenträgers mit festen Kämpfergelenken. Nach Einschaltung der Knotenpunkte 1, 3, 5, 7, . . . 15 sei die einer lothrechten Belastung entsprechende Einflusslinie nach einem der früher beschriebenen Verfahren aus der dem Zustande $X = -1$ entsprechenden Biegungslinie des aus starren Gliedern bestehenden Stabzuges 0-1-2-3-4-. . . -16 abgeleitet und der besseren Uebersicht wegen von einer wagerechten Geraden aus aufgetragen. Zieht man dann durch die Punkte 0, 1, 2, . . . der H-Linie wagerechte Geraden $g_0, g_1, g_2, \ldots$ wählt in g_0 einen beliebigen Pol $O \equiv 0'$ und zeichnet von $0'$ aus einen Linienzug $0'\ 1'\ 2'\ 3' \ldots 16'$, dessen Seiten rechtwinklig zu den entsprechenden Seiten des Stabzuges 0 1 2 3 . . . 16 sind, und dessen Eckpunkte in den Geraden $g_1, g_2, g_3, \ldots$ liegen, so sind die Polstrahlen

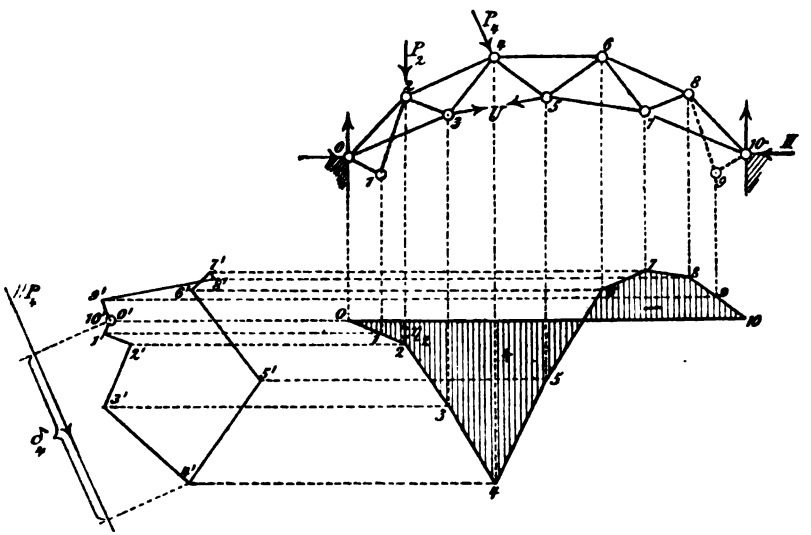


Fig. 197.

$O1', O2', O3', \ldots$ proportional den Verschiebungen, welche die Punkte $1', 2', 3', \ldots$ in Folge des Belastungszustandes $H = -1$ erfahren, und ihre Richtungen stimmen (auch dem *Sinne* nach) mit den Verschiebungsrichtungen überein. Greift also in 2 eine Last P_2 an und ist δ_2 die Projektion des Strahles $O2'$ auf die Richtung von P_2, so ist der Einfluss von P_2 auf H:

$$H = P_2 \delta_2.$$

Fig. 197 zeigt die Einflusslinie für die Spannkraft U im Untergurtstabe eines Bogenträgers der eben behandelten Art, setzt aber voraus, dass die Berechnung des Trägers auf Grund der Annahme starrer

Füllungsglieder durchgeführt werden darf. Bei Bestimmung der einer lothrechten Belastung entsprechenden H-Linie und der hieraus nach No. 73 abgeleiteten U-Linie wird dann nur die Einschaltung von zwei Knotenpunkten (1 und 9) und von vier starren Stäben erforderlich.*) Der Linienzug $0'\ 1'\ 2'\ 3' \ldots 9'\ 10'$ muss sich bei sorgfältiger Ausführung der Zeichnung schliessen, weil er als Verschiebungsplan für den Zustand $U = -1$ aufgefasst werden kann und für diesen Belastungsfall die Punkte 0 und 10 festliegen. Die Lasten P_2 und P_4 in Fig. 197 erzeugen, wenn die U-Linie einen Multiplikator μ besitzt,

$$R = \mu\,(P_2\,\eta_2 + P_4\,\delta_4).$$

Literatur zum I. Abschnitt.

1. **Mohr,** *Beitrag zur Theorie des Fachwerks,* Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover 1875, S. 17. Hier wird zum ersten Male die Biegungslinie des Fachwerks als Seilpolygon behandelt.
2. **Williot,** *Notations pratiques sur la statique graphique,* Publications scientifiques industrielles, 1877; enthält die Begründung der von uns als das Williot'sche Verfahren bezeichneten Darstellungsweise der Verschiebungen.
3. **Herzmansky,** *Durchbiegung eiserner Fachwerke,* Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver. 1878, S. 185—189.
4. **Steiner, F.,** *Studien über Fachwerke,* Techn. Blätter 1880, S. 134. Unter anderem wird die lothrechte Biegungslinie einer wagerechten Gurtung als Seilpolygon der Winkeländerungen $\Delta\mathfrak{D}$ dargestellt.
5. **Skibinski,** *Das Deformationspolygon und dessen Anwendung zur graphischen Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke,* Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver. 1888, S. 23.
6. **Mohr,** *Beitrag zur Theorie des Fachwerks,* Civilingenieur 1885.
7. **Müller-Breslau,** *Beitrag zur Theorie des Fachwerks,* Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover, 1885. Berechnung der Gewichte w auf die im § 8 des vorliegenden Buches gezeigte Weise und (wohl die erste) ganz allgemeine Benutzung der Biegungslinien zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke.
8. **Müller-Breslau,** *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre,* 1886. (Zweite Auflage: 1893.) Die §§ 5—11 behandeln die Darstellung und Verwerthung der Biegungslinien.
9. **Müller-Breslau,** *Beitrag zur Theorie der ebenen Träger,* Schweiz. Bauz. 1887, Band IX, S. 121; Band X, S. 129 und 1888, Bd. XI, S. 45. In diesen Aufsätzen, welche sich mit statisch bestimmten Trägern beschäftigen (vgl. § 6 des vorliegenden Buches) wird zum ersten Male auf die Darstellung der Verschiebungen (u. Geschwindigkeiten) kinematischer Ketten mittels des Williot'schen Verfahrens hingewiesen.

*) Kommen lothrechte Füllungsstäbe vor, so beachte man die Lösung der Aufgabe 4 auf Seite 136.

10. **Mohr**, *Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne*, Civilingenieur 1887. Zeigt die Anwendung des Williot'schen Verfahrens auf die Darstellung der Geschwindigkeiten und schliesslich auch der Beschleunigungen kinematischer Ketten.

11. **Müller-Breslau**, *Berechnung statisch bestimmter ebener Träger mit Hilfe der geometrischen Bewegungslehre*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover 1888, S. 91. Zeigt u. A. die Berechnung der Fachwerke mit Hilfe von Williot'schen Verschiebungsplänen.

12. **Ovazza**, *Sul calcolo delle deformazioni dei sistemi articolati*, Atti della Academia delle Scienze di Torino, vol. XXIII, 1888.

13. **Ovazza**, *Sul calcolo delle freccie elastice delle travi reticolari*, Atti della Academia delle Scienze di Torino, vol. XXIII, 1888.

14. **Müller-Breslau**, *Beitrag zur Theorie der ebenen, elastischen Träger*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover, 1888, S. 605. Einführung des Stabzugverfahrens; vergl. § 2 des vorliegenden Buches.

15. **Land**, *Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger*, Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver., 1888, S. 11 u. 162 stützt sich hauptsächlich auf die Anwendung der Williot'schen Verschiebungspläne kinematischer Ketten. Ein Anhang beschäftigt sich mit den Biegungslinien elastischer Stabzüge; dabei ist die Ersetzung der elastischen Gebilde durch Gliederketten aus starren Scheiben beachtenswerth. Diese Umwandlung verdankt ähnlichen Gründen ihre Entstehung, wie der von uns in No. 52 Seite 131 des vorliegenden Buches eingeführte stellvertretende Stabzug; während aber die Form dieses Stabzuges einmal angenommen und dann für alle Belastungszustände beibehalten wird (was namentlich für die Anwendungen in No. 75 sehr wichtig ist), ändert die von Land benutzte Gliederkette mit wechselnder Belastung ihre Gestalt.

16. **Müller-Breslau**, *Beiträge zur Theorie der ebenen, elastischen Träger*, Centralblatt der Bauverwaltung, 1889, zeigt u. A. die auf Seite 153—168 des vorlieg. Buches angegebenen Umformungen der Elasticitätsgleichungen.

II. Abschnitt.

Formeln, Regeln und Beispiele für die Berechnung der wichtigsten statisch unbestimmten Fachwerke.

76. Mit Hilfe der im § 5 enthaltenen Untersuchungen lässt sich die Berechnung jedes ebenen statisch unbestimmten Fachwerks, das durch Kräfte von beliebiger Richtung beansprucht wird, durchführen. Zweck des vorliegenden Abschnitts ist es nun, die aus jenen allgemeinen Betrachtungen für die wichtigsten Trägerarten und für den Fall *lothrechter Lasten* sich ergebenden Formeln und Regeln in möglichst übersichtlicher Weise zusammenzustellen und zu erläutern. *Dabei soll von allen die Rechnung vereinfachenden Annahmen, soweit dieselben zulässig sind,* Gebrauch gemacht, und der Werth der angenäherten Theorie durch vergleichende Zahlenrechnungen geprüft werden.

§ 7.

Der Bogen mit zwei Gelenken.

a. Bestimmung des Horizontalschubs.

77. Allgemeines Verfahren. Wirkt auf einen Fachwerkbogen mit 2 Kämpfergelenken und ohne Scheitelgelenk eine Einzellast P in den Abständen a und b von den Auflagerlothrechten (Fig. 198), so entstehen Stützenwiderstände, deren jede sich in eine lothrechte Seitenkraft A bezieh. B und in eine Seitenkraft H' nach der Richtung der Schlusslinie AB zerlegen lässt. Die wagerechte Seitenkraft von H' (d. i. der *Horizontalschub*) ist

$$H = H' \cos \alpha,$$

wobei α den Neigungswinkel der Schlusslinie bedeutet.

Die Kräfte A und B stimmen mit den Auflagerwiderständen eines einfachen Balkens überein und sind

$$A = \frac{Pb}{l}; \quad B = \frac{Pa}{l}.$$

Die statisch nicht bestimmbare Kraft H ist von den Längenänderungen sämmtlicher Stäbe abhängig und wird, *falls die für das Ergebniss unwesentlichen Formänderungen der Füllungsstäbe vernachlässigt werden*, wie folgt ermittelt.

Man berechne für jeden Gurtstab die Ausdrücke:

$$(1) \qquad w_m = \frac{s_m y_m}{r_m^2} \frac{F_o}{F_m} \text{ und } z_m = y_m w_m,$$

wobei s_m die Länge des Gurtstabes bedeutet,

m die Ordnungsziffer des gegenüberliegenden Knotenpunktes,

r_m das Loth von m auf s_m,

y_m den lothrechten Abstand des Punktes m von der Schlusslinie,

F_m die Querschnittsfläche des Stabes s_m,

F_o eine beliebige, aber für alle Stäbe gleiche Querschnittsfläche, welche im allgemeinen gleich dem am häufigsten vorkommenden Gurtquerschnitte gesetzt wird, damit möglichst viele der Verhältnisse $F_o : F_m = 1$ werden.

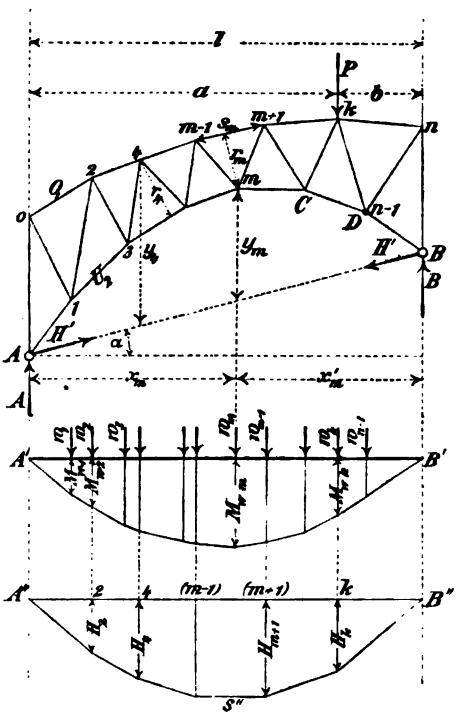


Fig. 198.

Fig. 199.

Fig. 200.

Nun bestimme man (durch Rechnung od. Zeichnung) die Biegungsmomente $M_{w1}, M_{w2}, \ldots M_{wk}, \ldots$ für einen *einfachen* (d. h. einen bei A' und B', Fig. 199, frei aufliegenden) Balken, dessen Stützpunkte lothrecht unter A bezw. B liegen, und auf welchen lothrechte, durch die entsprechenden Knotenpunkte des Bogens gehende Lasten w_1, $w_2, \ldots w_m, \ldots$ wirken, worauf man für eine im Knoten k des Bogens

angreifende Last P den Horizontalschub erhält.

$$(2) \qquad H_k = P\frac{M_{wk}}{\Sigma z_m}.$$

Darin ist: $\Sigma z_m = z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_n$.

Es folgt dieses Verfahren aus Gleichung V Seite 163. Hiernach wird $H_k = P\frac{\delta'_k}{\Sigma S'^2\rho}$, wo $\rho = \frac{s}{EF}$ ferner δ' die Ordinate der Biegungslinie für den Zustand $H=-1$ und S' die Stabkraft für $H=-1$ ist. Man erhält für einen Stab der oberen, bezw. unteren Gurtung: $S' = -\frac{y}{r}$ und $S' = +\frac{y}{r}$, so dass der Nenner des für H_k angegebenen Bruches nach Multiplikation mit EF_c in $EF_c\Sigma S'^2\frac{s}{EF} = \Sigma\frac{y^2 s}{r^2}\frac{F_c}{F} = \Sigma z$ übergeht. Die δ'-Linie darf nach No. 74 als Momentenlinie eines mit den Gewichten $w_m = \frac{M'_m s_m}{r_m^2}\frac{F_c}{F_m}$ belasteten einfachen Balkens aufgefasst werden, wobei $M'_m = y_m$ das Angriffsmoment in Folge $H=-1$ ist. Damit ergeben sich die oben angeführten Gewichte w_m.

Die auf diese Weise berechneten Werthe H_2, H_4, ... bestimmen in Figur 200 die aus Geraden bestehende Einflusslinie für den Fall oben angreifender Lasten, und ganz entsprechend würden H_1, H_3, ... die Einflusslinie für unten wirkende Lasten liefern. Der erstere Fall liegt in der Regel vor, und es ist dann meistens zulässig, auch die ständige Last ausschliesslich auf die oberen Knotenpunkte zu vertheilen. Man kommt dann mit der Einflusslinie $A''S''B''$ in Fig. 200 aus.

Will man die H-Linie durch Zeichnung bestimmen, so nehme man die Polweite w_k des die Gewichte w verbindenden Seilpolygons so an, dass dessen Ordinate η_k (Fig. 201) den Horizontalschub H_k angiebt. Stellt man dann die Lasteinheit durch eine Strecke c dar, so erhält man (wegen $M_{wk} = w_k\eta_k$) die Bedingung

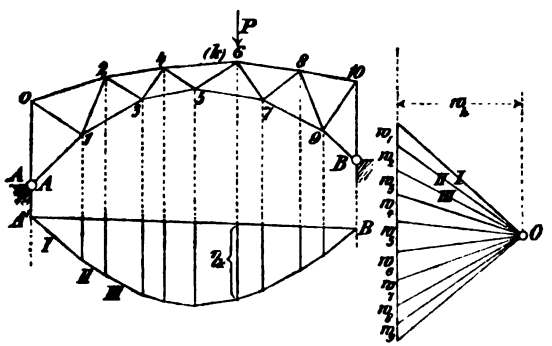


Fig. 201.

$$H_k = \frac{c\,w_k\eta_k}{\Sigma z_m} = \eta_k$$

und hieraus folgt die Polweite

$$w_h = \frac{\Sigma z_m}{c}.$$

Drückt man bei Berechnung der z_m alle Abmessungen in Metern aus, so muss man auch c in Metern angeben. Wird beispielsweise der Kräftemaassstab $50^{mm} = 1^t$ gewählt, und ist die Trägerzeichnung im Maassstabe 1 : 75 gefertigt, so wird die Lasteinheit durch eine Strecke von der Länge $c = 75 \cdot 0{,}050 = 3{,}75^m$ dargestellt, und man muss dann $w_h = \frac{\Sigma z_m}{3{,}75}$ wählen. w_h und w_m enthalten dieselbe Einheit; sie sind, wenn die Gleichung (1) angewandt wird, Zahlen und bedingen die Anfertigung eines besonderen Zahlenmaassstabes.*)

Man könnte auch den Ausdruck $\Sigma z_m = \Sigma y_m w_m$ als das auf die Achse AB bezogene Moment von Kräften w_m, welche parallel zu AB sind, auffassen und mittels eines Seilpolygons bestimmen, jedoch führt die Berechnung von Σz_m schneller und übersichtlicher zum Ziele. Ebenso unzweckmässig wäre es, die Gewichte w_m durch Zeichnung zu ermitteln.

Hinsichtlich der Werthe w und z ist noch folgendes zu bemerken. Werden die Gurtungen nach Fig. 202 am Auflager zusammengeführt, so weise man den Stab s_1 dem lothrecht über 2 gelegenen Punkte 1 des Stabes s_2 zu. Bezeichnet dann r_1 die Länge des Lothes von 1 auf s_1, so findet man für den Punkt 2 des Balkens AB das von den Stäben s_1 und s_2 herrührende Gewicht:

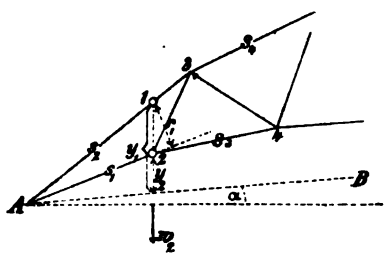


Fig 202.

$$(3) \quad \begin{cases} w_2 = \dfrac{y_1 s_1}{r_1^2} \dfrac{F_c}{F_1} + \dfrac{y_2 s_2}{r_2^2} \dfrac{F_c}{F_2} & \text{ferner:} \\ z_2 = \dfrac{y_1^2 s_1}{r_1^2} \dfrac{F_c}{F_1} + \dfrac{y_2^2 s_2}{r_2^2} \dfrac{F_c}{F_2}. \end{cases}$$

Beim *Ständerfachwerk* in Fig. 203 geben wir zwei lothrecht übereinandergelegenen Knotenpunkten dieselbe Ordnungsziffer und bezeichnen die lothrechten Abstände der Knotenpunkte von der Schlusslinie mit

y_{mu} für den unteren Knoten m und mit
y_{mo} „ „ oberen „ m.

*) In Folge von Kürzungen wird die Einheit der w_h und w_m später zuweilen eine andere werden.

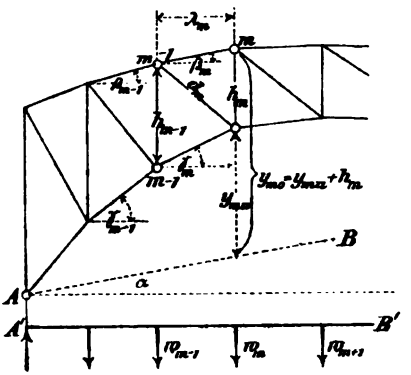


Fig. 203.

Ferner nennen wir:

h_m die lothrechte Trägerhöhe in m,

β_m, γ_m den Neigungswinkel des m^{ten} Stabes der oberen bezw. unteren Gurtung gegen die Wagerechte,

λ_m die Weite des m^{ten} Feldes,

F_{om} den Querschnitt des m^{ten} Obergurtstabes,

F_{um} den Querschnitt des m^{ten} Untergurtstabes,

und erhalten für den oberen Knotenpunkt m, welchem der $(m+1)^{\text{te}}$ Stab der unteren Gurtung gegenüberliegt, (aus Gleich. 1 nach einfacher Umformung):

$$w_m = y_{mo}\frac{\lambda_{m+1}}{h^2_m}\sec^3\gamma_{m+1}\frac{F_c}{F_{u(m+1)}}; \quad z_m = \frac{y^2_{mo}\lambda_{m+1}}{h^2_m}\sec^3\gamma_{m+1}\frac{F_c}{F_{u(m+1)}}$$

während dem unteren Knoten m entspricht:

$$w_m = \frac{y_{mu}\lambda_m}{h^2_m}\sec^3\beta_m\frac{F_c}{F_{om}}; \quad z_m = \frac{y^2_{mu}\lambda_m}{h^2_m}\sec^3\beta_m\frac{F_c}{F_{om}}.$$

Durch Zusammenfassung der in dieselbe Lothrechte fallenden Gewichte w ergiebt sich:

$$(4)\quad \begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h^2_m}\left(y_{mu}\lambda_m\sec^3\beta_m\dfrac{F_c}{F_{mo}} + y_{mo}\lambda_{m+1}\sec^3\gamma_{m+1}\dfrac{F_c}{F_{u(m+1)}}\right) \\ z_m = \dfrac{1}{h^2_m}\left(y^2_{mu}\lambda_m\sec^3\beta_m\dfrac{F_c}{F_{om}} + y^2_{mo}\lambda_{m+1}\sec^3\gamma_{m+1}\dfrac{F_c}{F_{u(m+1)}}\right). \end{cases}$$

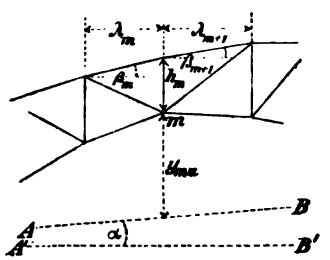


Fig. 204.

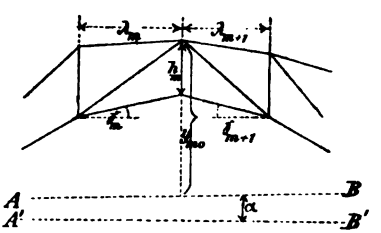


Fig. 205.

Bildet der Ständer bei m, Fig. 204, die Grenze zwischen den links- und rechtssteigenden Diagonalen, so liegen dem Knoten m zwei Ober-

gurtstäbe gegenüber und man erhält:

$$(5)\quad w_m = \frac{y_{mu}}{h^2_m}\left(\lambda_m \sec^3\beta_m \frac{F_o}{F_{om}} + \lambda_{m+1}\sec^3\beta_{m+1}\frac{F_o}{F_{o(m+1)}}\right);\quad z_m = y_{mu}\,w_m.$$

Ebenso ergiebt sich für den Fall in Fig. 205:

$$(6)\quad w_m = \frac{y_{mo}}{h^2_m}\left(\lambda_m \sec^3\gamma_m \frac{F_c}{F_{um}} + \lambda_{m+1}\sec^3\gamma_{m+1}\frac{F_c}{F_{u(m+1)}}\right);\quad z_m = y_{mo}\,w_m.$$

Liegt die Lothrechte durch einen Knoten r rechts von $r+1$ (oder links von $r-1$) — vergl. Fig. 99 auf Seite 118 — so ist bei der zeichnerischen Bestimmung der Momente M_w zu beachten, dass die Gewichte in der Reihenfolge w_{r-1}, w_r, w_{r+1} durch das Seilpolygon verbunden werden müssen. Will man rechnen, so vertheile man im Falle $\overset{\text{oben}}{\text{unten}}$ angreifender Belastung sämmtliche Gewichte w auf die $\overset{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Knotenpunkte. Auf die Punkte $r-1$ und $r+1$ würden z. B. bei Zerlegung von w_r die Antheile: $-w_r\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_r-\lambda_{r+1}}$ und $+w_r\left(1-\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_r-\lambda_{r+1}}\right)$ kommen. Dieses Verfahren ist zuweilen auch dann zu empfehlen, wenn r zwischen $r-1$ und $r+1$ liegt.

78. Einfluss der Temperatur. Wächst die bei der Aufstellung des Bogens herrschende Temperatur überall um den gleichen Betrag t, so ändert sich der Horizontalschub um

$$(7)\quad H_t = \frac{\varepsilon E t l F_o \sec^2\alpha}{\Sigma z_m}.$$

Meistens genügt es, mit $t = \pm 35°$ Cels. zu rechnen. Dann ist für Schmiedeisen und Stahl (mit $\varepsilon E = 240'$ für das *qm.*):

$$(8)\quad H_t = \pm 8400\frac{l F_o}{\Sigma z_m}\sec^2\alpha \text{ Tonnen},$$

worin die Abmessungen in Metern einzuführen sind.

Die Formel (7) folgt aus Gleich. (V), Seite 163. Danach ist $H_t = \frac{\Sigma S'\varepsilon t s}{\Sigma S'^2\rho} = \frac{E F_c \Sigma S'\varepsilon t s}{\Sigma z_m}$. Wendet man nun das Gesetz der virtuellen Verschiebungen auf den Zustand $H=-1$ an, und führt als mögliche Formänderungen die Aenderungen $\Delta s = \varepsilon t s$ der Stablängen ein, ferner die ihnen entsprechende Aenderung $\varepsilon t l \sec\alpha$ der Weite $\overline{AB} = l\sec\alpha$, so erhält man: $1\sec\alpha\cdot\varepsilon t\sec\alpha = \Sigma S'\varepsilon t s$ und gelangt zur Formel (7).

79. Der Sichelträger, Fig. 206. Bei der Ermittlung der H-Linie sichelförmiger Träger empfiehlt sich die Annahme eines überall gleichen Gurtquerschnitts. Man versteht dann unter F_o den Mittelwerth aller F_o und F_u und setze die in den Gleichungen (1), (3), (4) auftretenden Querschnittsverhältnisse $= 1$. Haben alle Felder gleiche (oder annähernd gleiche) Weite, so weichen (bei nicht zu grosser Pfeilhöhe)

auch die Längen der Gurtstäbe wenig von einander ab, und es ist dann rathsam, für $s_m \frac{F_c}{F_m}$ einen festen Mittelwerth einzuführen und sämmtliche w und z durch diesen Werth zu dividiren. Man setze also z. B. für den in Fig. 206 dargestellten Träger

$$w_m = \frac{y_m}{r_m^2}, \quad z_m = y_m w_m \tag{9}$$

berechne dann aber H_t mittels der Formel:

$$H_t = \frac{\varepsilon E l F_c \sec^2 \alpha}{\lambda \Sigma z_m} t^*). \tag{10}$$

Zahlenbeispiele. *I.* Die Knotenpunkte der Gurtungen des in Fig. 206 abgebildeten Sichelträgers liegen in Parabeln von 4,0 bezieh. 2,5^m Pfeilhöhe. Die Stützweite ist $= 20^m$, die Feldweite $= 2^m$. Die Ordinaten y, Strecken r, Gewichte w und Grössen z sind in der folgenden Tabelle angegeben. Für w_2 bis w_{10} und z_2 bis z_{10} gelten die Gleich. (9), während w_1 und z_1 nach den Gleich. (5) zu berechnen sind. Der erste Untergurtstab ist als halber Stab behandelt worden.

m	y_m	r_m	$w_m = \frac{y_m}{r_m^2}$	$z_m = y_m w_m$	Ausnahmefälle
1	0,475	0,20	—	—	
2	1,440	0,52	5,33	7,67	$w_1 = \frac{0,475}{0,20^2} + \frac{1}{2}\frac{0,72}{0,22^2} = 19,31$**)
3	1,275	0,63	3,21	4,10	
4	2,560	0,94	2,90	7,42	
5	1,875	1,01	1,84	3,45	$z_1 = \frac{0,475^2}{0,20^2} + \frac{1}{2}\frac{0,72^2}{0,22^2} = 11,00$
6	3,360	1,26	2,12	7,11	
7	2,275	1,29	1,37	3,11	
8	3,840	1,45	1,88	7,01	
9	2,475	1,44	1,19	2,95	
10	4,000	1,525	1,72	6,88	

$$\Sigma z_m = 2 \sum_1^9 z + z_{10} = 2 \cdot 53,82 + 6,88 = 114,52.$$

Für den mit den Gewichten w belasteten Balken $A'B'$ wurden jetzt von der Mitte aus die Querkräfte nach der Formel $Q_m = Q_{m+1} + w_m$ berechnet, hierauf die Momente $M_m = M_{m-1} + Q_m \lambda'$ und schliesslich die Ordinaten $H_m = \frac{M_m}{\Sigma z_m}$***) der H-Linie. Wegen $\lambda' = 1$ ist $M_m = M_{m-1} + Q_m$. Wäre λ' nicht

---

*) Streng genommen wäre λ durch den Mittelwerth von $\left(s_m \frac{F_c}{F_m}\right)$ zu ersetzen, doch erwäge man die Schwierigkeit, t zutreffend zu schätzen und rechne daher so einfach wie möglich. Aus diesem Grunde wird man auch, falls α klein ist, $\sec^2 \alpha = 1$ setzen.

**) Die Ordinate des lothrecht über 1 gelegenen Punktes 1′ der oberen Gurtung ist $= 0,72$ und das Loth von 1′ auf die Verlängerung des ersten Untergurtstabes $= 0,22$.

***) Bei den M_m und Q_m haben wir den Zeiger w hier fortgelassen.

$= 1$, aber konstant, so würde man trotzdem $\lambda' = 1$ setzen, dafür aber Σz_m durch λ' dividiren. Wir schreiben den vollständigen Ansatz der Rechnung hin.

$Q_{10} = \frac{1}{2} w_{10} =$ 0,86	$M_1 =$ 39,96 $= Q_1$	
+ 1,19	+ 20,65	
$Q_9 =$ 2,05	$M_2 =$ 60.61	$H_2 = \frac{60,61}{114,52} = 0,53$
1,83	15,32	
$Q_8 =$ 3,88	$M_3 =$ 75,93	
1,87	12,11	
$Q_7 =$ 5,25	$M_4 =$ 88.04	$H_4 = \frac{88,04}{114,52} = 0,77$
2,12	9,21	
$Q_6 =$ 7,37	$M_5 =$ 97,25	
1.84	7.37	
$Q_5 =$ 9.21	$M_6 =$ 104.62	$H_6 = \frac{104.62}{114,52} = 0,91$
2,90	5,25	
$Q_4 =$ 12,11	$M_7 =$ 109,87	
3.21	3,88	
$Q_3 =$ 15,32	$M_8 =$ 113,75	$H_8 = \frac{113,75}{114,52} = 0,99$
5,33	2.05	
$Q_2 =$ 20,65	$M_9 =$ 115,80	
19,31	0,86	
$Q_1 =$ 39.96	$M_{10} =$ 116.66	$H_{10} = \frac{116,66}{114,52} = 1,02$

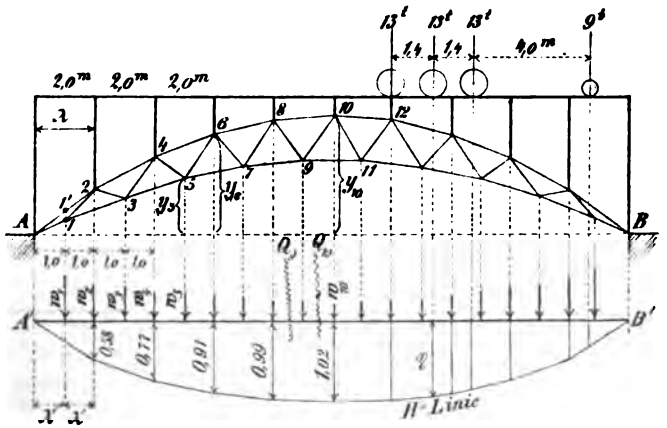


Fig. 206.

Die gleichförmig angenommene ständige Belastung sei $g = 1.45^t$ f. d. m, also für ein Feld: $g\lambda = 2{,}90^t$; sie erzeugt:

$$H_g = g\lambda \{2 (H_2 + H_4 + H_6 + H_8) + H_{10}\} = 2{,}90 \cdot 7.42 = 21{,}5^t.$$

Ein vom rechten Auflager bis zum Querträger 12 vorgeschobener Lastenzug (mit den in der Fig. angegebenen Achsendrücken und Radständen) ruft hervor:

$$H = \Sigma P \eta = 39{,}0^t.$$

Der Einfluss einer gleichmässigen Temperaturerhöhung um $t = 35°$ C. ist nach Gleich. 10:

$$H_t = \frac{240 \cdot 20 \cdot F_c}{2{,}0 \cdot 114{,}52} \cdot 35 = 733\, F_c,$$

wobei F_c den mittleren Gurtquerschnitt in *qm.* bedeutet.

II. In neuerer Zeit sind mehrfach Sichelträger von bedeutender Pfeilhöhe ausgeführt worden, z. B. für die Douro-Brücke bei Porto und den Garabit-Viadukt. Es ist hier zulässig, die Werthe y_m, s_m und β_m zur Vereinfachung der Rechnung auf eine durch die Mitten der Höhen h_m geführte Bogenachse zu beziehen und, mit Hinweis auf Figur 207, die Gleichungen 4 zu ersetzen durch

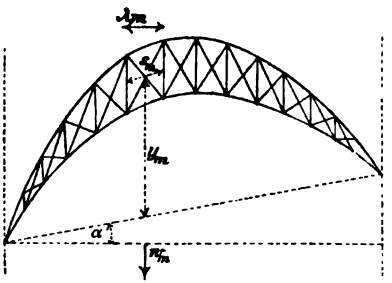


Fig. 207.

$$w_m = \frac{2\, y_m}{h^2_m} \cdot \frac{s^3_m}{\lambda^2_m} \cdot \frac{F_c}{F_m}$$

$$z_m = y_m\, w_m.$$

Kürzt man sämmtliche w durch 2, und nimmt man für F_m einen festen Mittelwerth F_c an, so erhält man:

11) $$w_m = \frac{y_m}{h^2_m} \cdot \frac{s^3_m}{\lambda^2_m}; \quad z_m = y_m\, w_m$$

und für den Einfluss von t:

12) $$H_t = \frac{\varepsilon\, E\, l\, F_c \sec^2 \alpha}{2\, \Sigma z_m}\, t.$$

Wir wenden die Formeln (11) und (12) auf die Berechnung des Horizontalschubes der Eisenbahnbrücke über den *Douro bei Porto* an. Figur 208 stellt die Hälfte des sichelförmigen Bogenträgers dar. Die folgende Tabelle giebt an:

die in den Mitten der Felder gemessenen lothrechten Höhen h_m,
die Längen s_m der Verbindungslinien der Mittelpunkte der aufeinanderfolgenden Vertikalen,
die Ordinaten der Mittelpunkte der Strecken s_m,
die Feldweiten λ_m, Gewichte w_m und Werthe z_m.

m	y_m	s_m	h_m	λ_m	$w_m = \frac{y_m s^3_m}{h^2_m \lambda^2_m}$	$z_m = y_m w_m$
1	3,20	8,51	2,17	5.60	13,35	42,74
2	9,33	8,07	5,19	5,55	5,91	55,14
3	15,06	8,17	6.79	5,95	5,03	75,75
4	20,61	8,62	8.02	6,65	4,64	95,65
5	24,45	3,72	8,64	3,00	1,87	45,70
6	28,23	10,01	9,01	8,45	4,88	137,90
7	33,15	10,14	9,38	9,10	4,74	157,25
8	37,13	10,31	9,63	9,70	4,66	173,15
9	40,09	10,68	9,80	10.40	4,71	188,92
10	41,90	10,47	9,89	10,40	4,55	190,46
11	42,50	10.40	9.93	10.40	4,48	190,51

$$\Sigma z_m = 2 \sum_1^{10} z_m + z_{11} = 2 \cdot 1162.66 + 190{,}51 = 2515{,}83.$$

Nun wurden die Querkräfte und Momente des mit den Gewichten w_m belasteten Balkens berechnet und aus den Momenten die Werthe H ermittelt:

m	Querkräfte	m	Momente	$H = \frac{M}{2515{,}83}$
11	$Q_{11} = \frac{1}{2} w_{11} = 2{,}24$	1	$M_1 = Q_1\, 2{,}8 = 158{,}42$	0,063
10	$Q_{10} = Q_{11} + w_{10} = 6{,}79$	2	$M_2 = M_1 + Q_2\, 5{,}58 = 399{,}65$	0,159
9	$Q_9 = Q_{10} + w_9 = 11{,}50$	3	$M_3 = M_2 + Q_3\, 5{,}74 = 613{,}86$	0,244
8	$Q = 16{,}16$	4	$M = 817{,}29$	0,325
7	20.90	5	950.84	0,378
6	25.78	6	1098,56	0,437
5	27.65	7	1281,85	0,509
4	32.29	8	1433,76	0,570
3	37,32	9	1549,33	0,615
2	43,23	10	1619,95	0,644
1	56,58	11	1643,24	0,653

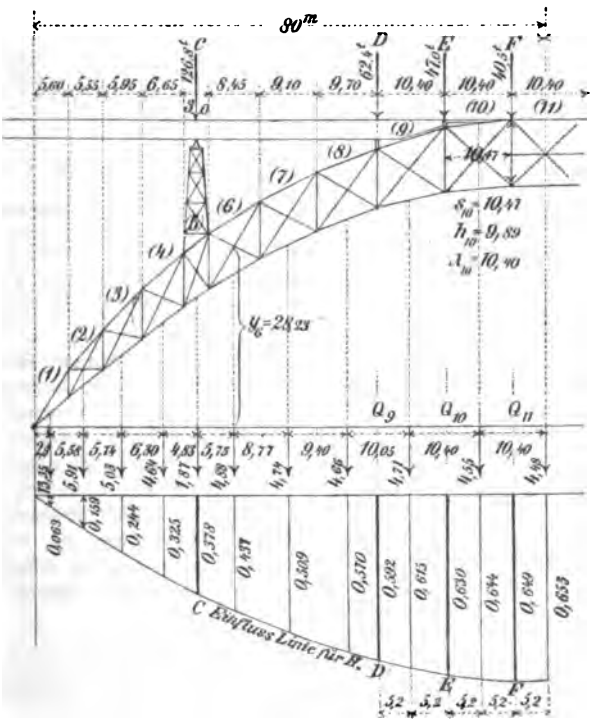


Fig. 208.

Nach Aufzeichnung der Einflusslinie für H misst man, entsprechend den Angriffspunkten C, D, E, F der Fahrbahnbelastung, die Ordinaten

0,378 0,592 0,630 0,649,

während *Seyrig* in seiner Veröffentlichung: *Le pont sur le Douro à Porto*

Zur Erleichterung der Benutzung dieser Formel diene die folgende Tabelle, welche gestattet, zwischen Kämpfer und Scheitel 10 Punkte der H-Linie schnell festzulegen. Im Allgemeinen wird man diese Punkte durch eine krumme Linie verbinden und in diese ein Polygon beschreiben, dessen Ecken den Querträgern entsprechen.

$\frac{a}{l}$	α_1	α_2	$\frac{a}{l}$	α_1	α_2
0,05	0.0496	0,38	0,30	0,1527	1,68
0,10	0,0813	0,72	0,35	0,1619	1,82
0,15	0,1057	1,02	0,40	0,1683	1,92
0,20	0,1251	1,28	0,45	0,1720	1,98
0,25	0,1406	1,50	0,50	0,1733	2,00

Für den in Figur 206 dargestellten parabolischen Sichelträger ist z. B. $f_o = 4{,}0^m$; $f_u = 2{,}5^m$; $l = 20^m$, mithin

$$H = \frac{2184}{299}\alpha_1 - \frac{39}{299}\cdot\alpha_2$$

und man erhält demnach für $\frac{a}{l} = 0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}4 \quad 0{,}5$ die Werthe

$$H = 0{,}50 \qquad 0{,}75 \qquad 0{,}89 \qquad 0{,}97 \qquad 1{,}01,$$

welche sich von den vorhin berechneten:

$$H = 0{,}53 \qquad 0{,}77 \qquad 0{,}91 \qquad 0{,}99 \qquad 1{,}02$$

nur unwesentlich unterscheiden.

Für den von Temperaturänderungen parabelförmiger Bögen herrührenden Horizontalschub H_t findet man, indem man in Gleich. (10) den Werth $\lambda \Sigma z_m$ durch $\int_0^l \left(\frac{y_u^2}{h^2}\sec^2\beta + \frac{y_o^2}{h^2}\sec^2\gamma\right) dx$ ersetzt, die einfache Formel:

$$(15) \qquad H_t = \varepsilon E F_c t \frac{3\,l^2\,(f_o - f_u)^2}{3\,l^2\,(f_o^2 + f_u^2) + 32\,f_o^2 f_u^2}$$

und beispielsweise für den Bogenträger in Fig. 206 (mit $\varepsilon E = 240$; $t = 35°$):

$$H_t = 240\,F_c 35\,\frac{3\cdot 20^2\,(4{,}0 - 2{,}5)^2}{3\cdot 20^2\,(4{,}0^2 + 2{,}5^2) + 32\cdot 4{,}0^2\cdot 2{,}5^2} = 759\,F_c \text{ Tonnen.}$$

Vorhin ergab sich der hiervon nur wenig verschiedene Werth $H_t = 733\,F_c$.

81. Bogenträger mit fast wagerechter oberer Gurtung. Zu den am häufigsten ausgeführten Arten von Bogenträgern gehört der in Figur 210 dargestellte Träger mit annähernd oder genau wagerechter oberer Gurtung. Meistens wird die Höhe im Scheitel sehr klein gewählt, und es stellt sich dann heraus, dass die Querschnittsverhältnisse der dem Scheitel zunächst gelegenen Gurtstäbe von wesentlichem Einfluss auf die Ergebnisse sind. Die Gewichte w der Knoten in der Nähe der Auflager spielen eine untergeordnete Rolle. Wir empfehlen bei Berechnung der H-Linie folgende Annahmen:

Man benutze die Gleichungen (4), ersetze die veränderlichen Glieder $\sec^3\beta_m \frac{F_c}{F_{om}}$ und $\sec^3\gamma_{m+1} \frac{F_c}{F_{um+1}}$ durch die festen Werthe $\frac{F_c}{F_o}$ bezw. $\frac{F_c}{F_u}$, nehme die willkürliche Querschnittsfläche $F_c = F_o$ an und kürze die w und z durch die (konstant gedachte) Feldweite λ. Man erhält dann:

$$(16) \quad w_m = \left(y_{mu} + y_{mo}\frac{F_o}{F_u}\right)\frac{1}{h^2_m} \text{ und } z_m = \left(y^2_{mu} + y^2_{mo}\frac{F_o}{F_u}\right)\frac{1}{h^2_m},$$

wo für $F_o : F_u$ das Verhältniss der Querschnitte der oberen und unteren Gurtung in der Nähe des Scheitels einzusetzen ist.

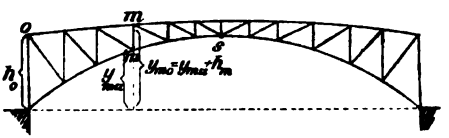


Fig. 210.

Für den Knotenpunkt 0 und für den Scheitel s hat man bezw. zu setzen:

$$(17) \quad w_o = \frac{F_o}{F_u}\,\frac{1}{h_o}; \quad z_o = \frac{F_o}{F_u}$$

$$(18) \quad w_s = \frac{2y_s}{h^2_s}\,\frac{F_o}{F_u}; \; z_s = \frac{2y^2_s}{h^2_s}\,\frac{F_o}{F_u} \text{ (vgl. Formel 5).}$$

Der Einfluss einer Temperaturänderung ist:

$$(19) \quad H_t = \frac{\varepsilon E F_o l t}{\lambda \Sigma z_m}.$$

Zahlenbeispiel. *I.* Für den schmiedeeisernen Bogenträger in Fig. 211 erhält man mit $F_o : F_u = 1$ (ein Querschnittsverhältniss, für welches der Verfasser in einer ganzen Reihe von Fällen recht befriedigende Ergebnisse erzielt hat):

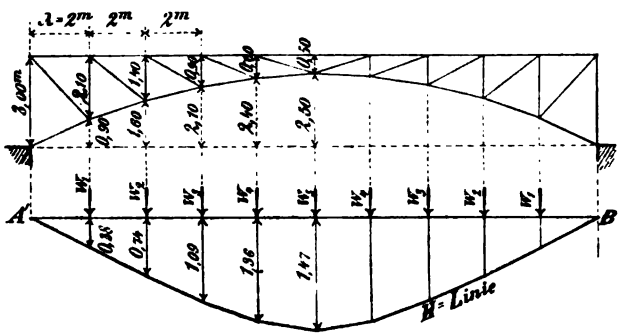


Fig. 211.

$w_1 = \frac{0{,}9 + 3{,}0}{2{,}1^2} = 0{,}88$	$z_1 = \frac{0{,}9^2 + 3{,}0^2}{2{,}1^2} = 2{,}224$	$z_0 = 1{,}000$
$w_2 = \frac{1{,}6 + 3{,}0}{1{,}4^2} = 2{,}35$	$z_2 = \frac{1{,}6^2 + 3{,}0^2}{1{,}4^2} = 5{,}898$	
ebenso $w_3 = 6{,}30$; $w_4 = 15{,}00$	$z_3 = 16{,}556$; $z_4 = 41{,}000$	$\sum_0^4 z_m = 66{,}678$
schliesslich $w_5 = \frac{2 \cdot 2{,}5}{0{,}5^2} = 20{,}00$	$z_5 = \frac{2 \cdot 2{,}5^2}{0{,}5^2} = 50{,}00$	

$$\Sigma z_m = 2 \cdot 66{,}678 + 50{,}000 = 183{,}356.$$

Die Momente des mit den Gewichten w belasteten Balkens $A'B'$ sind, wenn die Feldweite $\lambda = 1$ gesetzt wird (vergl. das Zahlenbeispiel auf S. 214):

$$M_1 = 34{,}53; \quad M_2 = 68{,}18; \quad M_3 = 99{,}48; \quad M_4 = 124{,}48; \quad M_5 = 184{,}48.$$

Der durch λ dividirte Werth Σz_m ist $\frac{183{,}356}{2{,}0} = 91{,}678$, und es ergiebt sich daher:

$$H_1 = \frac{34{,}53}{91{,}678} = 0{,}38; \quad H_2 = \frac{68{,}18}{91{,}678} = 0{,}74;$$

ebenso $H_3 = 1{,}09$; $H_4 = 1{,}36$; $H_5 = 1{,}47$.

Ist die ständige Belastung $g = 1{,}45^t$ f. d. m, so ist die Belastung eines Knotens:

$$g\lambda = 1{,}45 \cdot 2{,}0 = 2{,}9^t.$$

Der Horizontalschub in Folge des Eigengewichtes beträgt dann:

$$H_g = g\lambda\,[2\,(H_1 + H_2 + H_3 + H_4) + H_5] = 2{,}9 \cdot 8{,}61 = 25{,}0^t.$$

Der Einfluss einer Temperaturänderung um $t = 35°$ ist:

$$H_t = \frac{\varepsilon E t l F_0}{\lambda \Sigma z_m} = \frac{240 \cdot 35 \cdot 20 \cdot F_0}{2{,}0 \cdot 183{,}356} = 460\,F_0 \text{ (abgerundet).}$$

II. Will man die Untersuchung für verschiedene Querschnittsverhältnisse $F_0 : F_m$ durchführen, so berechne man (unter der Voraussetzung: $\lambda = 1$) die Momente M_m' in Folge der Gewichte: $w_m' = \frac{y_m}{h_m^2}$ und die Momente M_m'' in Folge der $w_m'' = \frac{h_0}{h_m^2}$ und bestimme H_m mittels der Formel:

$$H_m = \frac{M_m' + \frac{F_0}{F_m} M_m''}{\frac{1}{\lambda}\left(\Sigma z_m' + \frac{F_0}{F_m} \Sigma z_m''\right)}. \tag{20}$$

Für den Scheitel ist $w_0' = \frac{2y_0}{h_0^2}$ und $w_0'' = 0$; $z_0' = y_0 w_0'$ und $z_0'' = 0$. Der Einfluss von t ist:

$$H_t = \frac{\varepsilon E t l F_0}{\lambda\left(\Sigma z_m' + \frac{F_0}{F_m} \Sigma z_m''\right)}. \tag{21}$$

Man erhält:

m	w_m'	w_m''	z'	z''	M_m'	M_m''	
0			0	1,000			
1	0,20	0,68	0,184	2,041	20,29	14,24	$\Sigma z' = 95{,}868$
2	0,82	1,53	1,306	4,592	40,38	27,80	
3	2,60	3,70	5,444	11,111	59,65	39,83	$\Sigma z'' = 87{,}488$
4	6.67	8,33	16,000	25,000	76,32	48,16	
5	20,00	0	50,000	0	86,32	48,16	

Die nach Gleichung (20) berechneten Werthe H_m sind für verschiedene Verhältnisse $F_o : F_m$ in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden.

m	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
1	0.39	0,39	0,38	0,38	0,37	0,37
2	0,77	0,76	0,75	0,74	0,73	0,73
3	1,13	1,11	1,10	1,09	1,07	1,06
4	1,42	1,40	1,38	1.36	1,34	1,32
5	1,55	1,52	1,49	1,47	1,44	1,42

Der Einfluss von $t = 35°$ C. wird der Reihe nach (abgerundet):

$$H_t = 540\,F_o;\quad 510\,F_o;\quad 480\,F_o;\quad 460\,F_o;\quad 440\,F_o;\quad 420\,F_o.$$

In der Nähe des Scheitels weichen also die H-Linien wesentlich von einander ab. Den Einfluss dieser Unterschiede auf die Spannkräfte werden wir später besprechen. Vergl. No. 85.

82. Bogenträger von nahezu unveränderlicher Höhe. Die in den Figuren 212 und 213 dargestellten Bogenträger mit annähernd konstantem r_m, welche häufig der Kürze wegen *Parallelträger* genannt werden, sind meistens so gebildet, dass die oberen und unteren Knotenpunkte in Kreisbögen mit gemeinsamem Mittelpunkte liegen. Bedeutet dann h den Unterschied der beiden Kreishalbmesser, so darf man r_m durch h ersetzen und, bei gleichen (oder annähernd gleichen) Feldweiten, die Formeln

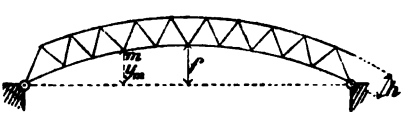


Fig. 212.

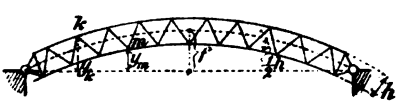


Fig. 213.

$$w_m = \frac{y_m}{h^2_m}\,\frac{F_c}{F_m};\quad z = y_m w_m;$$

$$H_t = \frac{\varepsilon E l F_c}{\lambda \Sigma z_m}\,t$$

anwenden. Man vergl. die Begründung von (9) und (10). Kürzt man alle w und z durch $1 : h^2_m$ und nimmt einen überall gleichen Gurtquerschnitt an, so erhält man sehr einfach:

$$(22) \qquad w_m = y_m; \quad z_m = y^2_m; \quad H_t = \frac{\varepsilon E F_c l h^2}{\lambda \Sigma y^2_m} t.$$

In den Formeln für H_t bedeutet F_c einen mittleren Gurtquerschnitt.

Die Gleichungen (22) liefern auch dann noch brauchbare Werthe, wenn die Trägerhöhe h sich vom Scheitel nach dem Kämpfer hin etwas ändert. In den Ausdruck für H_t muss dann ein Mittelwerth h eingesetzt werden.

Will man für die obere und untere Gurtung verschiedene mittlere Querschnitte F_o und F_u einführen, so wähle man $F_c = F_o$ und setze für einen Knoten m der unteren und einen Knoten k der oberen Gurtung bezw.:

$$(23) \qquad w_m = y_m; \quad z_m = y^2_m \text{ und } w_k = y_k \frac{F_o}{F_u}; \quad z_k = y^2_k \frac{F_o}{F_u}.$$

Für *Parabelbögen* lassen sich die gewonnenen Ergebnisse noch erheblich vereinfachen. Dazu nehmen wir mit Bezugnahme auf Fig. 214 an, es folgen die Gurtungen den Gesetzen:

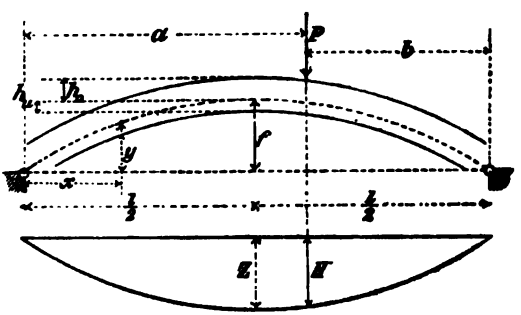


Fig. 214.

$$y_o = y + h_o \text{ bezw.}$$
$$y_u = y - h_u,$$

wobei

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$$

die Gleichung einer Parabel von der Pfeilhöhe f ist. Sodann ersetzen wir (ähnlich wie in No. 80) die Einzellasten w durch eine stetige Belastung, welche an der Stelle x die Höhe

$$w = y_u + y_o \frac{F_o}{F_u}$$

$= y - h_u + (y + h_o)\frac{F_o}{F_u}$ hat, und welcher dann die Momentengleichung

$$\frac{d^2 M_w}{dx^2} = -w = -\frac{4fx(l-x)}{l^2}\left(1 + \frac{F_o}{F_u}\right) - h_o \frac{F_o}{F_u} + h_u$$

entspricht. Durch zweimalige Integration dieser Beziehung finden wir

$$M_w = \frac{f}{3l^2}(xl^3 - 2lx^3 + x^4)\left(1 + \frac{F_o}{F_u}\right) + \tfrac{1}{2}\left(h_o \frac{F_o}{F_u} - h_u\right) x(l-x),$$

wobei die Konstanten mittels der Bedingung bestimmt werden, dass $x = 0$ und $x = l$ den Werth $M = 0$ liefern müssen. Das Moment M_w dividiren wir durch

$$\mathfrak{H} = \int_0^l \left[(y - h_u)^2 + (y + h_o)^2 \frac{F_o}{F_u}\right] dx = \frac{8f^2 l}{15} \cdot \frac{F_o + F_u}{F_u} \omega, \text{ wo}$$

$$(24) \qquad \omega = 1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{h_o F_o - h_u F_u}{f(F_o + F_u)} + \frac{15}{8} \cdot \frac{h^2_o F_o + h^2_u F_u}{f^2 (F_o + F_u)}.$$

Der von einer Temperaturänderung t herrührende Werth H ist:

$$H_t = \frac{\varepsilon E F_o l h^2 t}{\mathfrak{N}}, \text{ d. i.}$$

$$H_t = \frac{15\,\varepsilon E t h^2 F_o F_u}{8 f^2 (F_o + F_u)\,\omega}. \tag{25}$$

Indem wir dann schliesslich x durch a ersetzen, erhalten wir den Einfluss einer Einzelkraft P auf H:

$$H = P\frac{M_w}{\mathfrak{N}} = \frac{5P}{8 f l^3 \omega} a(l-a)\left[l^2 + a(l-a) + \frac{3}{2}\frac{l^2}{f}\frac{h_o F_o - h_u F_u}{F_o + F_u}\right]. \tag{26}$$

Die nach Gleichung (26) aufgetragene H-Linie weicht so wenig von einer *Parabel* ab, dass der Gedanke nahe liegt, sie durch eine Parabel zu ersetzen, so zwar, dass beide Linien mit der Nulllinie gleichgrosse Flächen einschliessen. Die Bedingung hierfür lautet:

$$\frac{Z 2l}{3} = \frac{P}{\mathfrak{N}} \int_o^l M_w\, dx$$

und liefert für Z den Werth:

$$Z = \frac{3Pl}{16 f}\nu, \text{ wo} \tag{27}$$

$$\nu = \frac{f(F_o + F_u) + 1{,}25\,(h_o F_o - h_u F_u)}{f(F_o + F_u) + 2{,}5\,(h_o F_o - h_u F_u) + \frac{15}{8f}(h^2_o F_o + h^2_u F_u)}. \tag{28}$$

Die Gleichung der parabelförmigen H-Linie ist:

$$H = \frac{3Pab}{4fl}\nu; \tag{29}$$

sie liefert auch für flache Kreisbögen sehr zuverlässige Ergebnisse.

Für den in Fig. 212 dargestellten Fall ist $h_o = h$ und $h_u = 0$. Man findet:

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{f(F_o + F_u) + 1{,}25\,h F_o}{f(F_o + F_u) + 2{,}5\,h F_o\left(1 + 0{,}75\,\dfrac{h}{f}\right)} \\ H_t = \dfrac{15\,\varepsilon E t h^2 F_o F_u}{8f\left[f\left(F_o + F_u\right) + 2{,}5\,h F_o\left(1 + 0{,}75\,\dfrac{h}{f}\right)\right]}. \end{cases} \tag{30}$$

Setzt man einmal $F_o = F_u$, sodann $F_o = 2F_u$, so erhält man, wenn $f = 4h$ ist, $\nu = 0{,}84$ bezw. $\nu = 0{,}81$ und erkennt hieraus, dass das Querschnittsverhältniss $F_o : F_u$ in der Regel keinen wesentlichen Einfluss auf H haben wird. Mit der zulässigen Vereinfachung $F_o = F_u$ gehen die Gleichungen (28) für den Träger in Fig. 212 über in:

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{8f + 5h}{8f + 2{,}5h\left(4 + 3\,\dfrac{h}{f}\right)}; \\ H_t = \dfrac{15\,\varepsilon E t h^2 F_o}{2f\left[8f + 2{,}5h\left(4 + 3\,\dfrac{h}{f}\right)\right]}, \end{cases} \tag{31}$$

Fig. 212.

wo jetzt F_o einen Mittelwerth der Querschnitte F_o und F_u bedeutet.*)

*) Maassgebend sind hauptsächlich die Querschnitte in der Nähe des Scheitels.

Für den zweiten wichtigen Sonderfall in Fig. 213 ergiebt sich mit $F_o = F_u = F_o$ (wegen $h_o = h_u = \frac{1}{2} h$):

(32) $$\nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{32}\frac{h^2}{f^2}} \text{ und } H_t = \frac{15\,\varepsilon E t h^2 F_o \nu}{16 f^2}.$$

Fig. 213.

Der Verfasser empfiehlt die Anwendung parabelförmiger H-Linien auf das dringendste. Vergl. des Verfassers: Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken, Berlin 1880, Seite 34.

b. Ermittlung der Spannkräfte.

83. Allgemeine Beziehungen. Nach Bestimmung des Horizontalschubes H lässt sich das Angriffsmoment M_m für den Knotenpunkt m (Fig. 198) in der Form darstellen:

(33) $$M_m = M_{om} - H' y_m \cos\alpha = M_{om} - H y_m$$

wo M_{om} den Werth des Momentes für den Fall $H = 0$ bedeutet, d. i. das Angriffsmoment für den Knoten m eines einfachen Balkens AB.

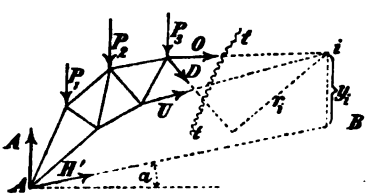


Fig. 215.

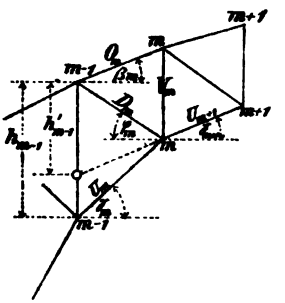


Fig. 216.

Durch M_m aber ist die Spannkraft des dem Knoten m gegenüberliegenden Gurtstabes bestimmt. So erhält man für die Gurtkräfte O_1 und U_2 in Fig. 198 die Werthe:

$$O_1 = -\frac{M_1}{r_1} \text{ und } U_2 = +\frac{M_2}{r_2}.$$

Soll die Spannkraft D in Fig. 215 aus der Momentengleichung für den Schnittpunkt i der Gurtkräfte U und O ermittelt werden, so findet man:

(34) $$M_i - D r_i = 0 \text{ wo } M_i = M_{oi} - H y_i$$

und M_{oi}, das Angriffsmoment der links vom Schnitte $t - t$ wirksamen *lothrechten* Kräfte A und P in Bezug auf den Punkt i bedeutet, während $-Hy_i$ den Einfluss von H' angiebt; r_i ist der Hebelarm von D.

Bei Berechnung der Angriffsmomente und Spannkräfte für das *Ständerfachwerk* (Fig. 216) führen wir die Bezeichnungen ein:

M^o_m = Angriffsmoment für den oberen Knotenpunkt m

M^u_m = „ „ „ „ unteren „ m

und finden dann:

$$(35) \qquad O_m = -\frac{M^u_m}{h_m \cos \beta_m}; \quad U_m = +\frac{M^o_{m-1}}{h_{m-1} \cos \gamma_m}.$$

Die Spannkräfte in den Füllungsstäben kann man wie vorhin mittels der durch Formel (34) dargestellten Ritter'schen Momentengleichung bestimmen, oder auch auf die folgende Weise:

Man führt durch O_m, D_m, U_m einen lothrechten Schnitt, setzt die Summe der links vom Schnitte wirkenden wagerechten Kräfte $= 0$, erhält dann zunächst

$$D_m \cos \varphi_m + O_m \cos \beta_m + U_m \cos \gamma_m + H = 0,$$

drückt nun O und U mittels Gleich. (35) aus und berücksichtigt schliesslich, dass

$$M^o_m = M^u_m - Hh_m$$

ist, weil sich beim Uebergange vom unteren zum oberen Knoten m nur der Einfluss von H auf das Moment ändert. Man gelangt dann zu der übersichtlichen Formelgruppe:

$$(36) \qquad \begin{cases} O_m \cos \beta_m = -\dfrac{M^u_m}{h_m}; \quad U_m \cos \gamma_m = +\dfrac{M^o_{m-1}}{h_{m-1}}, \\ D_m \cos \varphi_m = \dfrac{M^o_m}{h_m} - \dfrac{M^o_{m-1}}{h_{m-1}} = \dfrac{M^u_m}{h_m} - \dfrac{M^u_{m-1}}{h_{m-1}}. \end{cases}$$

Hiernach ist man z. B. im Stande, mit Hilfe der Einflusslinien für die Grössen: $M^u : h$ und $M^o : h$ sämmtliche Spannkräfte O, U, D zu bestimmen.

Auch die Spannkräfte in den Ständern lassen sich durch die Momente M^u und M^o ausdrücken. Greift die Belastung oben an, auf welchen Fall wir uns hier beschränken wollen, so folgt aus dem Gleichgewicht der am unteren Knotenpunkte m angreifenden Kräfte:

$$V_m + D_m \sin \varphi_m + U_{m+1} \sin \gamma_{m+1} - U_m \sin \gamma_m = 0,$$

und aus dieser Bedingung erhält man, wenn man D_m, U_{m+1} und U_m mittels der Gleichungen 36 bestimmt und die Beziehungen

$$\operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \gamma_m = \frac{h_{m-1}}{\lambda_m} \text{ und } \operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \gamma_{m+1} = \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}$$

beachtet, die einfache Formel:

$$(37) \qquad V_m = \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}\left(\frac{M^o_{m-1}}{h_{m-1}} \frac{h_{m-1}}{h'_{m-1}} - \frac{M^o_m}{h_m}\right).$$

Darin bedeutet h'_{m-1} die obere der Strecken, in welche h_{m-1} durch die Verlängerung des Stabes U_{m+1} zerlegt wird.

Auf ähnliche Weise können auch die Spannkräfte D des Strebenfachwerks dargestellt werden. Man denke sich die punktirten Ständer eingeschaltet, Fig. 217, und findet:

$$(38)\quad \begin{cases} D_m \cos\varphi_m = \dfrac{M^o_m}{h_m} - \dfrac{M^o_{m-1}}{h_{m-1}} = \dfrac{M^u_m}{h_m} - \dfrac{M^u_{m-1}}{h_{m-1}}, \\ D_{m-1} \cos\varphi_{m-1} = \dfrac{M^o_{m-2}}{h_{m-2}} - \dfrac{M^o_{m-1}}{h_{m-1}} = \dfrac{M^u_{m-2}}{h_{m-2}} - \dfrac{M^u_{m-1}}{h_{m-1}}. \end{cases}$$

Werden in jedem Felde zwei sich kreuzende steife Diagonalen angeordnet (Fig. 218), so ist die genaue Berechnung der Spannkräfte eine ausserordentlich mühsame Arbeit, weil ausser H noch in jedem Felde eine statisch nicht bestimmbare Grösse, nämlich die Spannkraft in einer der beiden Diagonalen, auftritt. Wir begnügen uns deshalb hier mit einem Annäherungsverfahren.*)

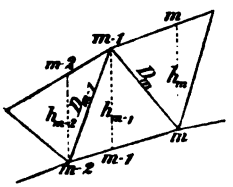


Fig. 217.

Es bedeuten: D die Spannkraft, d die Länge und F den Querschnitt der linkssteigenden und D', d', F' die entsprechenden Werthe der rechtssteigenden Diagonale irgend eines Feldes, ferner seien für die übrigen Stablängen und die Winkel die in der Fig. 219 angegebenen Bezeichnungen gewählt. Auf die Aenderung $\Delta\gamma$ der Winkel γ haben die Längenände-

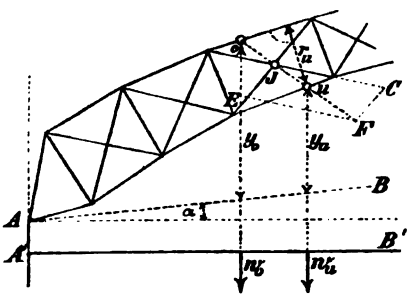


Fig. 218.

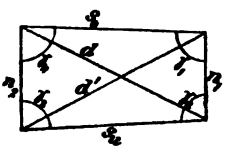


Fig. 219.

*) Das genauere Verfahren findet sich in: *Müller-Breslau*, Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken (Berlin 1880) Seite 72. Eine nachträgliche schärfere Berechnung, die allerdings wesentlich mühsamer ist, dürfte meistens nicht zu entbehren sein. Mit Rücksicht hierauf ist die Anordnung des Gitterwerks nach Fig. 218 wenig zu empfehlen.

rungen Δd und $\Delta d'$ einen hervorragenden Einfluss, und es sei deshalb aus der Gleichung

$$d^2 = s_o^2 + n_1^2 - 2 s_o n_1 \cos \gamma_1,$$

unter Vernachlässigung von Δs_o, Δn_1 die Beziehung

$$2 d \, \Delta d = 2 s_o n_1 \sin \gamma_1 \, \Delta \gamma_1$$

gebildet und hieraus (und auf ähnliche Weise) sei erhalten:

$$\Delta\gamma_1 = \frac{d\Delta d}{s_o n_1 \sin\gamma_1}; \quad \Delta\gamma_2 = \frac{d'\Delta d'}{s_u n_1 \sin\gamma_2}; \quad \Delta\gamma_3 = \frac{d\Delta d}{s_u n_2 \sin\gamma_3}; \quad \Delta\gamma_4 = \frac{d'\Delta d'}{s_o n_2 \sin\gamma_4}.$$

Da nun die Summe der Viereckswinkel γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 auch nach der Formänderung $= 360°$ ist, so ergiebt sich $\Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2 + \Delta\gamma_3 + \Delta\gamma_4 = 0$ und hieraus folgt dann:

$$d\Delta d \, \frac{s_u n_2 \sin\gamma_3 + s_o n_1 \sin\gamma_1}{\sin\gamma_1 \sin\gamma_3} = - d'\Delta d' \, \frac{s_o n_2 \sin\gamma_4 + s_u n_1 \sin\gamma_2}{\sin\gamma_2 \sin\gamma_4},$$

oder, da der Inhalt des Vierecks sowohl $= \frac{1}{2}(s_u n_2 \sin\gamma_3 + s_o n_1 \sin\gamma_1)$ wie auch $= \frac{1}{2}(s_o n_2 \sin\gamma_4 + s_u n_1 \sin\gamma_2)$ gesetzt werden darf,

$$\frac{\Delta d}{\Delta d'} = - \frac{d'}{d} \, \frac{\sin\gamma_1 \sin\gamma_3}{\sin\gamma_2 \sin\gamma_4}.$$

Nach Einführung von $\Delta d = \frac{Dd}{EF}$ und $\Delta d' = \frac{D'd'}{EF'}$ ergiebt sich

$$\frac{D}{D'} = - \frac{d'^2}{d^2} \, \frac{F}{F'} \, \frac{\sin\gamma_1 \sin\gamma_3}{\sin\gamma_2 \sin\gamma_3}$$

und, wenn $s_o \parallel s_u$ ist, wenn also $\sin\gamma_1 = \sin\gamma_2$ und $\sin\gamma_3 = \sin\gamma_4$ ist,

$$\frac{D}{D'} = - \frac{d'^2}{d^2} \, \frac{F}{F'}. \tag{39}$$

Man nehme (wenigstens bei der ersten Berechnung) $F = F'$ an, und benütze die vorstehende Gleichung auch dann, wenn s_o und s_u nur annähernd parallel sind.

Werden nun, vom Kreuzungspunkte J der Diagonalen aus, auf diesen die Strecken JC und JE (Fig. 218) so angetragen, dass $\overline{JC} : \overline{JE} = d'^2 F : d^2 F'$ ist, und wird das Parallelogramm JF gezeichnet, so giebt JF die Richtung der Mittelkraft $\mathfrak{D}$ aus den Spannkräften D und D' an. Sind o und u die Schnittpunkte der Geraden JF mit den Gurtungen, ferner M_o und M_u die für die Punkte o und u berechneten Angriffsmomente, so ergeben sich die Spannkräfte für die Gurtungen:

$$O = - \frac{M_u}{r_u} \text{ und } U = + \frac{M_o}{r_o}, \tag{40}$$

wenn r_o das Loth von Punkt o auf die untere Gurtung und r_u das Loth von u auf die obere Gurtung bedeutet.

Die Spannkräfte D und D' werden durch Zerlegung von $\mathfrak{D}$ gefunden, und bei Berechnung von $\mathfrak{D}$ verfährt man genau so, als befinde sich in dem fraglichen Felde nur eine die Punkte o und u verbindende Diagonale.

Behufs Ermittlung der H-Linie nach No. 77 werden den Punkten o und u die Gewichte $w_o = \frac{s_u y_o}{r_o^2} \frac{F_o}{F_u}$ und $w_u = \frac{s_o y_u}{r_u^2} \frac{F_o}{F_o}$ zugeschrieben, ferner die Werthe $z_o = w_o y_o$; $z_u = w_u y_u$. Die Berechnung von H_t erfolgt dann nach Gleichung 7. In der Regel sind die in No. 82 angeführten Vereinfachungen $w_o = y_o$ und $w_u = y_u$ zulässig oder — was noch mehr zu empfehlen ist — die Benutzung der parabelförmigen H-Linie.

Zur Bestimmung der Grenzwerthe der Spannkräfte bedient man sich im Allgemeinen am zweckmässigsten der Einflusslinien.

84. Einflusslinien für die Angriffsmomente und Spannkräfte. Die Einflussfläche für das **Angriffsmoment**

$$M_m = M_{om} - H y_m = y_m \left(\frac{M_{om}}{y_m} - H \right) \tag{41}$$

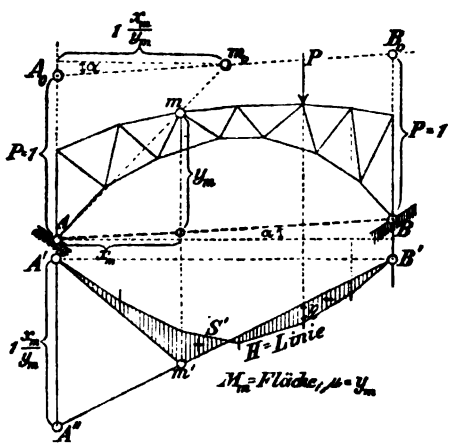


Fig. 220.

ergiebt sich — wenn y_m als Multiplikator angesehen wird*) — als der Unterschied der $(M_{om} : y_m)$-Fläche und der H-Fläche. Nach Aufzeichnung der H-Linie $A'S'B'$ (Fig. 220) trage man auf der Lothrechten durch A die Strecke $\overline{A'A''} = 1 \frac{x_m}{y_m}$ ab**), verbinde A'' und B' durch eine Gerade, bestimme auf dieser senkrecht unter m den Punkt m' und ziehe $A'm'$. Die schraffirte Fläche ist dann die Einflussfläche für M_m***); sie gestattet die Berechnung der

*) Vergl. Seite 174. Wir werden die Multiplikatoren der Einflussflächen mit μ bezeichnen und stets an die betreffenden Flächen setzen.

**) Die zeichnerische Bestimmung von $1 \cdot \frac{x_m}{y_m}$ ist in der Figur 220 angedeutet worden. Der Verfasser zieht die Berechnung vor.

***) Wäre $A'A'' = 1 \cdot x_m$, so wäre das Dreieck $A'm'B'$ nach Band I, S. 134, die Einflussfläche für das Moment M_{om}.

Grenzwerthe $_{max}M_m$ und $_{min}M_m$ in der Form:

$$_{max}M_m = \mu\left(\sum_{+} P\eta + g\left(\underset{+}{F} - \underset{-}{F}\right) + H_t\right)$$

$$_{min}M_m = -\mu\left(\sum_{-} P\eta - g\left(\underset{+}{F} - \underset{-}{F}\right) + H_t\right),$$

wobei $\sum\limits_{+} P\eta$, $\sum\limits_{-} P\eta$, $\underset{+}{F}$ und $\underset{-}{F}$ die auf Seite 183 erklärte Bedeutung haben; dort ist auch gezeigt, dass man im Falle gleich langer Felder auch setzen darf:

$$g\left(\underset{+}{F} - \underset{-}{F}\right) = g\lambda\left(\sum_{+} - \sum_{-}\right).$$

Figur 220 setzt voraus, dass m der oberen Gurtung angehört und die Belastung oben angreift. Ist m ein Knoten der unbelasteten Gurtung (Fig. 221), so beachte man, dass jedem Felde F_1F_2 eine gerade Einflusslinie L_1L_2 entsprechen muss.

Durch die Momente M_m sind die Spannkräfte in den Gurtungen bestimmt.

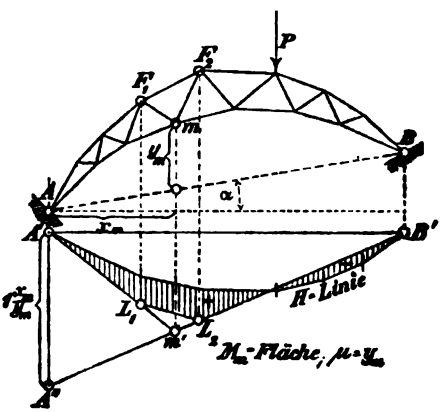


Fig. 221.

Bei Untersuchung eines Füllungsstabes gehen wir, mit Bezugnahme auf Fig. 215, von der für jeden Neigungswinkel des Stabes gültigen Gleichung $Dr_i = \pm M_i$ aus und ermitteln zunächst die Einflussfläche für $M_i = M_{oi} - Hy_i$. Nach Aufzeichnung der H-Linie machen wir $A'A'' = 1 \cdot \frac{x_i}{y_i}$, Fig. 222, ziehen die Gerade $A''B'$, bestimmen auf dieser senkrecht unter i den Punkt i', verbinden i' und A' und tragen schliesslich die dem Felde F_1F_2 entsprechende Gerade L_1L_2 ein. Fassen wir jetzt die in Fig. 222 schraffirte Fläche als Einflussfläche für die Spannkraft D auf, so ist der Multiplikator derselben

$$\mu = \frac{y_i}{r_i}.$$

Die Einflussflächen für D und M_i haben gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem die Spannkraft D in Fig. 215 links oder rechts um i dreht. Bei Feststellung dieser Vorzeichen schlage man zur Vermeidung von Irrthümern folgenden Weg ein. Man nehme eine

rechts von F_2 gelegene Last P an, und setze zunächst $H = 0$, betrachte also den Träger als einfachen Balken. Am linken Auflager greift dann nur $A = P\frac{b}{l}$ an, und man erhält aus der Gleichung

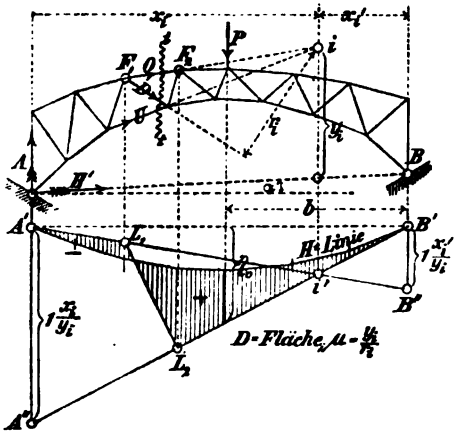


Fig 222.

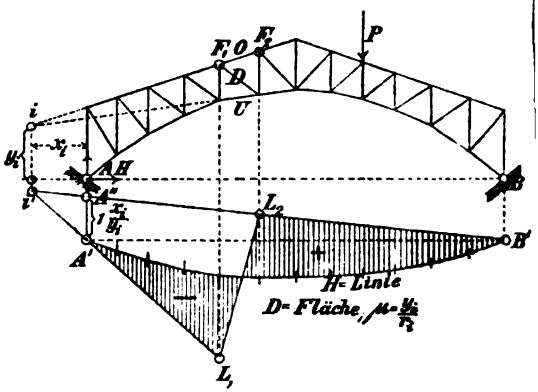


Fig. 223.

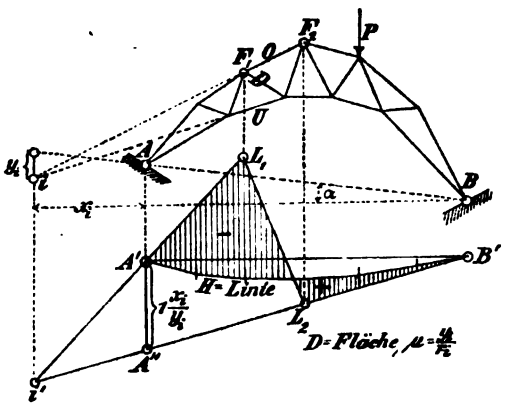


Fig. 224.

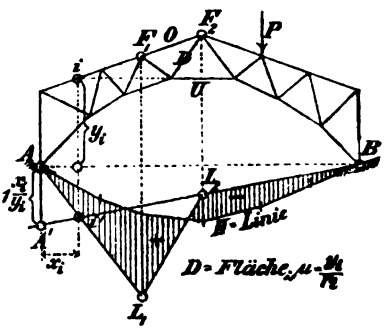


Fig. 225.

$A x_i - D r_i = 0$ mit $P = 1$ den Werth:

$$D = + A\frac{x_i}{r_i} = + 1\,\frac{b}{l}\;\frac{x_i}{r_i} = \mu \cdot 1\,\frac{b}{l}\cdot\frac{x_i}{y_i} = \mu\eta_i,$$

wo η_o die unter P gemessene Ordinate der Geraden $B'A''$ bedeutet. Für den Einfluss von $H' = H \sec \alpha$ hat man nun: $Hy_i + Dr_i = 0$, woraus $D = -\mu H$, weshalb sich im Ganzen

$$D = \mu (\eta_o - H)$$

ergiebt, woraus für den vorliegenden Fall folgt: dass D positiv ist, so lange $\eta_o > H$ ist. Erwägt man übrigens, dass die Gerade $B'A''$ die mit $x_i : y_i$ multiplicirte A-Linie ist, so braucht man zur Entscheidung der Vorzeichenfrage nur den Einfluss von A und $H' = H \sec \alpha$ zu prüfen. So findet man in dem in Fig. 223 dargestellten Falle, dass A sowohl wie H eine Zugkraft D hervorbringen, und folgert dann, dass die Ordinaten der Geraden $B'A''$ zu denjenigen der H-Linie zu fügen sind, und dass die Einflussfläche rechts von F_2 positiv ist. Auf dieselbe Weise prüfe man die Figuren 224 und 225.

Bislang haben wir vorausgesetzt, dass der Punkt i auf dem Zeichenblatte liegt. Fällt er über dasselbe hinaus, so lässt sich der zur Festlegung der Geraden $B'A''$ dienende Werth $x_i : y_i$, sowie der Multiplikator $\mu = y_i : r_i$ wie folgt ermitteln. Man verlängere die Gurtstäbe O und U (Fig. 226) und ziehe an beliebiger Stelle eine Gerade ST parallel zu dem links an den fraglichen Füllungsstab D sich anschliessenden Wandgliede F_1F'. Hierauf lege man durch S und T Parallelen zu AF_1 und AF', bestimme deren Schnittpunkt i_o und messe die in der Fig. 226 mit η_i, ξ_i, ρ_i bezeichneten Strecken. ρ_i bedeutet das Loth von S auf den Stab D. Man erhält dann:

$$\frac{x_i}{y_i} = \frac{\xi_i}{\eta_i} \text{ und } \frac{y_i}{r_i} = \frac{\eta_i}{\rho_i}.$$

Der Punkt i liegt in der Geraden Ai_o, was bei der Vorzeichenbestimmung zu beachten ist.

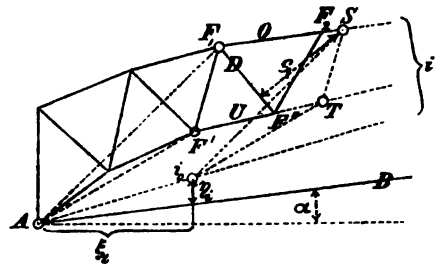


Fig. 226.

Auf ähnliche Weise liesse sich auch die von der Geraden $A'B''$ (Fig. 222) auf der Lothrechten durch B abgeschnittene Strecke $1 \cdot \frac{x'_i}{y_i}$ ermitteln, doch ist dies nicht nöthig, da man die Gerade $A'B''$ schneller auf andere Weise bestimmen kann. Man muss nur daran denken, dass der Geradenzug $A'L_1L_2B'$ die Einflusslinie für die Spannkraft D des einfachen Balkens AB ist.

In Fig. 227 ist beispielsweise die D-Fläche eines rechtssteigenden

Füllungsstabes dargestellt worden. Punkt i liege ausserhalb des Blattes; daher wurde $x_i : y_i = \xi_i : \eta_i$ gefunden. Die Hilfslinien zur Ermittlung von i_o sind wieder ausgelöscht worden. i_o ergab sich oberhalb der Geraden AB, und es liegt daher auch i oberhalb AB. Die Kräfte A und $H' = H \sec \alpha$ erzeugen in D Drücke, weshalb $A'A'' = 1 \frac{x_i}{y_i}$ nach oben aufgetragen wurde.*) Zur Festlegung der Geraden $L_2 L_1$ und $A' L_1$ wurden zwei Verfahren angewandt, erstens die Bestimmung des Nullpunktes N auf dem im I. Bande, § 80, gezeigten Wege,

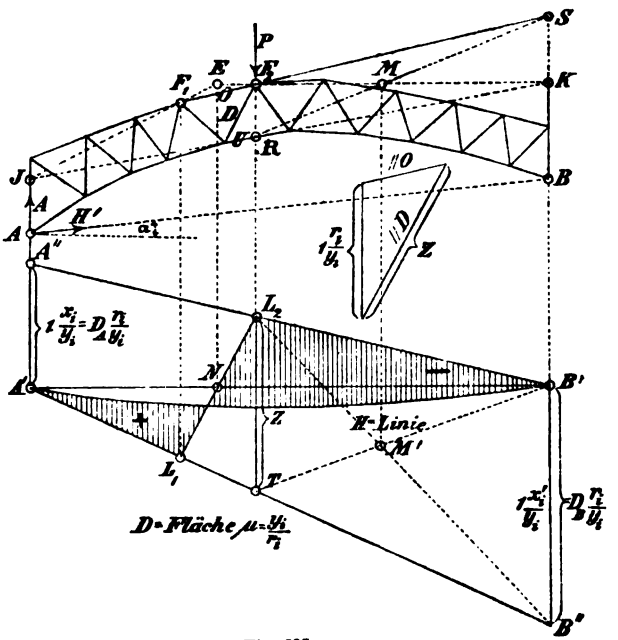


Fig. 227.

zweitens durch Ermittlung der Strecke $L_2 T$, welche die Geraden $B'A''$ und $A'B''$ auf der Senkrechten durch den der belasteten Gurtung angehörenden Endpunkt F_2 des Stabes D abschneidet. Wir wiesen früher das Gesetz nach: Zerlegt man $P = 1$ nach den Richtungen von O und D und ist die zu D parallele Seitenkraft $= [D]$, so ist $\overline{L_2 T} = [D]$, vorausgesetzt, dass die Einflussfläche den Multiplikator 1 hat**).

*) Die H-Linie wollen wir stets nach unten liegend zeichnen.

**) Vergl. Band I, § 80.

Da nun im vorliegenden Falle ein Multiplikator $\mu = \frac{y_i}{r_i}$ eingeführt ist, so muss $P = 1$ ersetzt werden durch $\frac{1}{\mu} = 1\,\frac{r_i}{y_i}$. An die Stelle von $[D]$ tritt jetzt der in Fig. 227 gefundene Werth Z. Die zweite Bestimmungsart der Geraden $A'L_1$ und L_2L_1 verdient natürlich den Vorzug.

Ferner ist zu beachten, dass die Strecke $\overline{A'A''} = 1 \cdot \frac{x_i}{y_i} = D_A \frac{r_i}{y_i}$ ist, wo D_A den absoluten Werth der von einem Stützenwiderstande $A = 1$ im fraglichen Wandgliede erzeugten Spannkraft bedeutet, und ebenso lässt sich $\overline{B'B''} = D_B \frac{r_i}{y_i}$ aus der durch $B = 1$ hervorgerufenen Spannkraft D_B berechnen, während schliesslich $1\,\frac{y_i}{r_i} = D_H$ gleich dem absoluten Werthe der Spannkraft in Folge einer in A angreifenden, von A nach B gerichteten Belastung 1 sec α ist. Hiernach kann man den Linienzug $A'L_1L_2B'$ mit Hilfe von zweien der drei Strecken: $A'A'' = D_A : D_H$, $B'B'' = D_B : D_H$ und Z bestimmen.*)

Die Benutzung der Spannkräfte D_A, D_B, D_H liefert wohl die übersichtlichsten und schärfsten Zeichnungen, vorausgesetzt, dass man die geringe Mühe nicht scheut, diese Werthe durch *Rechnung* zu bestimmen. Man gehe dann von den Gleichungen (36) und (38) aus.

Als Beispiel sei hier die Ermittlung der D_A, D_B, D_H für den auf S. 201 dargestellten Sicheträger mitgetheilt; denn gerade für diese Träger ist das fragliche Verfahren besonders am Platze. Durch die unteren Knotenpunkte 1′, 3′, 5′, 7′, ... wurden senkrechte Geraden gezogen, welche die obere Gurtung in 1, 3, 5, 7, . . . schneiden**). Aus den Angriffsmomenten M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, . . . findet man dann für jeden Belastungszustand für eine linkssteigende Diagonale:

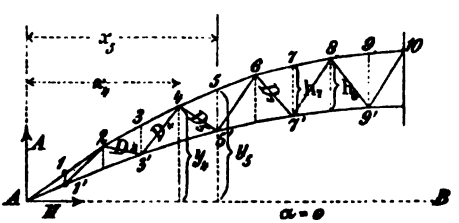


Fig. 228.

*) Vergl. auch Band I, § 30; dort wurden die D_A und D_B mit D' bezw. D'' bezeichnet.

**) Der bequemeren Schreibweise der Momente wegen ist die Bezeichnung der unteren Knotenpunkte anders gewählt wie in Fig. 206.

$$D_m \cos\varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{(m-1)}}{h_{m-1}} \quad \text{z. B. } D_5 \cos\varphi_5 = \frac{M_5}{h_5} - \frac{M_4}{h_4}$$

und für eine rechtssteigende Diagonale:

$$D_m \cos\varphi_m = \frac{M_{(m-1)}}{h_{m-1}} - \frac{M_m}{h_m} \quad \text{z. B. } D_4 \cos\varphi_4 = \frac{M_3}{h_3} - \frac{M_4}{h_4}.$$

Den Zuständen $A = 1$, $B = 1$, $H = 1$, entsprechen nun für den Knoten m der Reihe nach die Werthe:

$$M_m = 1 \cdot x_m, \quad M_m = 1 \cdot x'_m, \quad M_m = -1 \cdot y_m$$

so dass man z. B. für D_5 und D_4 die Gleichungen erhält:

Einfluss von $A = 1$; $D_5 \cos\varphi_5 = \frac{x_5}{h_5} - \frac{x_4}{h_4}$; $D_4 \cos\varphi_4 = \frac{x_3}{h_3} - \frac{x_4}{h_4}$;

„ „ $B = 1$; $D_5 \cos\varphi_5 = \frac{x'_5}{h_5} - \frac{x'_4}{h_4}$; $D_4 \cos\varphi_4 = \frac{x'_3}{h_3} - \frac{x'_4}{h_4}$;

„ „ $H = 1$; $D_5 \cos\varphi_5 = \frac{y_4}{h_4} - \frac{y_5}{h_5}$; $D_4 \cos\varphi_4 = \frac{y_4}{h_4} - \frac{y_3}{h_3}$.

Die Ergebnisse der Rechnung sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt worden.

m	x_m	$x'_m = l - x_m$	h_m	y_m	$\frac{x_m}{h_m}$	$\frac{x'_m}{h_m}$	$\frac{y_m}{h_m}$
1	1,0	19,0	0,245	0,72	4,082	77,550	2,939
2	2,0	18,0	0,565	1,44	3,540	31,858	2,549
3	3,0	17,0	0,725	2,00	4,138	23,448	2,759
4	4,0	16,0	0,985	2,56	4,061	16,244	2,599
5	5,0	15,0	1,085	2,96	4,608	13,825	2,728
6	6,0	14,0	1,285	3,36	4,669	10,895	2,615
7	7,0	13,0	1,325	3,60	5,283	9,811	2,717
8	8,0	12,0	1,465	3,84	5,461	8,191	2,621
9	9,0	11,0	1,445	3,92	6,228	7,612	2,713
10	10,0	10,0	1,525	4,00	6,557	6,557	2,623

	Einfluss von		
	$A = 1$	$B = 1$	$H = 1$
$D_2 \cos\varphi_2 =$	+ 0,542	+ 45,692	— 0,390
$D_3 \cos\varphi_3 =$	+ 0,598	— 8,410	— 0,210
$D_4 \cos\varphi_4 =$	+ 0,077	+ 7,204	— 0,160
$D_5 \cos\varphi_5 =$	+ 0,547	— 2,419	— 0,129
$D_6 \cos\varphi_6 =$	— 0,061	+ 2,930	— 0,113
$D_7 \cos\varphi_7 =$	+ 0,614	— 1,084	— 0,102
$D_8 \cos\varphi_8 =$	— 0,178	+ 1,620	— 0,096
$D_9 \cos\varphi_9 =$	+ 0,767	— 0,579	— 0,092
$D_{10} \cos\varphi_{10} =$	— 0,829	+ 1,055	— 0,090

Mit Hilfe dieser Werthe lassen sich die Einflusslinien für die Spannkräfte D oder — was zweckmässiger ist — für die $D \cos\varphi$ sehr schnell auftragen.

Fig. 229b zeigt die $D_8 \cos \varphi_8$-Fläche. Die Einflüsse von A und H haben gleiche Vorzeichen und es wurde daher $\overline{A'A''} = 1 \cdot \frac{0{,}178}{0{,}096} = 1{,}85$ auf der entgegengesetzten Seite der H-Fläche abgetragen, damit sich die Einflüsse von A und H summiren. Die Gerade $A'B''$ konnte nicht mittels der Strecke $B'B'' = \frac{1{,}620}{0{,}096} = 16{,}88$ festgelegt werden, da dies zu viel Platz erfordert hätte, sondern wurde bestimmt mit Hilfe von $\overline{FL_1} = \frac{1}{10} \cdot 16{,}88 = 5{,}06$. Der Multiplikator der gezeichneten Einflussfläche ist $\mu = 0{,}096$.

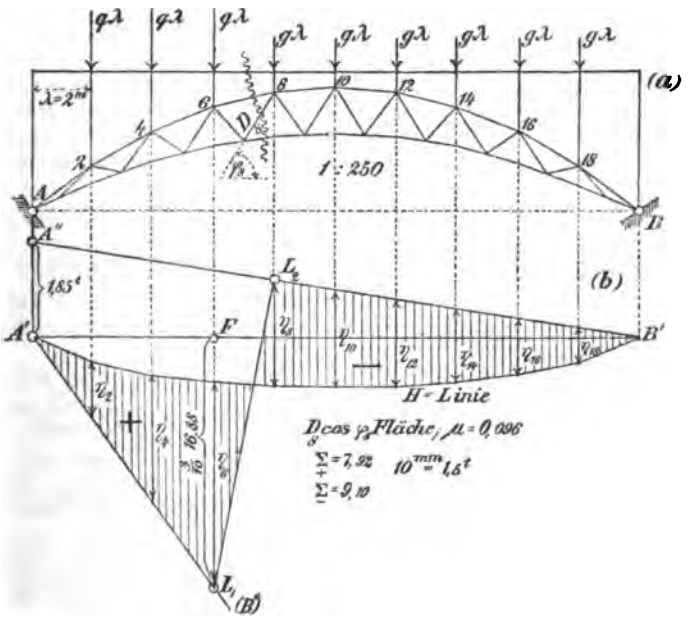


Fig. 229.

Wir wollen an der vorliegenden Figur noch die Berechnung der Spannkräfte in Folge einer gleichförmigen Belastung erläutern und nehmen zu diesem Zwecke eine ständige Belastung $g = 1{,}45^t$ f. d. m. der Stützweite und eine bewegliche $p = 2{,}6^t$ an. Die Knotenlasten sind dann: $g\lambda = 1{,}45 \cdot 2{,}0 = 2{,}9^t$ und $p\lambda = 2{,}6 \cdot 2{,}0 = 5{,}2^t$. Um $_{max}D_8$ zu erhalten werden, die Knoten rechts von D_8 nur mit $g\lambda$ belastet, die Knoten links davon mit $q\lambda = (g + p)\lambda = 8{,}1^t$. Man misst nun:

$$\underset{+}{\Sigma} = \eta_2 + \eta_4 + \eta_6 = 7{,}92; \quad \underset{-}{\Sigma} = \eta_8 + \eta_{10} + \eta_{12} + \eta_{14} + \eta_{16} + \eta_{18} = 9{,}10$$

und erhält:

$$_{max}D_s \cos\varphi_s = \mu\left(q\lambda\underset{+}{\Sigma} - g\lambda\underset{-}{\Sigma}\right)^{*}) = 0{,}096\ (8{,}1\cdot 7{,}92 - 2{,}9\cdot 9{,}10) = +\ 3{,}6^t.$$

Vertauscht man g und q, so findet man:

$$_{min}D_s \cos\varphi_s = \mu\left(g\lambda\underset{+}{\Sigma} - q\lambda\underset{-}{\Sigma}\right) = 0{,}096\ (2{,}9\cdot 7{,}92 - 8{,}1\cdot 9{,}10) = -\ 4{,}9^t.$$

Zu diesen Werthen tritt noch in Folge Erwärmung bezw. Abkühlung $D_s \cos\varphi_s = \pm\,\mu H_t$.**)

In den vorstehenden Untersuchungen wurden sämmtliche Einflussflächen aus derselben H-Linie mittels Ziehen weniger Geraden abgeleitet. Dieses einfache Verfahren führt bei den Gurtstäben stets zum Ziele, versagt aber zuweilen bei Berechnung der Spannkräfte in den Wandgliedern; denn hier kann es bei sehr nahe an der Geraden AB liegenden Punkten i vorkommen, dass die Werthe $x_i : y_i$ (bezieh. $D_A : D_H$), welche bei endlichem x_i mit $y_i = 0$ unendlich werden, sehr gross ausfallen, und dass infolgedessen die fraglichen Einflussflächen zu viel Platz beanspruchen. Das Herausziehen eines Multiplikators muss dann unterbleiben; die Einflussfläche ist zunächst für $H = 0$ aufzutragen, und hierauf muss der Einfluss von H mit Berücksichtigung der Vorzeichen hinzugefügt werden. In dem zuletzt durchgeführten Beispiele (Fig. 229) würde man also $\overline{A'A''} = 0{,}178\left(\text{statt}\ \frac{0{,}178}{0{,}096}\right)$ und $\overline{FL_1} = \frac{3}{10}\cdot 1{,}62$ $\left(\text{statt}\ \frac{3}{10}\cdot\frac{1{,}62}{0{,}096}\right)$ machen, und schliesslich würde man die H-Linie durch die (0,096 H)-Linie ersetzen, wobei die Multiplikation der Ordinaten H mit 0,096 nach Seite 174 am übersichtlichsten mit Hilfe eines Winkels, dessen Tangente = 0,096 ist, ausgeführt wird.

Der Verfasser pflegt dieser letzteren Darstellungsweise nach Möglichkeit aus dem Wege zu gehen, indem er gleich von vornherein die H-Linie nach zwei verschiedenen Maassstäben (unter Umständen auch noch nach einem dritten sehr kleinen Maassstabe) aufträgt und dann die grössere H-Linie zur Untersuchung aller Gurtstäbe benutzt, die kleinere zur Berechnung der Füllungsglieder. Nur bei den Wandgliedern von Sichelträgern sind diese Maassregeln zuweilen fruchtlos.

Bezüglich der Einführung wagerechter Nullachsen, sowie der übersichtlichen Zusammenstellung der Einflussflächen und der Ergebnisse der Rechnung verweisen wir auf No. 73.

c. Vollständiges Zahlenbeispiel. Berechnung einer Eisenbahnbrücke mit Bogenträgern.

(Tafel 3 und 4.)

85. Eine eingleisige Eisenbahnbrücke soll zwei Hauptträger mit den in Fig. 230 auf Tafel 3 angegebenen Längenabmessungen erhalten. Die Knoten-

---

*) Vergl. Seite 184. Genauer ist $_{max}D\cos\varphi = \mu\left(q\underset{+}{F} - g\underset{-}{F}\right)$; doch ist der oben angegebene Weg schneller zum Ziele führend und sein Ergebniss genügend scharf.

**) Wie man H_t in die Rechnung einführt, darüber giebt das in No. 85 behandelte vollständige Zahlenbeispiel Auskunft.

punkte der unteren Gurtungen liegen auf einer Parabel; die obere Gurtung ist wagerecht. Das Gewicht der nach Fig. 231 angeordneten Brückenbahn beträgt 700^{kg} f. d. Meter Gleis und das Gewicht der beiden Hauptträger und des Querverbandes wird nach Band I, Anhang mit $150 + 30l = 150 + 30 \cdot 20 = 750^{kg}$ in Rechnung gestellt. Es ist dann für jeden Hauptträger $g = \frac{1}{2}(700 + 750)^{kg}$, mithin die ständige Belastung eines Trägerfeldes: $g\lambda = 1450^{kg} = 1{,}45^{t}$. Die Raddrücke und Radstände der Fahrzeuge sind in Fig. 242 (Tafel 3) angegeben worden. — Gesucht sind die Spannkräfte und Querschnittsabmessungen des Hauptträgers.

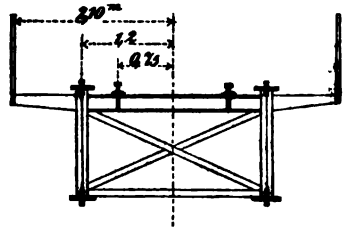


Fig. 231.

1. *Die H-Linie* des vorliegenden Trägers wurde bereits in No. 81 (Seite 207, Fig. 211) berechnet. Das Querschnittsverhältniss $F_o : F_u$ ist gleich 1 gewählt; demselben entsprechen die in Fig. 240 eingeschriebenen Werthe H.

2. *Die Spannkräfte S_g in Folge der ständigen Belastung* wurden, nach Berechnung von $H_g = 12{,}5^{t}$*) in Fig. 232 mittels eines Cremona'schen Kräfteplanes bestimmt und hierauf in die Fig. 233 eingetragen.

3. *Die Spannkräfte S_p in Folge der beweglichen Belastung* sind mit Hilfe von Einflusslinien nach dem in No. 84 gelehrten Verfahren bestimmt worden. Dabei waren einige Vereinfachungen möglich, die sich aus der gewählten Trägerform ergeben.

Liegt in Fig. 221 der Punkt m der unteren Gurtung auf einer Parabel von der Gleichung $y_m = \frac{4f}{l^2} x_m x_m'$, so erhält man für den Abstand des Punktes m' von der Geraden $A'B'$ den Ausdruck: $\overline{A'A''} \cdot \frac{x_m'}{l} = 1 \frac{x_m}{y_m} \frac{x_m'}{l} = 1 \frac{l}{4f}$; und es ist daher der Ort von m' eine zu $A'B'$ parallele Gerade. Im vorliegenden Falle ist $l = 20^{m}$ und $f = 2{,}5^{m}$, mithin $\frac{l}{4f} = 2{,}0^{t}$, und durch diesen Werth sind sämmtliche O-Flächen bestimmt; vergl. Fig. 240, in der die O_3-Fläche durch Schraffirung hervorgehoben ist, und welche die Ordinaten der auf wagerechte Nulllinien bezogenen O-Flächen liefert.

Fig. 241 enthält die Darstellung der Einflussflächen für U_2, U_3, U_4, U_5. Behufs Ermittlung der (schraffirten) U_5-Fläche wurde $A4''$ gleich dem für den oberen Knotenpunkt 4 berechneten Werthe $x_4 : y_{o4} = x_4 : h_o = \frac{8}{3}^{t}$ gemacht, sodann auf der Geraden $4''B$ der Punkt 4′ lothrecht unter 4 bestimmt und die Gerade $A4'$ gezogen. Da nun y_o den festen Werth h_o besitzt und die Trägerfelder gleich lang sind, so zerlegen die den Knotenpunkten 1, 2, 3 entsprechenden Punkte 1″, 2″, 3″ die Strecke $A4''$ in gleiche Theile**), und damit sind die Einflussflächen für U_2, U_3, U_4 bestimmt. Für den ersten Stab der unteren

*) Vergl. Seite 208; dort wurde für $g\lambda = 2{,}90^{t}$ der Werth $H_g = 25{,}0^{t}$ gefunden.

**) Hieraus folgt, dass die Punkte 1′, 2′, 3′, 4′ auf einer Parabel liegen, deren Pfeil $= 1 \frac{l}{4h_o}$ ist.

Gurtung erhält man $U_1 = H \sec \gamma_1 = 1{,}097\, H$ und, da die in Fig. 240 oberhalb der H-Linie eingezeichnete Laststellung den Horizontalschub $H_p = \Sigma P\eta = 43{,}2^t$ erzeugt, $U_{1p} = 1{,}097 \cdot 43{,}2 = 47{,}4^t$.

Die Ermittlung der Spannkräfte in den Füllungsstäben wird durch den Umstand vereinfacht, dass sich die Gurtstäbe O_{m-1} und U_m in demselben Punkte i schneiden wie O_m und U_m. Hat man also in Fig. 234 die D_4-Fläche mit Hilfe von $AA_4 = x_{i4} : h_o$ als den Unterschied der von Geraden begrenzten Fläche AL_1L_2BA und der H-Fläche erhalten, so findet man die V_3-Fläche (indem man L_1L_2 durch $L'L''$ ersetzt) als den Unterschied der Fläche $AL'L''BA$ und der H-Fläche. Links von F_0 und rechts von F_3 stimmen also die Einflussflächen für D_4 und V_3 überein; die Vorzeichen sind jedoch entgegengesetzte, auch sind die Multiplikatoren verschieden, nämlich $\mu = h_o : r_4$ für die D_4-Fläche und $\mu = h_o : (x_{i4} - x_3)$ für die V_3-Fläche. Es liefert also die Fig. 244, welche die auf die H-Linie als gebrochene Nullachse bezogenen D-Flächen enthält, auch sämmtliche V-Flächen*).

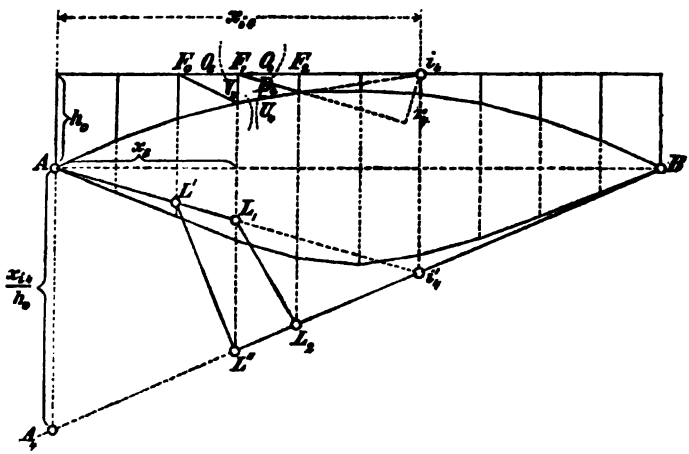


Fig. 234.

Nach Aufzeichnung der Einflussflächen wurden auf den Tafeln 3 und 4 die gefährlichsten Zugstellungen durch Probiren bestimmt und die denselben entsprechenden Werthe $\Sigma P\eta$ und $\Sigma P\eta$ ermittelt; letztere sind nebst den Multi-
$+$ $-$
plikatoren auf den Tafeln angegeben. Die Multiplikation der Ordinaten η mit den P ist mit Hilfe von Maassstäben ausgeführt worden. So wurde z. B. auf Tafel 3 die H-Linie im Maassstabe $1^t = 25^{mm}$ aufgetragen und hierauf wurden

*) Wir heben noch hervor, dass sich die V_o-Fläche, wegen $V_o = A - H \operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{tg} \gamma_1\ (A \operatorname{cotg} \gamma_1 - H)$, auch als den Unterschied der $A \operatorname{cotg} \gamma_1$-Fläche und der H-Fläche deuten lässt. Der Multiplikator ist $= 1 \operatorname{tg} \gamma_1 = 3{,}0 : 6{,}67 = 0{,}45$. Die $A \operatorname{cotg} \gamma_1$-Fläche ist ein Dreieck AA_1B, welches bestimmt ist durch $\overline{AA_1} = 1 \operatorname{cotg} \gamma_1 = 6{,}67 : 3{,}0 = 2{,}22$.

die den Raddrücken $6{,}5^t$ und $4{,}5^t$ entsprechenden Ordinaten der Einflusslinien mit den Maassstäben $6{,}5^t = 25^{mm}$ bezw. $4{,}5^t = 25^{mm}$ gemessen. Für die Füllungsstäbe wurden auf Tafel 4 kleinere Maassstäbe gewählt.

Die Berechnung der von der beweglichen Belastung herrührenden Spannkräfte S_p erfolgte nach den Formeln:

$$_{max}S_p = \mu \sum_{+} P\eta; \quad _{min}S_p = -\mu \sum_{-} P\eta.$$

Die Ergebnisse wurden in Fig. 236 zusammengestellt.

4. *Einfluss der Temperaturänderung.* Ausser den Spannkräften S_g und S_p entstehen in Folge einer (hier gleichmässig vorausgesetzten) Aenderung der Aufstellungstemperatur um $t°$ noch Spannkräfte S_t, deren absolute Werthe

$$S_t = \mu H_t$$

sind. Hinsichtlich der Vorzeichen ist zu beachten, dass ein positives H_t in der oberen Gurtung und in den Vertikalen Zugspannungen, in den übrigen Stäben Druckspannungen erzeugt. Wird $t = \pm 35°$ C. angenommen, so ist (nach Seite 208) abgerundet $H_t = \pm 460\, F_o$, wo für F_o zur Sicherheit der grösste Obergurtquerschnitt (der immer einem der mittelsten Felder angehören wird) gesetzt werden soll; derselbe wird wie folgt berechnet.

Die obere Gurtung wird vorwiegend auf Druck beansprucht. Ist also σ die zulässige Spannung, so muss sein:

$$-\sigma F_o = {}_{min}O = -\mu \sum_{-} P\eta + O_g + O_t = -\mu \sum_{-} P\eta + O_g - \mu H_t$$
$$= -\mu \sum_{-} P\eta + O_g - \mu\, 460\, F_o$$

und hieraus folgt:

$$F_o = \frac{\mu \sum_{-} P\eta - O_g}{\sigma - 460\,\mu}.$$

Für das 5. Feld ist $\mu = 5{,}0$, $\sum_{-} P\eta = 8{,}9$, $O_g = -10{,}0$ mithin, wenn $\sigma = 700^{kg}$ f. d. $qcm = 7000^t$ f. d. qm gestattet wird,

$$F_o = \frac{5{,}0 \cdot 8{,}9 + 10{,}0}{7000 - 460 \cdot 5{,}0} = 0{,}0116\ qm.$$

Für das 4. Feld ergiebt sich:

$$F_o = \frac{4{,}0 \cdot 10{,}5 + 8{,}0}{7000 - 460 \cdot 4{,}0} = 0{,}0097 < 0{,}0116$$

und man findet daher

$$H_t = \pm 460\, F_{o\,max} = \pm 460 \cdot 0{,}0116 = \pm 5{,}3^t \text{ und } S_t = \pm 5{,}3\,\mu.$$

Die hiernach berechneten Spannkräfte S_t sind in die Fig. 235 eingetragen worden; die *oberen* Vorzeichen gelten für den Fall einer *Zunahme* der Temperatur.

5. *Die Gesammtspannkräfte*, welche durch Zusammenzählung der Einflüsse der ständigen und beweglichen Belastung, sowie der Temperaturänderung erhalten werden, sind in die Fig. 237 eingeschrieben worden.

6. *Ueber die gewählten Stabquerschnitte* und die grössten Beanspruchungen giebt die folgende Tabelle Aufschluss. Zu derselben ist zu bemerken, dass die untere Gurtung in der Nähe des Scheitels denselben Querschnitt erhalten hat wie die obere Gurtung, damit die in die Rechnung eingeführte Annahme $F_o : F_u = 1$ erfüllt werde. Bei den vorzugsweise auf Druck bean-

spruchten Gurtstäben und Vertikalen wurden die Nietlöcher nicht in Abzug gebracht, wohl aber bei den von grösseren Zugkräften ergriffenen Diagonalen.

Obere Gurtung. (⊔⊓ = Querschnitt.)

Feld	Winkeleisensorte	Inhalt des vollen Querschnittes F	Grösste Spannkraft S	$\sigma = \frac{S}{F}$
5 u. 4	10·15·1,2 *cm.*	114 *qcm.*	81000 ^{kg}	710 ^{kg} f. d. *qcm.*
3	10·10·1,0 „	76 „	50000	660 „ „ „
2 u. 1	7· 7·0,9 „	47 „	30000	640 „ „ „

Untere Gurtung. (⊔⊓ = Querschnitt.)

Feld	Winkeleisensorte	Inhalt des vollen Querschnittes F	Grösste Spannkraft S	$\sigma = \frac{S}{F}$
5 u. 4	10·15·1,2 *cm.*	114 *qcm.*	66000 ^{kg}	580 ^{kg} f. d. *qcm.*
3, 2 u. 1	10·10·1,3 „	97 „	67000	690 „ „ „

Diagonalen. (⌐⌐ = Querschnitt.)

Feld	Winkeleisensorte	Inhalt des vollen Querschnittes F	Grösste Spannkraft S	$\sigma = \frac{S}{F-2d\delta}$ *)
5 u. 4	14·14·1,4 *cm.*	74 *qcm.*	39 000 ^{kg}	580 ^{kg} f. d. *qcm.*
3	11·11·1,3 „	54 „	29 000	600 „ „ „
2	9·9·1,3 „	43 „	27 000	720 „ „ „
1	9·9·1,1 „	37 „	21 000	650 „ „ „

Vertikalen. (⌐⌐ = Querschnitt.)

Winkeleisensorte durchweg 7,5 · 7,5 · 1,2; $F = 33$ *qcm*; $S = 21\,000$ ^{kg}

$$\sigma = \frac{21\,000}{33} = 640\ ^{kg} \text{ f. d. } qcm.$$

Die Knickfestigkeit der gedrückten Stäbe wird am besten mittels der Euler'schen Formel beurtheilt. Hiernach soll das kleinste Trägheitsmoment J des Querschnitts bei 5facher Sicherheit mindestens sein:

$$J = \frac{5\,Ss^2}{\pi^2 E} = \frac{5\,Ss^2}{10 \cdot 2000000}$$

wo s die Stablänge in *cm.* bedeutet. Für die erste Diagonale ist z. B. erforderlich:

$$J = \frac{5 \cdot 10000 \cdot 290^2}{10 \cdot 2000000} = 210,$$

hingegen vorhanden: $J = 2 \cdot 139{,}7 = 279{,}4$. Auf dieselbe Weise überzeugt man sich, dass auch die übrigen Stäbe genügende Sicherheit gegen Knicken bieten.

---

*) d = Nietdurchmesser = 2,2 *cm.*; δ = Eisenstärke = 1,4, 1,3 und 1.1 *cm.*

7. ***Einfluss des Querschnittsverhältnisses*** $F_o : F_u$. Es sollen noch einige Rechnungsergebnisse mitgetheilt werden, welche den Einfluss des Querschnittsverhältnisses $F_o : F_u$ auf die Spannkräfte klarlegen. Nimmt man, anstatt $F_o : F_u = 1$, einmal $F_o : F_u = 0{,}7$ sodann $F_o : F_u = 1{,}2$ an, so erhält man die folgenden Ordinaten der H-Linie und Werthe H_g und H_t:*)

$$H_1 = \begin{pmatrix}0{,}39\\0{,}37\end{pmatrix}^{**}); \quad H_2 = \begin{pmatrix}0{,}77\\0{,}73\end{pmatrix}; \quad H_3 = \begin{pmatrix}1{,}13\\1{,}06\end{pmatrix}; \quad H_4 = \begin{pmatrix}1{,}42\\1{,}32\end{pmatrix}; \quad H_5 = \begin{pmatrix}1{,}55\\1{,}42\end{pmatrix}$$

$$H_g = \begin{pmatrix}8{,}97\\8{,}38\end{pmatrix} \quad g\lambda = \begin{pmatrix}13{,}0^t\\12{,}2\end{pmatrix}; \quad H_t = \begin{pmatrix}540\\410\end{pmatrix} F_o$$

und hieraus ergeben sich für den am stärksten beanspruchten Obergurtstab O_5 die Werthe:

$$\underline{\Sigma} P\eta = \begin{pmatrix}7{,}0\\10{,}1\end{pmatrix}; \quad S_g = \begin{pmatrix}7{,}5\\12{,}5\end{pmatrix}.$$

Der erforderliche Querschnitt F_o ist daher (vgl. Seite 227)

$$\text{für } \frac{F_o}{F_u} = 0{,}7 \qquad F_o = \frac{5{,}0 \cdot 7{,}0 + 7{,}5}{7000 - 5 \cdot 540} = 0{,}0099 \ qm.$$

$$\text{für } \frac{F_o}{F_u} = 1{,}2 \qquad F_o = \frac{5{,}0 \cdot 10{,}1 + 12{,}5}{7000 - 5 \cdot 410} = 0{,}0127 \ qm.,$$

während sich für $F_o : F_u = 1{,}0$ der Werth $F_o = 0{,}0116\ qm.$ ergab.

Der Horizontalschub in Folge einer Temperaturänderung wird

$$H_t = \pm \begin{pmatrix}540 \cdot 0{,}0099\\420 \cdot 0{,}0127\end{pmatrix} = + \begin{pmatrix}5{,}3\\5{,}3\end{pmatrix}^t,$$

er stimmt also mit dem für $F_o : F_u = 1$ berechneten $H_t = \pm 5{,}3^t$ überein, so dass die in Fig. 235 zusammengestellten Spannkräfte S_t giltig bleiben.

Für den Untergurtstab U_4 (der stärker beansprucht wird als U_5) findet man

$$\underline{\Sigma} P\eta = \begin{pmatrix}14{,}3\\11{,}7\end{pmatrix}; \quad S_g = -\begin{pmatrix}9{,}6\\6{,}9\end{pmatrix}; \quad S_t = -17{,}9; \quad \mu = 3{,}37$$

$$\min U_4 = -\mu \underline{\Sigma} P\eta + S_g + S_t = -\begin{pmatrix}76^t\\64^t\end{pmatrix}.$$

Diesen Spannkräften würden bei einer zulässigen Inanspruchnahme von $\sigma = 700^{kg}$ f. d. *qcm.* die Querschnitte

$$F_u = \frac{76}{0{,}700} = 109 \ qcm. \text{ bezw. } F_u = \frac{64}{0{,}700} = 91 \ qcm.$$

genügen. ***Es ist jedoch erforderlich, das in die Rechnung eingeführte Querschnittsverhältniss*** $F_o : F_u$ ***auch der Ausführung zu Grunde zu legen, oder sich doch demselben möglichst zu nähern,*** da dieses Verhältniss von bedeutendem Einfluss auf die Beanspruchung namentlich der oberen Gurtung ist; und es empfiehlt sich daher, die soeben berechneten Querschnitte F_u zu ersetzen durch

$$F_u = \frac{F_o}{0{,}7} = \frac{99}{0{,}7} = 142 \ qcm. \text{ bezw. durch } F_u = \frac{F_o}{1{,}2} = \frac{127}{1{,}2} = 106 \ qcm.$$

Für die Ausführung wäre nun streng genommen derjenige Werth $F_o : F_u$ zu ermitteln, der den billigsten Träger liefert, welche Forderung man im vorliegenden Falle auch durch die des kleinsten Trägergewichtes ersetzen darf. Die genaue Beantwortung dieser Frage würde aber sehr mühsame und zeit-

*) Vergl. No. 81, Seite 209.

**) In den folgenden Werthangaben bezieht sich die obere Zahl auf $F_o : F_u = 0{,}7$, die untere auf $F_o : F_u = 1{,}2$.

raubende Rechnungen verlangen und kann daher nur angenähert gegeben werden. Dazu beachte man, dass von den äusseren Kräften nur der Horizontalschub H von $F_o : F_u$ abhängt und der Einfluss einer Aenderung von H desto grösser wird, je grösser μ ist. Da die Werthe μ der Gurtstäbe nach den Kämpfern hin abnehmen, so werden auch die Unterschiede der Stabkräfte für verschiedene $F_o : F_u$ in den äusseren Feldern kleiner sein als in den mittleren. Dies zeigt in der That die folgende Tabelle, welche die absoluten Werthe der grössten Spannkräfte angiebt.

$F_o : F_u$	O_5	O_4	O_3	O_2	O_1	U_5	U_4	U_3	U_2	U_1
0,7	69	63	46	29	13	69	76	73	70	72
1,0	81	71	50	30	13	61	66	65	64	67
1,2	89	78	50	32	14	57	64	64	63	65
	Tonnen.									

Da nun weiter eine Aenderung von H auf die Spannkräfte in den Füllungsstäben einen bedeutend geringeren Einfluss hat als auf die Gurtkräfte, so ist ersichtlich, dass es hauptsächlich darauf ankommen wird, das Gewicht der Gurtungen der Mittelfelder miteinander zu vergleichen. Dieses Gewicht ist proportional $F_o + F_u$, weshalb wir noch folgende Zusammenstellung geben,

$F_o : F_u$	F_o	F_u	$F_o + F_u$
0,7	99	142	241
0,8	105	131	236
0,9	111	123	234
1,0	116	116	232
1,2	127	106	233
	qcm.		

aus welcher hervorgeht, dass sich wesentliche Unterschiede in den Gewichten der für die letzten vier Querschnittsverhältnisse berechneten Träger nicht herausstellen werden.*) Das Ergebniss, dass in der Nähe von $F_o : F_u = 1$ eine Aenderung dieses Werthes nur eine geringe Aenderung von $F_o + F_u$ nach sich zieht, fand der Verfasser auch in anderen Beispielen bestätigt, und dies ist der Grund, der ihn veranlasste, dem Werthe $F_o : F_u = 1$ den Vorzug zu geben, um so mehr als die gleichartige Ausbildung der beiden Gurtungen in der Nähe des Scheitels (Verwendung derselben Eisensorten) nur Vortheile bietet.

8. ***Berücksichtigung der Längenänderungen der Füllungsstäbe bei Ermittlung der H-Linie.*** Bei Berechnung der H-Linie wurden bislang die Formänderungen der Wandglieder vernachlässigt und auch hinsichtlich der Querschnittsänderung der Gurtungen Annahmen gemacht, welche der Wirklichkeit nicht ganz entsprechen. Es erscheint daher nicht unwichtig, die Zulässigkeit jener Voraus-

*) Man erwäge auch, dass sich bei Ausarbeitung des Entwurfs stets Abweichungen zwischen den berechneten und schliesslich gewählten Querschnitten ergeben werden. Z. B. haben wir vorhin $F = 116$ durch $F = 114$ ersetzt.

setzungen zu prüfen. Wir wollen die genauere Berechnung der H-Linie nach drei verschiedenen Verfahren durchführen.

Erstes Verfahren. Es werden die Spannkräfte S' für den Zustand $H = -1$ (Figur 246, Tafel 4) und die denselben entsprechenden Längenänderungen $\Delta s = \frac{S' s}{EF}$*) (Fig. 247) berechnet, am besten für $E = 1$, und nun wird für diesen Zustand ein Williot'scher Verschiebungsplan gezeichnet. Der Knotenpunkt V und die Richtung des Stabes $V5$ (vergl. Fig. 245) werden zunächst festliegend gedacht; es fällt dann V' und (da der Stab $V5$ spannungslos ist) auch $5'$ mit dem Pole O zusammen. Nach Bestimmung der Punkte $4'$, IV', $3'$, III', ... $0'$, A', welche auf die in No. 32 beschriebene Weise erfolgt, ist man im Stande, die Biegungslinie für den Zustand $H = -1$ zu zeichnen und die Aenderung δ_A der Stützweite anzugeben. Diese letztere ist doppelt so gross, wie die wagerechte Verschiebung von A gegen den Knotenpunkt V nämlich

$$\delta_A = 2 \cdot 2200 = 4400^{dm}.$$

Aus den in die Fig. 245 eingeschriebenen Ordinaten δ_0, δ_1, ... der Biegungslinie erhält man nun die Ordinaten

$$H_m = 1 \frac{\delta_m}{\delta_A},$$

der H-Linie, nämlich

$$H_0 = \frac{41}{4400} = 0{,}01; \; H_1 = \frac{1750}{4400} = 0{,}40; \; H_2 = \frac{3350}{4400} = 0{,}76; \; H_3 = \frac{4790}{4400} = 1{,}09;$$

$$H_4 = \frac{5980}{4400} = 1{,}35; \; H_5 = \frac{6400}{4400} = 1{,}46;$$

dieselben weichen von den früher berechneten Werthen:

$$0; \; 0{,}38; \; 0{,}74; \; 1{,}09; \; 1{,}36; \; 1{,}47$$

nur unwesentlich ab. Man findet nun weiter $H_g = 12{,}6^t$ (statt $12{,}5^t$) und für den Stab $O_5 : \Sigma P\eta = 8{,}3^t$ (statt $8{,}9^t$), erhält also nahezu dieselben Spannkräfte S_g und S_p wie früher.

Nur für H_t findet man einen wesentlich anderen Werth, nämlich (nach Seite 144)

$$H_t = \pm 1 \frac{E\delta_t}{\delta_A}^{**}) = \pm \frac{E\varepsilon t l}{\delta_A} = \frac{200\,000 \cdot 0{,}000\,012 \cdot 35^0 \cdot 200}{4400} = \pm 3{,}8^t \text{ (statt } 5{,}3^t).$$

Im Obergurtstabe O_5 verursacht also eine Temperaturänderung um $t = 35^0$ Cels. eine Spannkraft: $S_t = \mp 5 \cdot 3{,}8 = \mp 19^t$ (statt $\mp 26{,}5^t$). Worin diese Abweichung ihren Grund hat, ist bereits auf Seite 204 gelegentlich der Untersuchung der Douro-Brücke hervorgehoben worden; es ist ein Vorzug der Näherungstheorie, für H_t stets zu grosse Werthe zu liefern, da gerade die Schätzung von t auf sehr unsicherer Grundlage beruht, und es sich deshalb dringend empfiehlt, nicht zu günstig zu rechnen. Zu beachten ist auch, dass

---

*) In diese Formel sind die vollen Querschnitte einzusetzen; dieselben sind in Figur 238 auf Tafel 3 zusammengestellt worden, die Stablängen in Fig. 239.

**) Die Multiplikation des Zählers mit E ist erforderlich, weil δ_A für $E = 1$ berechnet wurde. Zu beachten ist ferner, dass l in *dm* und E in Tonnen f. d. *qdm* auszudrücken sind.

ein Ausweichen der Widerlager um Δl eine Aenderung von H um $\Delta H = -1\,\frac{E\Delta l}{\delta_4}$ verursacht, so dass beispielsweise dem kleinen Werthe $\Delta l = 5^{mm} = 0{,}05^{dm}$ bereits

$$\Delta H = -\frac{200000 \cdot 0{,}05}{4400} = -2{,}3^{t}$$

entspricht.

Als zweites Verfahren wählen wir das im § 2 beschriebene Stabzugverfahren und berechnen zu diesem Zwecke zunächst die Aenderungen $\Delta\vartheta$ der oberen Randwinkel ϑ. In Fig. 243 geben die auf den einzelnen Stäben stehenden Zahlen die Spannungen $\sigma' = \frac{S'}{F}$ für den Zustand $H = -1$ in Tonnen für das qdm an und die in die Winkel eingeschriebenen Zahlen die Cotangenten

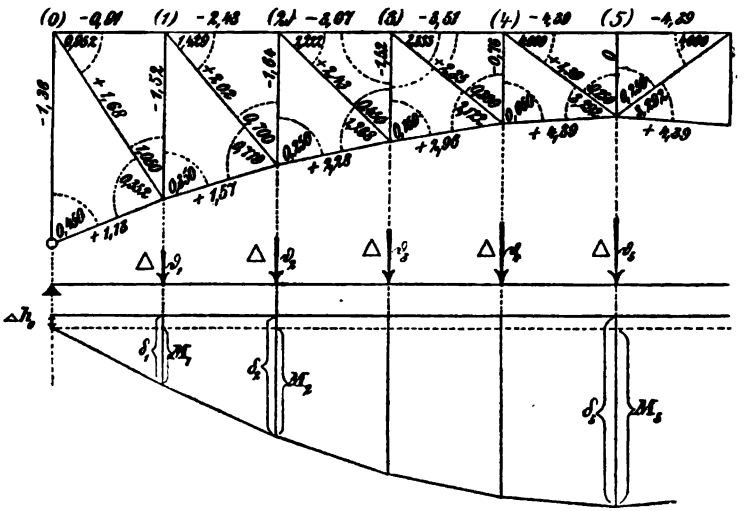


Fig. 243.

dieser Winkel*). Die Aenderung von ϑ_3 wird beispielsweise (für $E = 1$)

$$\Delta\vartheta_3 = 2{,}222\,(2{,}43 + 3{,}07) + 0{,}450\,(2{,}43 + 1{,}52) + 0{,}150\,(2{,}96 + 1{,}52) + 2{,}122\,(2{,}96 - 2{,}35) + 0{,}300\,(-0{,}76 - 2{,}35) = +15{,}03,$$

und auf diese Weise erhält man:

$$\Delta\vartheta_0 = -2{,}42;\ \Delta\vartheta_1 = +5{,}33;\ \Delta\vartheta_2 = +7{,}93;\ \Delta\vartheta_3 = +15{,}03;\ \Delta\vartheta_4 = +33{,}54;\ \Delta\vartheta_5 = +46{,}94.$$

Wird nun zunächst der Stab $V5$ festgehalten, so sind die Drehungswinkel ψ der Obergurtstäbe (5) (4) . . . (1) sowie der Endvertikale (h_0):

$$\psi_5 = \tfrac{1}{2}\,\Delta\vartheta_5 = 23{,}47;\ \psi_4 = \psi_5 + \Delta\vartheta_4 = 57{,}01;\ \psi_3 = \psi_4 + \Delta\vartheta_3 = 72{,}04 \text{ u. s. w.}$$
$$\psi_2 = 79{,}97;\ \psi_1 = 85{,}30;\ \psi_0 = 82{,}88$$

*) Fig. 243 wurde verzerrt gezeichnet, damit die Zahlen in der Nähe des Scheitels Platz fanden.

und die den Stäben entsprechenden Werthe ρ (d. i. Drehungswinkel mal Stablänge*)

$\rho_5 = 20 \cdot 23{,}47 = 469{,}4^{dm}$; $\rho_4 = 20 \cdot 57{,}01 = 1140{,}2^{dm}$; $\rho_3 = 20 \cdot 72{,}04 = 1440{,}8^{dm}$;
$\rho_2 = 20 \cdot 79{,}97 = 1599{,}4^{dm}$; $\rho_1 = 20 \cdot 85{,}30 = 1706^{dm}$; $\rho_0 = 30 \cdot 82{,}88 = 2486{,}4^{dm}$.

Berechnet man nun noch die (in Fig. 247 zusammengestellten) Längenänderungen $\Delta(5) = -87{,}7$, $\Delta(4) = -70{,}2$, ... $\Delta(1) = -18{,}3$, $\Delta h_o = -40{,}9$ der Stäbe (5), (4), ... (1), h_o und reiht (nach Fig. 245) die Strecken

$$\Delta(5),\ \rho_5,\ \Delta(4),\ \rho_4,\ \Delta(3),\ \rho_3,\ \ldots\ldots\ \Delta h_o,\ \rho_0$$

aneinander, so erhält man dieselben Punkte 4', 3', ... A', deren Lagen vorhin mittels des Williot'schen Verfahrens festgelegt worden sind. Das Stabzugverfahren erfordert etwas mehr Zeit, liefert aber übersichtlichere und vor allem genauere Zeichnungen.

Das dritte Verfahren besteht in der Herleitung der Biegungslinie aus den Momenten M eines einfachen Balkens, der mit den Gewichten $\Delta\mathfrak{H}_1, \Delta\mathfrak{H}_2, \ldots \Delta\mathfrak{H}_5$, belastet wird. Man findet für diese Momente die Werthe

$$M_1 = 1706{,}0;\ M_2 = 3305{,}4;\ M_3 = 4746{,}2;\ M_4 = 5886{,}4;\ M_5 = 6355{,}8$$

fügt zu denselben die Verkürzung (40,9) der Endvertikale (Fig. 247) und erhält

$$\delta_1 = 1746{,}9;\ \delta_2 = 3346{,}3;\ \delta_3 = 4787{,}1;\ \delta_4 = 5927{,}3;\ \delta_5 = 6396{,}7.$$

Die dem Zustande $H = -1$ entsprechende Aenderung der Stützweite wird nach Gleich. (4) auf Seite 98 (mit $E = 1$)

$$\begin{aligned}\delta_A &= h_o \Sigma \Delta\mathfrak{H} + \lambda \Sigma \sigma' \\ &= 30\,[46.94 + 2\,(33{,}54 + 15{,}03 + 7{,}93 + 5{,}33 - 2{,}42)] \\ &\quad - 20\,(4{,}39 + 3{,}51 + 3{,}07 + 2{,}43 + 0{,}91)\,2 = 4400{,}4\end{aligned}$$

und es ergiebt sich daher:

$$H_o = \frac{\delta_o}{\delta_A} = \frac{40{,}9}{4400{,}4} = 0{,}01;\ H_1 = \frac{1746{,}8}{4400{,}4} = 0{,}40;\ \text{u. s. w.}$$

Ein viertes Verfahren würde in der Berechnung der δ-Linie auf dem in No. 47 gezeigten Wege bestehen. Die Gewichte w werden hier unmittelbar aus den Längenänderungen der Stäbe berechnet, während die Bestimmung von δ_A nach No. 48 zu erfolgen hat. Wir halten die Durchführung der Zahlenrechnung für entbehrlich, da dieses Verfahren bereits auf Seite 126 bis 128 durch ein Beispiel erläutert worden ist.

d. Einführung der Kämpferdrucklinie und der zweiten H-Linie.

86. Die Kämpferdrucklinie ist der geometrische Ort des Punktes F, Fig. 248, in welchem die von einer Einzellast hervorgerufenen Kämpferdrücke K_1 und K_2 diese Last treffen; zur Bestimmung derselben zeichne man die Einflusslinien für die Stützenwiderstände A und H und setze A mit $H' = H \sec\alpha$ zur Mittelkraft K_1 zusammen. Der in senkrechter Richtung gemessene Abstand η des Punktes F von der Geraden AB ist

*) Vergl. Seite 87. Nicht zu verwechseln mit der im § 5 eingeführten Bezeichnung $\rho = \frac{s}{EF}$.

durch die Gleich. $\eta : a = A : H$ gegeben. Mit $A = \frac{Pb}{l}$ folgt hieraus:

$$(42) \qquad \eta = \frac{P}{H}\,\frac{ab}{l}.$$

In Fig. 248 haben wir der Einfachheit wegen die H-Linie und auch die Kämpferdrucklinie stetig gekrümmt gezeichnet. Meistens ist die H-Linie ein Polygon, dessen Ecken den Querträgern entsprechen, und es setzt sich dann auch die Kämpferdrucklinie $A_0 B_0$ nach Fig. 250 aus einzelnen Kurvenstücken zusammen, die in den Trennungspunkten $2_0, 4_0, \ldots$ keine gemeinschaftlichen Tangenten besitzen.

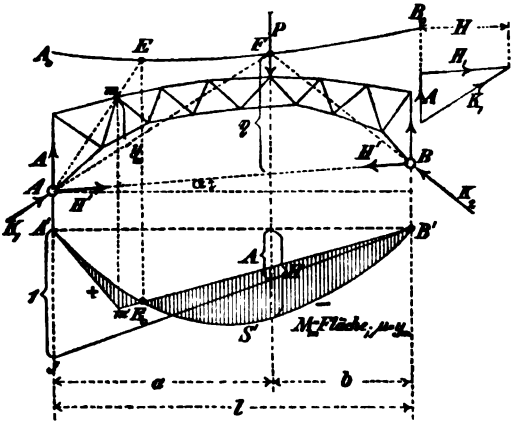


Fig. 248.

Wird die Einflusslinie für den Horizontalschub H eines Trägers von nahezu unveränderlicher Höhe h durch eine stetig gekrümmte Parabel ersetzt, deren Gleichung nach Seite 211

$$H = \frac{3Pab}{4fl}\,\nu$$

lautet, so ergiebt sich

$$(43) \qquad \eta = \frac{4f}{3\nu},$$

und hieraus folgt dann, dass die Kämpferdrucklinie eine *zur Schlusslinie AB parallele Gerade* ist.

87. Belastungsscheiden. Im I. Bande wurde die Kämpferdrucklinie des Dreigelenkbogens zur Ermittlung von Belastungsscheiden benutzt; sie lieferte gewisse ausgezeichnete Punkte der Einflusslinien und führte zu mancher Vereinfachung bei Auftragung dieser Linien. In ähnlicher Weise lässt sich natürlich auch die Kämpferdrucklinie des Bogens mit zwei Gelenken verwerthen. Wird z. B. die Einflusslinie für das Angriffsmoment M_m gesucht, so lege man durch das linke Gelenk und den Knotenpunkt m eine Gerade und bestimme den Schnitt-

punkt E derselben mit der Kämpferdrucklinie. Einer durch E gehenden Last entspricht ein durch m gehender Kämpferdruck K_1 und mithin ein Moment $M_m = 0$, woraus dann folgt, dass lothrecht unter E der Nullpunkt E_0 der gesuchten Einflussfläche liegen muss, und damit ist der Linienzug $A'm'B'$ und in Folge dessen auch die schraffirte M_m-Fläche bestimmt. Es verdient indess hervorgehoben zu werden, dass die Ermittlung der Einflussflächen auf dem in No. 84 gewiesenen Wege im allgemeinen den Vorzug verdient, weil die Aufzeichnung der Kämpferdrucklinie des Zweigelenkbogens in der Regel wesentlich umständlicher ist als die des Bogens mit drei Gelenken. Auch liefert das frühere Verfahren schärfere Zeichnungen.

88. Die zweite *H*-Linie. Die Verkehrslast eines Bogenträgers sei von B aus um die Strecke ξ vorgerückt und erzeuge in dieser Lage (Fig. 249) am linken Auflager die Widerstände A und H. Letztere seien an der Stelle ξ als Ordinaten aufgetragen; ihre Endpunkte beschreiben, während die Last von B bis A vorgeschoben wird, zwei Linien, welche zur Unterscheidung von den Einflusslinien für A und H die *zweite A-Linie* bezw. die *zweite H-Linie* genannt werden sollen, und zuweilen mit Vortheil zur Berechnung der grössten Spannkräfte in den Füllungsstäben verwendet werden können. Die zweite A-Linie wurde bereits (unter der Bezeichnung: A-Polygon) im I. Bande bei der Berechnung der Balkenbrücken benutzt; ihre zeichnerische und rechnerische Ermittlung findet sich dort auf Seite 137 bis 139, 145 bis 152 und 187 (Gleich. 6). Die zweite H-Linie aber bestimmt man, indem man H für verschiedene Zugstellungen mit Hilfe der Einflusslinie für H berechnet.

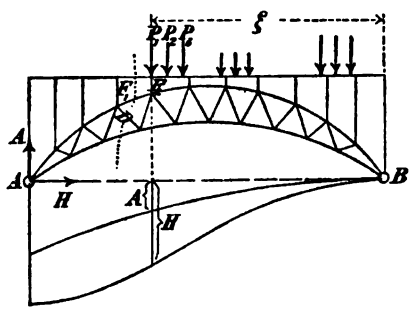


Fig. 249.

Die Anwendung dieser beiden Linien ist zu empfehlen, sobald sich für die Mehrzahl der Füllungsstäbe nur *eine* Belastungsscheide ergiebt und diese in dem Felde F_1 F_2 (Fig. 222 bis 225) liegt, welches der durch den fraglichen Stab und ausserdem noch durch zwei Gurtstäbe geführte Schnitt trifft, ein Fall, der namentlich bei parabelförmigen Sichelträgern vorkommt. Hier sind die Belastungsgesetze meistens dieselben wie für den einfachen Balken, weil der Einfluss von H verhältnissmässig gering ist, und es stellt sich in der Regel heraus, dass in einer linkssteigenden Diagonale D (Fig. 249) der grösste Zug bezw.

der grösste Druck auftritt, je nachdem die Belastung von B aus bis F_2 oder von A aus bis F_1 reicht.*)

Wegen der verhältnissmässig kleinen Feldweiten der Bogenbrücken erweisen sich in der Regel die im I. Bande als *Grundstellungen* bezeichneten Lagen der Verkehrslast als die ungünstigsten; d. h. es ist die *erste* Achse des von B aus vorrückenden Zuges über F_2 zu setzen und die erste Achse des von A aus auffahrenden über F_1. Will man bei grösseren Feldweiten sicher gehen, so nehme man die erste Achse etwas stärker belastet an. Man vergl. das im I. Bande in No. 148 über die Berechnung von Balkenbrücken gesagte.

Sind nun D_A und D_H die Spannkräfte, welche in dem fraglichen Füllungsstabe D in Folge $A = 1$ bezw. $H = 1$ hervorgerufen werden, so ist der Einfluss der von B bis F_2 vorgeschobenen Verkehrslast:

$$_{max}D = AD_A + HD_H,$$

und ebenso erhält man den Einfluss der von A bis F_1 reichenden Belastung:

$$_{min}D = BD_B + HD_H$$

wo B und H die am rechten Auflager hervorgerufenen Widerstände sind und D_B die Spannkraft in Folge $B = 1$ bedeutet.

89. Zahlenbeispiel. Es liege der in Fig. 250 dargestellte Träger vor, dessen H-Linie auf Seite 201 ermittelt wurde. $A_0 2_0 4_0 \ldots B_0$ ist die Kämpferdrucklinie; sie wurde nach No. 86 bestimmt; ihre äussersten Theile sind gerade Linien $A_0 2_0$ und $B_0 18_0$, welche bezw. durch B und A gehen, wie sich leicht aus Gleichung 42 folgern lässt.

Die ständige Belastung sei $g = 1{,}45^t$ f. d. $m.$, also für ein Feld: $g\lambda = 1{,}45 \cdot 2{,}0 = 2{,}9^t$; die bewegliche Belastung bestehe aus einem Eisenbahnzuge mit den in Fig. 250 angegebenen Achsenlasten und Radständen. Die in die Figur eingeschriebenen, den Knoten der oberen Gurtung entsprechenden Ordinaten der zweiten A-Linie wurden mit Hilfe der Tabelle I auf Seite 310 des I. Bandes berechnet, und die Ordinaten der zweiten H-Linie auf die in No. 79 an einem Beispiele gezeigte Weise aus der Einflusslinie für H. Gesucht seien die Grenzwerthe der Spannkraft D_8. Die Einflüsse D_A, D_B, D_H von $A = 1$, $B = 1$, $H = 1$ sind bereits auf Seite 222 berechnet worden.

Zunächst ist anzugeben, bei welchen Laststellungen diese Grenzwerthe entstehen. Bewegt sich über den Träger eine Einzellast von B bis 8, so beschreibt der zugehörige linke Kämpferdruck den Winkel $B_0 A 8_0$; er dreht stets links um den Schnittpunkt i von O und U, und es kann ihm daher nur durch einen rechts um i drehenden, am linken Trägerstücke angreifenden *Druck* D_8 das Gleichgewicht gehalten werden. Rückt die Last von A bis 6 vor, so beschreibt der rechte Kämpferdruck den Winkel $A_0 B 6_0$, er dreht links um i und erzeugt einen *Zug* D_8, welcher, am rechten Trägerstücke angreifend, rechts um i dreht. Es entsteht also $_{min}D$ oder $_{max}D$, je nachdem der Eisenbahnzug von B bis 8 oder von A bis 6 vorgerückt ist.

---

*) Ob dieser Fall vorliegt oder nicht, kann auch mit Hilfe der Kämpferdrucklinie entschieden werden, vergl. No. 89.

Der von B bis zum Knoten 8 vorgeschobene Eisenbahnzug erzeugt am linken Auflager: $A = 25{,}7$ und $H = 59^t$. In Folge von $A = 1$ würde entstehen: $D_8 \cos \varphi_8 = -0{,}178$ und $H = 1$ würde erzeugen: $D_8 \cos \varphi_8 = -0{,}096$. Daher entsteht in Folge der Verkehrslast:

$$_{min}D_8 \cos \varphi_8 = -0{,}178 \cdot 25{,}7 - 0{,}096 \cdot 59 = -10{,}24^t.$$

Zur Hervorbringung von $_{max}D_8$ muss der Eisenbahnzug von A bis 6 vorgerückt werden; es entsteht dann am rechten Auflager: $B = 9{,}0^t$, $H = 31^{t*})$ und man erhält (da $B = 1$ den Einfluss $D_8 \cos \varphi_8 = +1{,}620$ ausübt):

$$_{max}D_8 \cos \varphi_8 = +1{,}620 \cdot 9.0 - 0{,}096 \cdot 31 = +11.60^t.$$

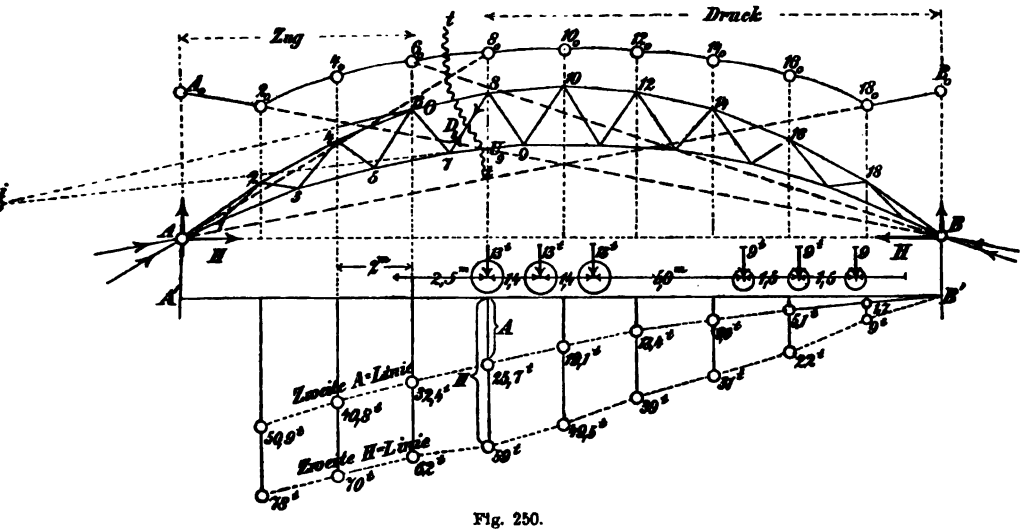


Fig. 250.

Der Einfluss der ständigen Belastung wird nun wie folgt bestimmt. Die rechts vom Schnitte tt in den Knotenpunkten 8 bis 18 angreifenden Lasten $g\lambda$ erzeugen: $A = g\lambda\left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{5}{10} + \frac{6}{10}\right) = 2{,}1\, g\lambda = 6{,}1^t$ und die links von tt angreifenden $g\lambda$ rufen $B = g\lambda\left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10}\right) = 1{,}0\, g\lambda = 2{,}9$ hervor; ferner ist nach Seite 201 der von der gesammten ständigen Last hervorgerufene Horizontalschub $H_g = 21{,}5^t$, weshalb der Einfluss von g auf D_8:

$$D_8 \cos \varphi_8 = -0{,}178 \cdot 6{,}1 + 1{,}620 \cdot 2{,}9 - 0{,}096 \cdot 21{,}5 = +1{,}58^t$$

gefunden wird. Im ganzen erzeugt also die Belastung:

$$_{min}D_8 \cos \varphi_8 = -10{,}24 + 1{,}58 = -8{,}7^t$$
$$_{max}D_8 \cos \varphi_8 = +11{,}60 + 1{,}58 = +13{,}1^t$$

wozu noch der Einfluss der Temperaturänderung mit $D_8 \cos \varphi_8 = -0{,}096\, H^t$

*) Diese Werthe sind den Spiegelbildern der in Fig. 250 gezeichneten Linien zu entnehmen; sie erscheinen in Fig. 250 unter dem Knotenpunkte 14.

$= \mp 0{,}096 \cdot 783\, F_c$ hinzutritt, wenn F_c den Mittelwerth der Gurtquerschnitte bedeutet.

In derselben Weise dürfen die Spannkräfte D_4, D_5, D_6, D_7, D_9, D_{10} berechnet werden. Für D_2 und D_3 gelangt man zu anderen Belastungsgesetzen; es verdient dann die Anwendung der Einflusslinien den Vorzug.*)

90. Näherungsformel für die zweite H-Linie im Falle gleichmässiger Belastung. Die Verkehrslast sei $= p$ f. d. Längeneinheit der Stützweite l und bedecke die Strecke ξ, Fig. 251; einem Lasttheilchen $p\,dx$ entspreche der Horizontalschub dH. Dann ist $H = \int_0^{\xi} dH$, und es lässt sich H als Funktion von ξ darstellen, sobald dH als Funktion von x ausgedrückt werden kann, eine Aufgabe, deren Lösung für den in No. 80 behandelten parabelförmigen Sichelträger und den in No. 82 untersuchten Bogenträger mit nahezu unveränderlicher Höhe h zu einfachen Ergebnissen führt.

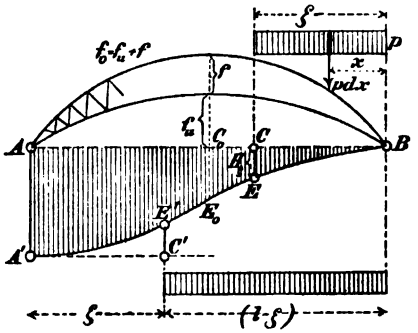


Fig. 251.

a. *Der parabolische Sichelträger.* Ersetzt man in Gleich. 14 (Seite 205) P durch $p\,dx$, ferner a durch $l - x$ und b durch x, so erhält man

$$dH = \frac{3\,p\,dx\,l\,(f_o + f_u)}{3\,l^2(f_o^2 + f_u^2) + 32\,f_o^2 f_u^2}\left\{(l^2 + 16\,f_o f_u)\tfrac{1}{4}\left(\frac{x}{l}\log\text{nat}.\frac{l}{x} + \frac{l-x}{l}\log\text{nat}.\frac{l}{l-x}\right) - f_o f_u\, 8\,\frac{x}{l}\,\frac{l-x}{l}\right\}$$

und, indem man diesen Ausdruck von o bis ξ integrirt:

$$(44)\qquad \begin{cases} H = \dfrac{3\,p\,l^2(f_o + f_u)\,[(l^2 + 16\,f_o f_u)\,\alpha' - f_o f_u \alpha'']}{3\,l^2(f_o^2 + f_u^2) + 32 f_o^2 f_u^2} \\ \text{wo } \alpha' = \tfrac{1}{8}\left\{\dfrac{\xi}{l} + \dfrac{\xi^2}{l^2}\log\text{nat}.\dfrac{l}{\xi} - \dfrac{(l-\xi)^2}{l^2}\log\text{nat}.\dfrac{l}{l-\xi}\right\} \\ \text{und } \alpha'' = \tfrac{1}{8}\,\dfrac{\xi^2}{l^2}\left(3 - 2\,\dfrac{\xi}{l}\right) \end{cases}$$

Zur Erleichterung der Berechnung diene die folgende Tabelle, in welcher die Werthe α' und α'' für $\xi = 0$ bis $\xi = 0{,}5\,l$ angegeben sind und zwar für 10 Theilpunkte der halben Stützweite. Der Verlauf der zweiten H-Linie für $\xi > 0{,}5\,l$ ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung.

Ist $C_o E_o$ (Fig. 251) die Ordinate der gesuchten Linie für $\xi = 0{,}5\,l$, so entspricht der vollen Belastung die Ordinate $\overline{AA'} = 2\,\overline{C_o E_o}$. Bedeckt nun die Last von B aus die Strecke $l - \xi$, so nehme man zunächst gänzliche Belastung des Trägers an und bringe den Einfluss einer von A aus um ξ vorgeschobenen Belastung in Abzug, indem man von einer durch A' zu AB gezogenen Paral-

*) Die Berechnung von D_3 ist überflüssig, da man am Bogenende ein volles Stehblech anordnen wird.

lelen aus die Strecke $C'E' = CE$ abträgt. Es ist dann E' ein Punkt der zweiten H-Linie.

$\frac{\xi}{l}$	α'	α''	$\frac{\xi}{l}$	α'	α''
0,05	0,00140	0,0097	0,30	0,02920	0,2880
0,10	0,00471	0,0373	0,35	0,03707	0,3757
0,15	0,00941	0,0810	0,40	0,04534	0,4693
0,20	0,01520	0,1387	0,45	0,05386	0,5670
0,25	0,02185	0,2083	0,50	0,06250	0,6667

In Folge gänzlicher Belastung ($\xi = l$) entsteht:

$$(45) \qquad H = \frac{p\,l^2\,(f_o + f_u)\,(3\,l^2 + 16\,f_o f_u)}{8\,[3\,l^2\,(f_o^2 + f_u^2) + 32\,f_o^2 f_u^2]}.$$

Ersetzt man in dieser Formel p durch g, so erhält man den Einfluss der ständigen Belastung. Für den in No. 79 in anderer Weise behandelten Sichelträger ergiebt sich z B. wegen $g = 1{,}45^t$:

$$H_g = \frac{1{,}45 \cdot 20^2\,(4{,}0 + 2{,}5)\,(3 \cdot 20^2 + 16 \cdot 4{,}0 \cdot 2{,}5)}{8\,[3 \cdot 20^2\,(4{,}0^2 + 2{,}5^2) + 32 \cdot 4{,}0^2 \cdot 2{,}5^2]} = 21{,}4^t$$

ein Werth, der von dem früher erhaltenen $H_g = 21{,}5^t$ fast gar nicht abweicht.

b. ***Bogenträger von nahezu unveränderlicher Höhe h*** (Fig. 212 und 213 auf Seite 209). Hier empfiehlt es sich, von der parabelförmigen Einflusslinie für H auszugehen und Gleich. 29 auf Seite 211 zu benutzen. Man erhält dann für ein Lasttheilchen $p\,dx$:

$$dH = \frac{3\,p\,dx \cdot x\,(l - x)\,\nu}{4\,f\,l}$$

und, indem man diesen Ausdruck von 0 bis ξ integrirt,

$$(46) \qquad H = \frac{p\,l^2}{8\,f}\,\nu\,\frac{\xi^2}{l^2}\left(3 - 2\,\frac{\xi}{l}\right)$$

Zur Erleichterung der Berechnung der H-Linie diene die folgende Tabelle, deren Werthe noch mit $\frac{p\,l^2}{8\,f}\,\nu$ zu multipliciren sind.

$\frac{\xi}{l}$	H	$\frac{\xi}{l}$	H
0,05	0,00725	0,30	0,21600
0,10	0,02800	0,35	0,28175
0,15	0,06075	0,40	0,35200
0,20	0,10400	0,45	0,42525
0,25	0,15625	0,50	0,50000
	$\cdot\frac{p\,l^2}{8\,f}\,\nu$		$\cdot\frac{p\,l^2}{8\,f}\,\nu$

In Folge gänzlicher Belastung des Bogens entsteht

$$(47) \qquad H_p = \frac{p\,l^2}{8\,f}\,\nu$$

und in Folge der ständigen Belastung

$$(48) \qquad H_g = \frac{g l^2}{8 f} \nu.$$

Die Ziffer ν ist nach einer der Gleichungen 28, 30, 31, 32 (Seite 211 u. 212) zu berechnen.

Aufgabe. Gesucht sei die durch eine gleichförmige Belastung hervorgerufene Spannkraft ${}_{max}D_p$ des linkssteigenden Füllungsstabes eines Trägers von nahezu unveränderlicher Höhe h. Fig. 252. Es sollen die zweiten Linien für A und H sowie die Kämpferdrucklinie benutzt werden; wobei es erlaubt sei, die Lasten unmittelbar am Bogenträger angreifend anzunehmen*).

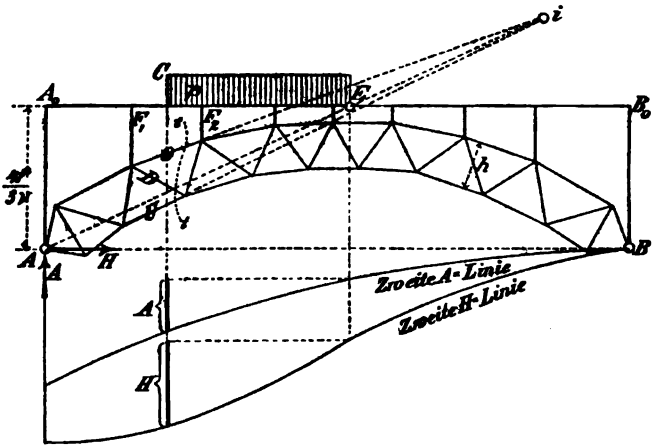


Fig. 252.

Die Kämpferdrucklinie ist nach No. 86 eine wagerechte Gerade im Abstande $4f : 3\nu$ von der AB; sie wird von der durch das Gelenk A und den Schnittpunkt i der Stäbe O und U gelegten Geraden in E geschnitten. Die Senkrechte durch E ist eine Belastungsscheide, denn eine durch E gehende Last ruft am linken Auflager einen Kämpferdruck hervor, der die Richtung Ai hat und das Moment $M_i = 0$ erzeugt. Lasten rechts von E verursachen bei A Kämpferdrücke, welche links um i drehen und den fraglichen Stab D auf Druck beanspruchen, denn eine am Trägerstück links vom Schnitt tt angreifende Zugkraft würde ebenfalls links um i drehen. Durch Lasten, welche zwischen E und F_2 aufgebracht werden, wird D gezogen, während Lasten links von F_1 wieder Drücke D hervorbringen. Dies letztere einzusehen, stelle man für die rechts von tt angreifenden Kräfte die Momentengleichung in Bezug auf i auf. Die Aufsuchung der Belastungsscheide zwischen $F_1 F_2$ darf man sparen; man rechnet genügend genau, wenn man behufs Erzeugung von ${}_{max}D$ den Träger zwischen E und der *Mitte* C des Feldes $F_1 F_2$ belastet und den auf den Querträger F_1 entfallenden Theil der Belastung des Feldes $F_1 F_2$ unberücksichtigt

*) Rechnet man mit gleichförmiger Belastung (die stets einer Schätzung unterliegt), so ist die Annahme unmittelbarer Belastung immer zulässig. Man gestalte dann überhaupt die Untersuchung möglichst einfach.

lässt, also links von tt nur die äusseren Kräfte A und H annimmt. Dabei ist A gleich dem Unterschiede der bei C und E gemessenen Ordinaten der zweiten A-Linie, und ganz entsprechend wird auch H gefunden. Schliesslich erhält man mit den auf Seite 221 eingeführten Bezeichnungen D_A und D_H:

$$_{max}D = D_A A + D_H H.^*)$$

Man könnte auch A und H zum Kämpferdrucke K zusammensetzen und hierauf nach Band I, No. 184 verfahren.

Wird $_{min}D$ gesucht, so werden die Einflüsse der auf den beiden negativen Beitragsstrecken A_0C und EB_0 aufzubringenden Belastungen getrennt ermittelt und dann zusammengezählt. Wird die Strecke A_0C belastet, so handelt es sich um die Bestimmung der am rechten Auflager hervorgerufenen Widerstände B und H.

c. Formeln für die Momente gleichmässig belasteter Bogenträger, deren H-Linie eine Parabel ist.

91. Es handle sich um Bogenträger von nahezu unveränderlicher Höhe h (Fig. 212 u. 213 Seite 209), deren H-Linie nach S. 211 eine Parabel von der Pfeilhöhe $\frac{3l}{16f}\nu = \frac{3l}{16f'}$ ist, wobei zur Abkürzung

$$\frac{f}{\nu} = f'$$

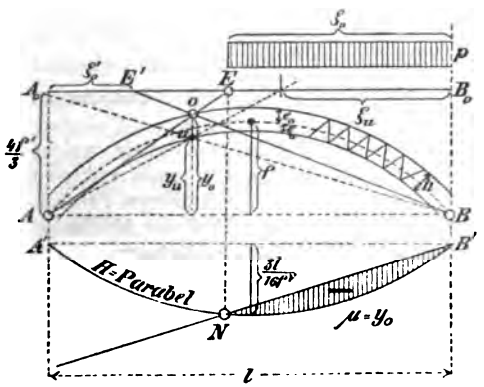


Fig. 253.

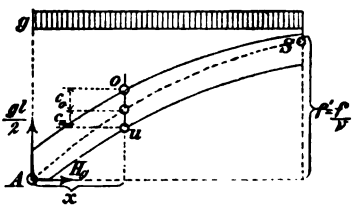


Fig. 254.

gesetzt werden möge. Die Kämpferdrucklinie ist eine wagerechte Gerade im Abstande $\frac{1}{3}f'$ von der AB.**)

*) Wir erinnern daran, dass es häufig zweckmässiger ist, $D\cos\varphi$ zu berechnen.

**) Es wird wie in der Aufgabe auf Seite 240 die zulässige Annahme unmittelbarer Belastung gemacht.

Gesucht seien die Grenzwerthe der Momente M^o und M^u für die Knotenpunkte o der oberen und u der unteren Gurtung.

Wir bestimmen zunächst den Einfluss der ständigen Belastung g, welche den Horizontalschub $H_g = \frac{gl^2}{8f} \nu$ hervorbringt, legen durch die Kämpfergelenke A und B eine Parabel ASB, deren Pfeilhöhe

$$= \frac{gl^2}{8H_g} = \frac{f}{\nu} = f' \text{ (Fig. 254)}$$

ist und messen die senkrechten Abstände c_o und c_u der Punkte o und u von jener Parabel. Liegt o oberhalb und u unterhalb der Parabel ASB, so ist:

$$(49) \quad \begin{cases} M^o_g = -H_g c_o = -\frac{gl^2}{8f'} c_o \\ M^u_g = +H_g c_u = +\frac{gl^2}{8f'} c_u. \end{cases}$$

Gelingt es nun, die Momente $_{min}M^o_p$ und $_{min}M^u_p$ in der Form

$$_{min}M^o_p = -C_o p; \quad _{min}M^u_p = -C_u p$$

darzustellen, so sind die Grenzwerthe von M_o und M_u (nach der auf Seite 185 durchgeführten Untersuchung):

$$(50) \quad \begin{cases} _{min}M^o = -g\frac{l^2}{8f'} c_o - pC_o - H_t y_o \\ _{max}M^o = -q\frac{l^2}{8f'} c_o + pC_o + H_t y_o \end{cases}$$

$$(51) \quad \begin{cases} _{min}M^u = +g\frac{l^2}{8f'} c_u - pC_u - H_t y_u \\ _{max}M^u = +q\frac{l^2}{8f'} c_u + pC_u + H_t y_u \end{cases}$$

wo H_t den absoluten Werth des Horizontalschubes in Folge einer Temperaturänderung bedeutet.

Zur Ermittlung von $_{min}M^o_p$ legen wir durch A und o eine Gerade, welche die Kämpferdrucklinie in der Belastungsscheide E schneidet, bestimmen senkrecht unter E den Punkt N der H-Parabel und erhalten in dem schraffirten Parabelabschnitte den zur negativen Beitragsstrecke B_oE gehörigen Theil der M^o-Fläche. Der Inhalt dieses Abschnittes verhält sich zum Inhalt der H-Fläche wie $\xi^3_o : l^3$, ist also $= \frac{\xi^3_o}{l^3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3l}{16f} \nu \cdot l = \frac{\xi^3_o}{8lf}$ und daraus folgt, dass die von B_o bis E reichende Belastung das Moment

$$(53) \qquad _{min}M^o_p = -p\mu\frac{\xi^3_o}{8lf} = -\frac{py_o\xi^3_o}{8f'l}$$

erzeugt. Schneidet nun eine durch B und o gelegte Gerade die Kämpferdrucklinie innerhalb der Stützweite in E'. wie dies Fig. 253 voraussetzt, so muss noch die Strecke A_oE' belastet werden, und es entsteht dann:

$$(54) \qquad _{min}M_{op} = -\frac{py_o}{8f'l}(\xi^3_o + \xi'^3_o)$$

In diesem Falle ist

$$(55) \qquad C_o = \frac{y_o}{8f'l}(\xi^3_o + \xi'^3_o).$$

Liegt E' links von A_v, so ist in vorstehender Gleichung $\xi_v' = 0$ zu setzen.

Ganz ebenso erhält man für C_u den Ausdruck

$$(56) \qquad C_u = \frac{y_u}{8 f' l} (\xi_{uv}^2 + \xi_{uv}'^2).$$

Anmerkung. Weitere analytische Untersuchungen dieser Art findet der Leser in des Verfassers „Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken", Berlin 1880. Dort ist allerdings nur der Fall $\nu = 1$ behandelt worden, und es unterscheiden sich daher die gewonnenen Formeln von den hier abgeleiteten dadurch, dass f an die Stelle von f' tritt. Dem Leser wird es hiernach keine Schwierigkeiten bereiten, auch die in dem angeführten Buche für *Einzellasten* gegebenen einfachen und bequemen Gleichungen für den Fall eines von 1 verschiedenen Werthes ν umzubilden.

§ 8.

Zweigelenkbogen mit gesprengter Zugstange und verwandte Trägerarten.

92. Eine für Dachstühle wichtige Anordnung des Bogens mit zwei Gelenken ist die in Fig. 255 dargestellte. Die Kämpfer A und B sind durch ein Zugband verbunden, welches an dem Fachwerkbogen durch senkrechte Stäbe befestigt ist; das Auflager A ist fest, das andere (B) wird auf einer wagerechten Geraden geführt. Zur Bestimmung der Stützenwiderstände sind die Gleichgewichtsbedingungen ausreichend; der Träger verhält sich in dieser Beziehung wie ein einfacher Balken; er ist jedoch *innerlich statisch unbestimmt*. Als statisch nicht bestimmbare Grösse wird zweckmässig die wagerechte Projektion H der Spannkraft des Zugbandes eingeführt; dieselbe ist für alle Glieder gleich gross. Zieht man von einem Punkte O aus Parallelen zu den Stäben I, II, III, ... so schneiden diese auf

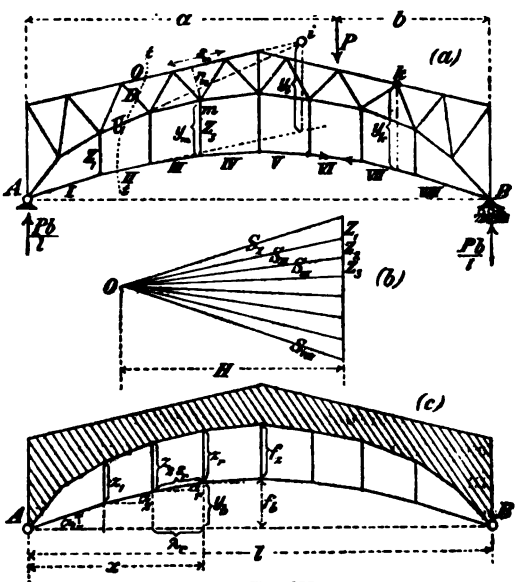


Fig. 255.

einer im Abstande H von O eingetragenen Senkrechten die Spannkräfte Z der Hängestangen ab, und die Längen der von O ausgehenden Strahlen geben die Spannkräfte S_I, S_{II}, S_{III}, . . . der Stäbe I, II, III, . . . an. Damit sind alle am Fachwerkbogen angreifenden Kräfte bekannt.

Will man die Stabkräfte aus den Momenten M berechnen, so führe man durch m einen senkrechten Schnitt und zerlege die Spannkraft der geschnittenen Zugstange in eine senkrechte und eine wagerechte Seitenkraft; die erstere geht durch den Drehpunkt m, und die letztere übt das Angriffsmoment $-Hy_m$ aus. Da nun die äusseren Kräfte mit denen eines einfachen Balkens übereinstimmen, so erhält man

$$M_m = M_{om} - Hy_m \tag{1}$$

d. i. dieselbe Gleichung, welche auf Seite 212 für den Bogen mit festen Kämpfergelenken gefunden wurde. Nur bedeutet jetzt y nicht mehr den Abstand des fraglichen Knotenpunktes von der Geraden AB sondern von dem Zugbande.

Wird behufs Berechnung einer Spannkraft D das Angriffsmoment für den Schnittpunkt i der an D grenzenden Gurtstäbe O und U gesucht, so misst man den senkrechten Abstand y_i des Punktes i von demjenigen Gliede der Zugstange, welches der durch O, D, U geführte Schnitt tt trifft und erhält:

$$M_i = M_{oi} - Hy_i, \tag{2}$$

oder allgemeiner

$$M_i = M_{oi} \pm Hy_i,$$

wobei das Vorzeichen von der Lage des Punktes i abhängt.

Es bedarf jetzt nur eines Hinweises darauf, dass die in No. 84 gelehrten Verfahren, die Einflussflächen für senkrechte Belastung aus ein und derselben H-Linie *deren Bestimmung in No. 93 gezeigt werden wird,* zu ermitteln, auch auf den vorliegenden Fall angewendet werden dürfen; man hat nur auf die andere Bedeutung von y zu achten.

Hinsichtlich der Gestalt des Stabzuges I, II, III, . . . ist die vorstehende Untersuchung an keinerlei Voraussetzungen gebunden. Dieser Stabzug darf auch nach unten gesprengt werden; es entstehen dann Träger der in den Fig. 256 bis 259 dargestellten Art. Die senkrechten Zwischenstäbe werden hier auf Druck beansprucht. Die Tragwerke in den Figuren 258 und 259 bezeichnet man auch als verspannte Balken, und den Träger in Fig. 257 als versteifte Kette, und man nennt dann das Dreieckfachwerk $ACBA$ den *Versteifungsbalken der Kette* ASB. Nicht unzweckmässig dürfte es sein, den mit dem Dreieckfachwerk durch senkrechte Stäbe verbundenen Stabzug in allen den hier vorgeführten Fällen die *dritte Gurtung* zu nennen und festzusetzen, dass, falls kurz von der

oberen und der *unteren* Gurtung gesprochen wird, hierunter die Gurtungen des Dreieckfachwerks zu verstehen sind. Die dritte Gurtung kann auch oberhalb des Dreieckfachwerks liegen; sie wird dann auf Druck beansprucht, während die Zwischenstäbe (eine durchweg nach unten hohl liegende dritte Gurtung vorausgesetzt) Zugspannungen er-

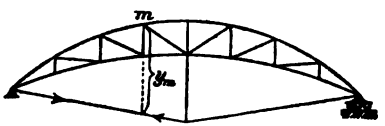


Fig. 256.

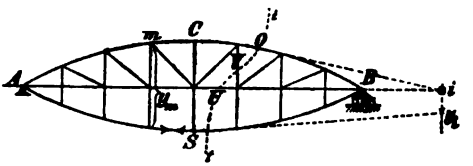


Fig. 257.

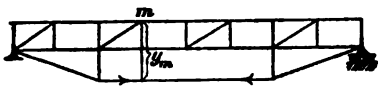


Fig. 258.

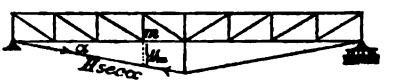


Fig. 259.

leiden. Bezeichnet man für diesen in Figur 260 dargestellten Fall mit H die wagerechte Seitenkraft des in der dritten Gurtung auftretenden *Druckes*, so bleibt die Gleichung $M_m = M_{om} - Hy_m$ gültig. Für M_i erhält man je nach der Lage des Punktes i gegen den vom Schnitte $t - t$ getroffenen Stab der dritten Gurtung: $M_i = M_{oi} \pm Hy_i$.

Den in Fig. 260 abgebildeten Träger pflegt man auch einen durch einen Balken versteiften Stabbogen zu nennen und bezeichnet dann das Dreieckfachwerk als den *Versteifungsbalken des Stabbogens.**) Dieser Balken, welcher zugleich bestimmt ist, den Horizontalschub des Bogens

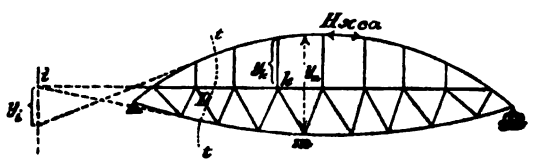


Fig. 260.

aufzunehmen, erhält meistens (abgesehen von den Endfeldern) parallele Gurtungen. Die Untersuchung der Füllungsstäbe gestaltet sich dann besonders einfach. Es handele sich z. B. um die linkssteigende Diagonale D des Trägers in Fig. 261. Führt man den Schnitt tt, zerlegt den Druck $H \sec \alpha$ des von tt getroffenen Stabes der dritten Gurtung in die Seitenkräfte H (wagerecht) und $H \operatorname{tg} \alpha$ (senkrecht) und setzt

*) Unseres Wissens ist diese Trägerart zuerst von dem verstorbenen österreichischen Ingenieur Langer gegeben worden und dürfte daher wohl am besten *Langer'scher Balken* genannt werden.

man schliesslich die Summe aller links vom Schnitte tt wirkenden lothrechten Kräfte $= 0$, so erhält man:

$$A - \sum_{o}^{t} P - D \sin \varphi - H \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

wo $\sum_{o}^{t} P$ die Summe der links vom Schnitte t angreifenden Lasten bedeutet. Hierin ist nun

$$A - \sum_{o}^{t} P = Q_o$$

die Querkraft für den Schnitt tt eines *einfachen Balkens* AB, und es ergiebt sich daher

$$D \sin \varphi = Q, \text{ wo}$$

$$Q = Q_o - H \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \, (Q_o \operatorname{cotg} \alpha - H). \tag{3}$$

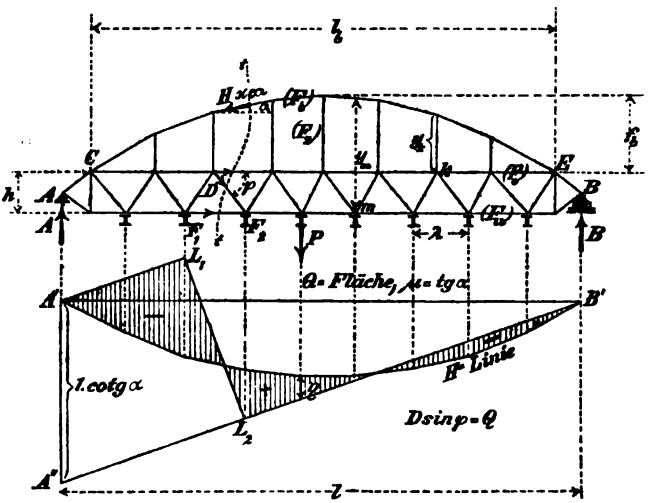


Fig. 261.

Man nennt Q die Querkraft für den Schnitt tt des *Versteifungsbalkens*, betrachtet $\operatorname{tg} \alpha$ als Multiplikator und erhält dann die Einflussfläche für Q als den Unterschied der $Q_o \operatorname{cotg} \alpha$-Fläche und der H-Fläche. Macht man also (Figur 261) $A'A'' = 1 \operatorname{cotg} \alpha$, zieht $A''B'$, hierauf $A'L_1 \parallel B'A''$, schliesslich L_1L_2, so ist die schraffirte Fläche die Q-Fläche; denn wäre $A'A'' = 1$, so würde nach Band I, Seite 132 der Linienzug $A'L_1L_2B'$ die auf die Achse $A'B'$ bezogene Q_o-Linie sein.

Auf dieselbe Weise werden die Spannkräfte in den Füllungsstäben der in den Figuren 258, 259, 270 abgebildeten Versteifungsbalken bestimmt.

98. Die Bestimmung der Einflusslinie für H unterscheidet sich von der in No. 77 gelehrten Weise, die H-Linie eines Zweigelenkbogens zu berechnen, nur dadurch, dass die Summe: $\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}$, welche sich bisher nur auf die Stäbe des Bogens bezog, und für welche der Ausdruck $\frac{1}{EF_o} \Sigma z_m$ gefunden wurde, um die der dritten Gurtung und den senkrechten Zwischenstäben entsprechenden Glieder vermehrt werden muss. Sind nun $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Neigungswinkel der Glieder der dritten Gurtung, so sind die Spannkräfte S und Z,

(4) $$S_1 = H \sec \alpha_1; \quad S_2 = H \sec \alpha_2; \ \ldots .^*)$$

(5) $$Z_1 = H(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2); \quad Z_2 = H(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3); \ \ldots$$

und man erhält für die allgemein mit S' bezeichneten Spannkräfte des Zustandes $H = -1$ die absoluten Werthe:

(6) $$\begin{cases} S_r' = \sec \alpha_r \text{ für das } r^{te} \text{ Glied des Zugbandes,} \\ S_r' = (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}) \text{ für die } r^{te} \text{ Zwischenstange.} \end{cases}$$

Sind also die Längen dieser Stäbe $= s_r$ bezw. z_r und ihre Querschnitte $= F_{sr}$ bezw. $= F_{zr}$ so ergiebt sich:

(7) $$\Sigma \frac{S'^2 s}{EF} = \frac{1}{EF_o} \Sigma z_m + \Sigma \frac{s_r \sec^2 \alpha_r}{EF_{sr}} + \Sigma \frac{z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2}{EF_{zr}}.$$

Man darf nun stets die Annahme machen, dass sich der Querschnitt der dritten Gurtung so ändert, dass die Spannung $\sigma = \frac{H \sec \alpha_r}{F_{sr}}$ einen festen Werth annimmt. Erfordert also H den Querschnitt F_b (d. i. der Querschnitt eines wagerechten Gliedes der dritten Gurtung), so wird $F_{sr} = F_b \sec \alpha_r$, und man erhält, wenn man für alle Zwischenstäbe denselben Querschnitt F_z annimmt,

(8) $$\Sigma \frac{S'^2 s}{EF} = \frac{1}{EF_o} \left\{ \Sigma z_m + \frac{F_o}{F_b} \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + \frac{F_o}{F_z} \Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2 \right\}.$$

wo λ_r die Horizontalprojektion von s_r bedeutet (Fig. 255°).

Die Bestimmung der H-Linie geschieht jetzt nach folgender Regel:

Man berechne die Momente M_{w_m} eines mit den Gewichten $w_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2} \frac{F_o}{F_m}$ belasteten einfachen Balkens $A'B'$ (vergleiche

*) Es sind dies die absoluten Werthe. Die unterhalb des Dreieckfachwerks liegende dritte Gurtung (Fig. 255 bis 259) wird gezogen; ist sie nach oben gesprengt, so werden die lothrechten Zwischenstäbe auf Zug beansprucht, sonst auf Druck. Liegt die dritte Gurtung oberhalb des Dreieckfachwerks, Fig. 260, so wird sie gedrückt; die Zwischenstäbe werden dann gezogen.

Fig. 198 bis 200) *und dividire sie durch*

$$(9) \qquad \mathfrak{N} = \Sigma z_m + \frac{F_o}{F_b}\Sigma\lambda_r \sec^2\alpha_r + \frac{F_o}{F_s}\Sigma z_r\,(\operatorname{tg}\alpha_r - \operatorname{tg}\alpha_{r+1})^2,$$

wobei $z_m = y_m w_m$. *Das Ergebniss ist:* $H_m = \frac{M_{wm}}{\mathfrak{N}}$.

Die beiden letzten Glieder des Ausdruckes für $\mathfrak{N}$ sind von verhältnissmässig geringem Einfluss auf H und lassen sich meistens erheblich vereinfachen. Liegen z. B. die Knotenpunkte der dritten Gurtung in einer Parabel mit der Gleichung

$$y_b = 4f_b\frac{x\,(l-x)}{l^2} \quad \text{(Fig. 255)}$$

und folgen auch die Längen z der Zwischenstäbe dem Gesetze:

$$z = 4f_s\frac{x\,(l-x)}{l^2},$$

so darf man stets genügend genau setzen:

$$\Sigma\lambda_r\sec^2\alpha_r = \int_o^l dx\left[1+\left(\frac{dy_b}{dx}\right)^2\right] = l\left[1+\frac{16}{8}\frac{f_b^2}{l^2}\right]$$

$$\Sigma z_r(\operatorname{tg}\alpha_r - \operatorname{tg}\alpha_{r+1})^2 = \lambda_b\Sigma z_r\frac{(\operatorname{tg}\alpha_r - \operatorname{tg}\alpha_{r+1})^2}{\lambda_b} = \lambda_b\int_o^l z\,dx\left[\frac{d\,(\operatorname{tg}\alpha)}{dx}\right]^2$$

$$= \lambda_b\int_o^l z\,dx\left(\frac{d^2y_b}{dx^2}\right)^2 = \lambda_b\left(\frac{8f_b}{l^2}\right)^2\int_o^l z\,dx = \frac{128}{8}\lambda_b\frac{f_b^2 f_s}{l^3},$$

wo λ_b den Mittelwerth der annähernd gleich grossen Feldweiten λ_r bedeutet, und man erhält dann den schnell zu berechnenden Ausdruck:

$$(10) \qquad \mathfrak{N} = \Sigma z_m + \frac{F_o}{F_b}l\left(1+\frac{16}{8}\frac{f_b^2}{l^2}\right) + \frac{128}{8}\frac{F_o}{F_s}\lambda_b\frac{f_b^2 f_s}{l^3}.$$

Für den Fall eines *Zweigelenkbogens mit wagerechter Zugstange* ($f_b = 0$ in Fig. 255) ergiebt sich

$$(11) \qquad \mathfrak{N} = \Sigma z_m + \frac{F_o}{F_b}l,$$

ein Werth, der auch bei geringer Sprengung des Zugbandes genügend genau ist und daher auch für die in den Fig. 256 und 275 dargestellten Träger brauchbar bleibt. Bei Berechnung von Dachbindern dieser Art ist es sogar zulässig, $\mathfrak{N} = \Sigma z_m$ zu setzen, weil ja die Bestimmung des grössten Schneedruckes und besonders des Winddrucks auf einer ziemlich unsicheren Schätzung beruht.

Kürzungen der Werthe w_m und z_m ziehen natürlich auch eine entsprechende Aenderung der beiden letzten Glieder des Ausdruckes $\mathfrak{N}$ nach sich. Nimmt man z. B. bei Untersuchung des in Fig. 261 dargestellten Trägers für alle Obergurtstäbe denselben Querschnitt F_o an und für alle Untergurtstäbe denselben Querschnitt F_u, und setzt man die willkürliche Querschnittsfläche $F_o = F_u$, so empfiehlt es sich, einem Knotenpunkte m der unteren Gurtung das Gewicht

$$(12) \quad \ldots \quad w_m = y_m \left(\text{statt } w_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2} = \frac{y_m \lambda}{h^2} \right)$$

zuzuschreiben und einem oberen Knotenpunkte k das Gewicht:

$$(13) \quad \ldots \quad w_k = y_k \frac{F_o}{F_u} \left(\text{statt } w_k = \frac{y_k \lambda}{h^2} \frac{F_o}{F_u} \right).$$

Diese besonderen Werthe w sind aus den allgemeineren durch Division mit $\lambda : h^2$ erhalten worden, und es müssen daher auch die beiden letzten Glieder von $\mathfrak{N}$ mit $\lambda : h^2$ dividirt werden. Man erhält:

$$(14) \quad \mathfrak{N} = \Sigma y_m^2 + \frac{F_o}{F_u} \Sigma y_k^2 + \frac{h^2}{\lambda} \left[\frac{F_o}{F_b} \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + \frac{F_o}{F_s} \Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2 \right]$$

wofür man stets

$$(15) \quad \mathfrak{N} = \Sigma y_m^2 + \frac{F_o}{F_u} \Sigma y_k^2 + \frac{h^2}{\lambda} \left[\frac{F_o}{F_b} l_b \left(1 + \frac{16}{8} \frac{f_b^2}{l_b^2} \right) + \frac{128}{8} \frac{F_o}{F_s} \lambda \frac{f_b^2}{l_b^2} \right]^*)$$

setzen darf; auch ist es in der Regel erlaubt, das zweite Glied des Klammerausdruckes und den Faktor $\left(1 + \frac{16}{8} \frac{f_b^2}{l_b^2} \right)$ zu streichen. Man erhält dann:

$$(16) \qquad \mathfrak{N} = \Sigma z_m^2 + \frac{F_o}{F_u} \Sigma y_k^2 + \frac{h^2 l_b}{\lambda} \frac{F_o}{F_b}.$$

94. Der Einfluss einer Temperaturänderung auf H ist durch die allgemeine, für jedes einfach statisch unbestimmte Fachwerk gültige Gleichung gegeben:

$$(17) \qquad H_t = \frac{\Sigma S' \varepsilon t s}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}}$$

wo S' die Stabkraft für $H = -1$ ist. Sind ε und t für sämmtliche Stäbe gleich gross, so wird $H_t = 0$; denn setzt man in die dem Span-

*) Für die Stäbe AC und EB, deren Spannkräfte nur von den Stützendrücken abhängen, ergiebt sich $S' = 0$; die dritte Gurtung reicht nur von C bis E. Ihr Pfeil ist $= f_b$, ihre Spannweite $= l_b$.

nungszustande $H = -1$ entsprechende Arbeitsgleichung

$$\Sigma S' \Delta s = 0,$$

welche für beliebige mögliche Δs gilt, $\Delta s = \omega s$, wobei ω eine Konstante ist, d. h. nimmt man an, dass die geänderte Form des Fachwerks der ursprünglichen ähnlich ist, so findet man

$$\Sigma S' s = 0.$$

Wird nun vorausgesetzt, dass sich die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechenden Wärmegrade der Stäbe des Dreieckfachwerks und der Zwischenstäbe um t ändern, diejenigen der dritten Gurtung hingegen um $t + \Delta t$, so erhält man für H_t den Werth

$$H_t = \frac{\varepsilon t \Sigma_I S' s + \varepsilon \Delta t \Sigma_{II} S_r' s_r}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}}$$

wobei sich Σ_I über sämmtliche Stäbe erstreckt, hingegen Σ_{II} nur über die dritte Gurtung. Erstere Summe ist $= 0$, und letztere geht für den Fall einer *gezogenen* dritten Gurtung [wegen $S_r = +H \sec \alpha_r$ und $S_r' = -\sec \alpha_r$] in $-\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r$ über, weshalb sich

$$(18) \quad H = -\frac{\varepsilon \Delta t \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}}$$

$$= -\frac{\varepsilon E F_o \Delta t \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r}{\Sigma z_m + \frac{F_o}{F_b} \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + \frac{F_o}{F_s} \Sigma z_r \left(\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}\right)^2}$$

ergiebt, und hieraus folgt: wird die dritte Gurtung stärker erwärmt als die übrigen Theile des Bogens, so nimmt der Horizontal*zug* ab; im Gegenfalle wächst H um ein positives H_t. Für den in der Fig. 260 dargestellten Träger findet man, dass der Horizontal*druck* H zu- oder abnimmt, je nachdem die dritte Gurtung mehr oder weniger erwärmt wird, als der Versteifungsbalken.

Es ist nun stets zulässig, die Formel (18) durch die einfachere:

$$(19) \qquad H_t = \mp \frac{\varepsilon E F_o l \Delta t}{\Sigma z_m}$$

zu ersetzen; denn, da die Wahl von Δt einer groben Schätzung unterliegt, so hat es natürlich keinen Zweck, die übrigen Glieder allzu peinlich zu berechnen. Für z_m ist in (19) der Werth $z_m = \frac{y_m^2 s_m}{r_m^2} \frac{F_o}{F_m}$ einzuführen. Eine Kürzung der z bedingt auch eine entsprechende Aenderung des Zählers von H_t. Setzt man z. B. für den Träger in

Figur 261, $w_m = y_m$ und $w_k = y_k \frac{F_o}{F_u}$, ferner $z_m = y_m^2$, $z_k = y_k^2 \frac{F_o}{F_u}$, so muss man den Zähler von H_t in Gleich. (19) durch $\frac{s}{r^2} = \frac{\lambda}{h^2}$ dividiren; es ergiebt sich dann:

$$H_t = \mp \frac{\varepsilon E F_o l h^2 \Delta t}{\lambda \left[\Sigma y_m^2 + \frac{F_o}{F_u} \Sigma y_k^2 \right]}. \tag{20}$$

95. Näherungsformeln für den durch einen Balken mit parallelen Gurtungen versteiften Parabelbogen. Wir bezeichnen mit h_o und h_u die Abstände der Gurtungen von der die Bogenenden AB verbindenden wagerechten Geraden, mit y' die auf die Gerade AB bezogene Ordinate des Bogens an der Stelle x; sodann betrachten wir den Bogen als stetig gekrümmt und setzen für eine Einzellast P (unter Vernachlässigung der Dehnung der Hängestangen*):

$$H = P \frac{M_w}{S y^2_m \lambda + \frac{F_o}{F_u} \Sigma y_k^2 \lambda + h^2 \frac{F_o}{F_b} l \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2}\right)}$$

$$= P \frac{M_w}{\int_o^l (y' + h_u)^2 \, dx + \int_o^l (y' - h_o)^2 \, dx + h^2 \frac{F_o}{F_b} l \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2}\right)}$$

$$\text{wobei} - \frac{d^2 M_w}{dx^2} = y_m + y_k \frac{F_o}{F_u} = y' + h_u + (y' - h_o) \frac{F_o}{F_u}$$

$$\text{und } y' = \frac{4 f x (l - x)}{l^2}.$$

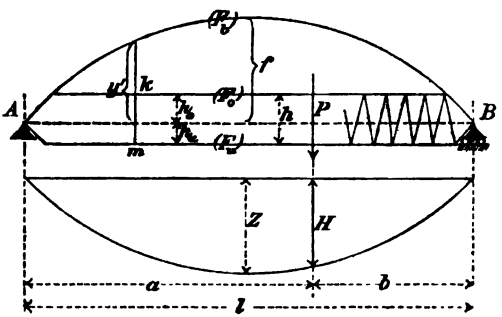


Fig. 262.

*) Dafür wollen wir die Abmessungen l_b und f_b (Fig. 261) durch die grösseren l und f ersetzen.

Man vergleiche die ähnliche Entwicklung in No. 82, Seite 210; in derselben Weise wie dort ergiebt sich

$$(21)\quad \begin{cases} H=\dfrac{5\,P}{8fl^2\omega}\,a\,(l-a)\left[l^2+a\,(l-a)+\dfrac{3}{2}\,\dfrac{l^2}{f}\,\dfrac{h_u F_u-h_o F_o}{F_u+F_o}\right], \text{ wo} \\ \omega=1+\dfrac{5}{2}\,\dfrac{h_u F_u-h_o F_o}{f\,(F_u+F_o)}+\dfrac{15}{8}\,\dfrac{h_u^2 F_u+h_o^2 F_o}{f^2\,(F_u+F_o)}+\dfrac{15}{8}\,\dfrac{h^2}{f^2}\left(1+\dfrac{16}{3}\,\dfrac{f^2}{l^2}\right)\dfrac{F_u F_o}{F_b(F_u+F_o)}. \end{cases}$$

Die hiernach aufgetragene H-Linie weicht nur wenig von einer Parabel ab; sie darf durch eine Parabel von der Pfeilhöhe

$$(22)\quad Z=\frac{3\,Pl}{16f}\,\nu$$

ersetzt werden, wobei

$$(23)\quad \nu=\frac{f\,(F_u+F_o)+1{,}25\,(h_u F_u-h_o F_o)}{f\,(F_u+F_o)+2{,}5\,(h_u F_u-h_o F_o)+\dfrac{15}{8f}\,(h_u^2 F_u+h_o^2 F_o)+\dfrac{15}{8}\,\dfrac{h^2}{f}\left(1+\dfrac{16}{3}\,\dfrac{f^2}{l^2}\right)\dfrac{F_u F_o}{F_b}}$$

ist. Sollen die Längenänderungen der Hängestangen berücksichtigt werden, so tritt im Nenner noch das Glied

$$+\frac{15}{8}\,\frac{h^2}{f}\,\frac{128}{3}\,\frac{F_u F_o}{F_s}\,\frac{\lambda f^3}{l^4}=80\,\frac{h^2\lambda f^2}{l^4}\,\frac{F_u F_o}{F_s}$$

hinzu. Für die in den Figuren 263 und 264 dargestellten Sonderfälle erhält man:

$$(25)\quad \nu=\frac{f\left(\dfrac{F_u}{F_o}+1\right)-1{,}25\,h}{f\left(\dfrac{F_u}{F_o}+1\right)-2{,}5\,h+\dfrac{15}{8}\,\dfrac{h^2}{f}\left[1+\left(1+\dfrac{16}{3}\,\dfrac{f^2}{l^2}\right)\dfrac{F_u}{F_b}\right]}\quad \text{(Fig. 263).}$$

$$(26)\quad \nu=\frac{f\left(\dfrac{F_o}{F_u}+1\right)+1{,}25\,h}{f\left(\dfrac{F_o}{F_u}+1\right)+2{,}5\,h+\dfrac{15}{8}\,\dfrac{h^2}{f}\left[1+\left(1+\dfrac{16}{3}\,\dfrac{f^2}{l^2}\right)\dfrac{F_o}{F_b}\right]}\quad \text{(Fig. 264).}$$

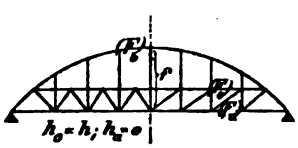


Fig. 263.

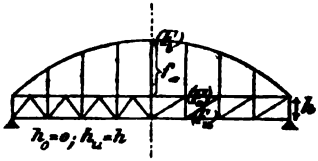


Fig. 264.

In Folge einer von B aus um die Strecke ξ vorgeschobenen gleichförmigen Belastung p entsteht:

$$(27)\quad H=\frac{p\,l^2}{8f}\,\nu\,\frac{\xi^2}{l^2}\left(3-2\,\frac{\xi}{l}\right)^{*)}$$

*) Vergl. Seite 239, Gleichung 46.

Der Einfluss einer den ganzen Träger bedeckenden gleichförmigen Belastung ist:

$$H_p = \frac{p l^2}{8 f} \nu. \tag{28}$$

Die ständige Belastung erzeugt:

$$H_g = \frac{g l^2}{8 f} \nu. \tag{29}$$

In Folge einer Temperaturänderung entsteht:

$$H_t = \frac{15}{8} \frac{h^2}{f} \frac{\varepsilon E F_o F_u \Delta t \nu}{f (F_o + F_u) + 1{,}25 (h_u F_u - h_o F_o)} \text{ *)} \tag{30}$$

wobei zu beachten ist, dass der Horizontal*druck* H in der dritten Gurtung vergrössert wird, sobald diese Gurtung um Δt mehr erwärmt wird als die übrigen Theile des Fachwerks.

Für den Fall einer *gleichförmigen* ständigen und beweglichen Belastung lassen sich sehr einfache Formeln gewinnen, welche den in No. 91 für den Zweigelenkbogen abgeleiteten ähnlich sind.

1. *Angriffsmomente.* Wäre $H = 0$, so würde sich für den Knotenpunkt u (Fig. 265) in Folge der ständigen Belastung das Angriffsmoment $M_g^u = g \frac{x x'}{2}$ ergeben, und es entsteht daher mit Berücksichtigung von $H_g = \frac{g l^2}{8 f} \nu$ das Moment:

$$M_g^u = g \frac{x x'}{2} - \frac{g l^2}{8 f} \nu (y' + h_u), \tag{31}$$

woraus, wegen $y' = 4 f \frac{x x'}{l^2}$, nach Division durch h **)

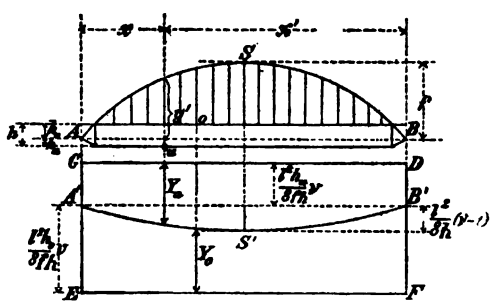


Fig. 265.

*) Abgeleitet aus $H_t = \frac{15 \varepsilon E \Delta t h^2 F_o F_u}{8 f^2 (F_o + F_u) \omega}$, welche Formel der Gleichung (25) auf Seite 211 entspricht.

**) Wir berechnen die $\frac{M}{h}$, weil die Spannkräfte in den Gurtstäben diesen Werthen proportional sind.

$$\frac{M_g^u}{h} = -\frac{gl^2}{8fh}\nu h_u - g\frac{xx'}{2h}(\nu - 1). \tag{32}$$

Ebenso erhält man für einen Knotenpunkt der oberen Gurtung:

$$\frac{M_g^o}{h} = \frac{gl^2}{8fh}\nu h_o - g\frac{xx'}{2h}(\nu - 1). \tag{33}$$

Zeichnet man also eine Parabel $A'S'B'$, deren Pfeil $= \frac{l^2}{8h}(\nu - 1)$ ist, zieht die zu $A'B'$ parallelen Geraden CD und EF in den Abständen $\frac{l^2 \nu h_u}{8fh}$ bezw. $\frac{l^2 \nu h_o}{8fh}$ von der $A'B'$, und misst entsprechend u und o die Abstände Y_u und Y_o der Parabel von jenen Geraden, so findet man

$$\frac{M_g^u}{h} = -gY_u, \quad \frac{M_g^o}{h} = +gY_u, \tag{34}$$

denn die auf $A'B'$ bezogene Ordinate der Parabel an der Stelle x ist $= \frac{4}{l^2} \cdot \frac{l^2(\nu-1)}{8h} xx' = \frac{xx'(\nu-1)}{2h}$. Figur 265 setzt voraus, dass $\nu > 1$ ist. Ergiebt sich $\nu < 1$, so liegt S' oberhalb $A'B'$.

Behufs Ermittlung von M^u_p bringen wir die untere Gurtung des Versteifungsbalkens in A_u und B_u mit den Auflagersenkrechten zum Schnitt, bestimmen den lothrecht über u gelegenen Punkt u' des Bogens und folgern aus der Gleich. $M^u = M_o - Hy_u$, in welcher M_o das Moment für den Querschnitt x eines einfachen Balkens bedeutet, dass M_u dieselbe Form hat wie das Moment für den Punkt u' eines in den Punkten A_u und B_u gestützten Zweigelenkbogens. Diesem Zweigelenkbogen muss natürlich der für den versteiften Bogen gefundene Werth ν (Gleich. 23, Seite 252) zugeschrieben werden. Die Kämpferdrucklinie ist eine Wagerechte im Abstande $\frac{4f}{8\nu}$ von der A_uB_u und werde von den Geraden A_uu' und B_uu' in Punkten E, E' geschnitten, deren Abstände von den Auflagersenkrechten ξ_u und ξ_u' sind, Fig. 266.

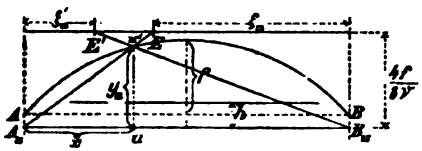


Fig. 266.

Dann ergiebt sich $\frac{\min M^u_p}{h} = -pC_u$, wo

$$C_u = \frac{y_u(\xi_u^3 + \xi_u'^3)\nu}{8flh}. \tag{35}$$

Die beiden Grenzwerthe von $M^u : h$ sind nun

$$\begin{cases} \frac{\min M_u}{h} = -gY_u - pC_u \\ \frac{\max M_u}{h} = -gY_u + pC \end{cases} \tag{36}$$

und ebenso ergiebt sich:

$$(37)\qquad \begin{cases} \frac{\min M^o}{h} = +gY_o - pC_o \\ \frac{\max M^o}{h} = +qY_o + pC_o, \text{ wo} \end{cases}$$

$$(38)\qquad C_o = \frac{y_o(\xi_o^3 + \xi_o'^3)\nu}{8flh}.$$

Die Ermittlung von ξ_o und ξ_o' zeigt die ohne weitere Erklärung verständliche Figur 267. Liegt E' links von A, so ist $\xi' = 0$ zu setzen, hingegen $\xi = 0$, wenn E rechts von B fällt. — Durch die vorstehenden Formeln sind die Spannkräfte in den Gurtungen bestimmt.

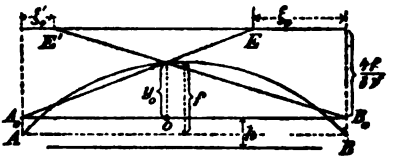


Fig. 267.

2. Querkräfte. Wird zunächst $H_g = 0$ angenommen, so entstehen Momente M_{og}, welche gleich den Ordinaten eines in eine Parabel vom Pfeil $\frac{gl^2}{8}$ eingeschriebenen Polygons sind und für das m^{te} Feld ergiebt sich die Querkraft:

$$Q_{omg} = \frac{M_{omg} - M_{o(m-1)g}}{\lambda} = \operatorname{tg}\beta_m. \quad \text{Fig. 268.}$$

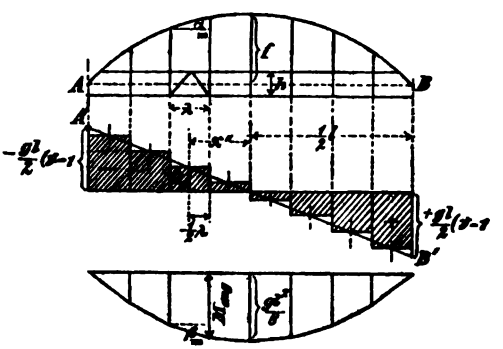


Fig. 268.

Mit Berücksichtigung von H_g erhält man also:

$$Q_{mg} = Q_{omg} - H_g \operatorname{tg}\alpha_m = \operatorname{tg}\beta_m - \frac{gl^2}{8f}\nu \operatorname{tg}\alpha_m$$

und wegen $\operatorname{tg}\alpha_m : \operatorname{tg}\beta_m = f : \frac{gl^2}{8}$,

$$(39)\qquad Q_{mg} = -Q_{omg}(\nu - 1).$$

Man hat also nur nöthig, die im ersten Bande Seite 128 für die Querkräfte Q_{og} des einfachen Balkens gewonnenen Werthe mit $-(\nu - 1)$ zu mul-

tipliciren und gelangt zu der in Fig. 268 dargestellten Querkraftsfläche. Will man rechnen, so setze man

(40) $$Q_{m\,g} = -\,g\,x_m''\,(\nu - 1).$$

Die Bestimmung des Einflusses der beweglichen Belastung p geschieht sehr übersichtlich wie folgt.

Im Abstande $\frac{4f}{3\nu}$ von der AB wird die Wagerechte $A'B'$ gezogen, und durch A eine Parallele zum m^{ten} Stabe ($F'F''$) der dritten Gurtung gelegt (Fig. 269), welche die $A'B'$ in E schneidet. Eine durch E gehende Last P erzeugt — eine stetig gekrümmte H-Linie vorausgesetzt —

$$H = \frac{3\,Pab}{4fl}\,\nu = \frac{Pb}{l}\,\frac{a}{\frac{4f}{3\nu}} = \frac{Pb}{l}\,\operatorname{cotg}\alpha_m = A\,\operatorname{cotg}\alpha_m$$

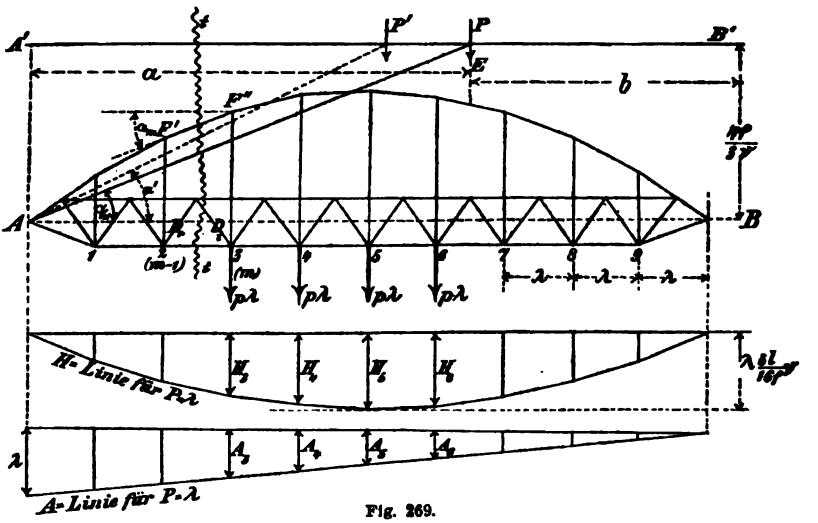


Fig. 269.

und bringt die Querkraft

$$Q_m = A - H\,\operatorname{tg}\alpha_m = 0$$

hervor. Eine links von E liegende Last P' verursacht $H = A\,\operatorname{cotg}\alpha'$ und die Querkraft $Q_m = A - A\,\operatorname{cotg}\alpha'\,\operatorname{tg}\alpha_m = A\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha_m}{\operatorname{tg}\alpha'}\right)$, welche positiv ist, weil $\operatorname{tg}\alpha_m < \operatorname{tg}\alpha'$ ist, während Lasten rechts von E negative Querkräfte Q_m erzeugen. Liegt aber P links von $m-1$, so entsteht

$$Q_m = A - P - H\,\operatorname{tg}\alpha_m = -\,B - H\,\operatorname{tg}\alpha_m$$

und hieraus darf man schliessen, dass zur Erzielung von $_{max}Q_{m\,p}$ nur die zwischen dem Schnitte tt und der Senkrechten durch E gelegenen Knotenpunkte (mit je $p\lambda$) zu belasten sind.*) Zeichnet man nun die Einflusslinie für H und A

*) Wir machen die zweckmässige (etwas zu ungünstige) Annahme fester Knotenlasten $p\gamma$. Vergl. Band I Seite 118.

unter der Voraussetzung, dass sich über den Träger die Last $1 \cdot \lambda$ bewegt und addirt die unter den belasteten Knotenpunkten gemessenen Ordinaten H und A, so erhält man

$$_{max}Q_{m,p} = (\Sigma A - \operatorname{tg} \alpha_m \Sigma H)\, p,$$

wobei in dem in der Fig. 269 dargestellten Falle

$$\Sigma A = A_3 + A_4 + A_5 + A_6; \quad \Sigma H = H_3 + H_4 + H_5 + H_6$$

ist. Die beiden Grenzwerthe von Q sind nun

$$_{max}Q_m = -g x_m'' (\nu - 1) + p (\Sigma A - \operatorname{tg} \alpha_m \Sigma H)$$
$$_{min}Q_m = -q x_m'' (\nu - 1) - p (\Sigma A - \operatorname{tg} \alpha_m \Sigma H);$$

durch dieselben sind die Spannkräfte der beiden Diagonalen D_r und D_l bestimmt.

Die vorstehend abgeleiteten Formeln lassen sich auch zur Berechnung der Spannkräfte des in der Fig. 270 dargestellten Trägers benutzen. In den Gleichungen (31) bis (30) zur Bestimmung von H muss nun h_e mit h_w vertauschen, F_e mit F_w.

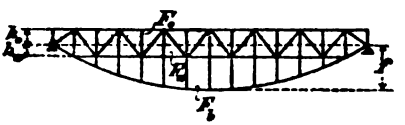


Fig. 270.

96. Zahlenbeispiel. Es soll die H-Linie des in Fig. 271 dargestellten Trägers zunächst angenähert, sodann aber mit Berücksichtigung der Längenänderungen sämmtlicher Stäbe ermittelt werden. Die Knotenpunkte der dritten Gurtung liegen in einer Parabel, deren Pfeil $f = 6{,}12^m$ ist.**)

1. *Vernachlässigung der Längenänderungen der Füllungsstäbe.* Die Gewichte w der einzelnen Knotenpunkte des Versteifungsbalkens sind nach den Gleich. (12) und (13) zu berechnen, worauf $\mathfrak{N}$ durch Gleich. (16) und H durch die Formel

$$H = P \frac{M_w}{\mathfrak{N}}$$

bestimmt ist. Geschätzt seien: $\frac{F_o}{F_u} = 0{,}37$; $\frac{F_o}{F_b} = 0{,}40$. Man erhält

für einen unteren Knoten m; $w_m = y_m$

für einen oberen Knoten k; $w_k = y_k \frac{F_o}{F_u} = 0{,}37\ y_k$,

und wenn die den Knoten 1, 3, 5, 7, ... entsprechenden w auf die Angriffspunkte 2, 4, 6, ... der Querträger vertheilt werden:

$$w_2 = 1{,}87 + \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}435 \cdot 0{,}37 = 2{,}14$$
$$w_4 = \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}435 \cdot 0{,}37 + 3{,}40 + \tfrac{1}{2} \cdot 2{,}795 \cdot 0{,}37 = 4{,}18$$
$$w_6 = \tfrac{1}{2} \cdot 2{,}795 \cdot 0{,}37 + 4{,}59 + \tfrac{1}{2} \cdot 3{,}815 \cdot 0{,}37 = 5{,}80$$
$$w_8 = \tfrac{1}{2} \cdot 3{,}815 \cdot 0{,}37 + 5{,}44 + \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}495 \cdot 0{,}37 = 6.95$$
$$w_{10} = \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}495 \cdot 0{,}37 + 5{,}95 + \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}885 \cdot 0.37 = 7{,}64$$
$$w_{12} = \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}885 \cdot 0{,}37 + 6{,}12 + \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}885 \cdot 0{,}37 = 7{,}88$$

---

*) Figur 271 stellt den Hauptträger einer 1889 in *Hannover* nach den Plänen des Verfassers erbauten *Strassenbrücke über die Ihme* dar.

Die Angriffsmomente M_w des mit diesen Gewichten w belasteten Balkens $A'B'$ sind, wenn die Feldweite $\lambda = 1$ gesetzt wird:*)

$M_{w_2} = 30{,}65$	$M_{w_6} = 83{,}49$	$M_{w_{10}} = 113{,}60$
$M_{w_4} = 59{,}16$	$M_{w_8} = 102{,}02$	$M_{w_{12}} = 117{,}54$

Nun findet man:

$$\mathfrak{N} = \Sigma y_m^2 + \frac{F_o}{F_w}\Sigma y_b^2 + \frac{h^2 l_b}{\lambda}\frac{F_o}{F_b} = 2(1{,}87^2 + 3{,}40^2 + 4{,}59^2 + 5{,}44^2 + 5{,}95^2) + 6{,}12^2$$

$$+ 0{,}87 \cdot 2(1{,}435^2 + 2{,}795^2 + 3{,}815^2 + 4{,}495^2 + 4{,}835^2) + \frac{1{,}2^2 \cdot 33{,}5}{3{,}125}\,0{,}40 = 296{,}20$$

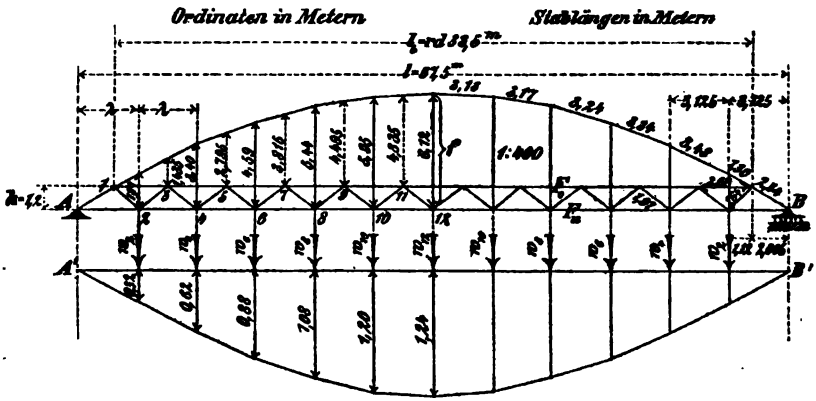


Fig. 271.

und (da die M_w vorhin für $\lambda = 1$ berechnet worden sind) mit $P = 1$:

$$H = \frac{M_w \cdot \lambda}{296{,}20} = \frac{M_w \cdot 3{,}125}{296{,}20} = \frac{M_w}{94{,}78}, \text{ also}$$

$$H_2 = \frac{30{,}65}{94{,}78} = 0{,}32;\ H_4 = 0{,}62;\ H_6 = 0{,}88;\ H_8 = 1{,}08;\ H_{10} = 1{,}20;\ H_{12} = 1{,}24.$$

2. *Berücksichtigung der Längenänderungen sämmtlicher Stäbe.* Die Inhalte der Stabquerschnitte (ohne Abzug für Nietlöcher) sind in Fig. 272 zusammengestellt worden. Zur Ermittlung der H-Linie soll Gleichung (V) auf Seite 163 benutzt werden. Dieselbe liefert

$$H_m = P_m \frac{\delta_m}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}}$$

wo S' die Stabkraft in Folge $H = -1$ und δ_m die durch diesen Belastungszustand verursachte lothrechte Verschiebung des Knotenpunktes m bedeutet. Die Summe Σ umfasst sämmtliche Stäbe des Fachwerks. Den Kräfteplan für $H = -1$ zeigt Fig. 273a. Man denke sich in den Stäben der dritten Gurtung

*) Vergl. Seite 203. Die rechnerische Bestimmung der M_w ist der zeichnerischen Ermittlung unbedingt vorzuziehen.

Zugkräfte S'_1, S'_2, . . . hervorgerufen, deren wagerechte Seitenkraft $= 1$ ist, bestimme die in den lothrechten Zwischenstäben hierdurch erzeugten Drücke, $S' = Z'$ (welche beim Parabelbogen von gleicher Feldweite den konstanten Werth $-\frac{8f\lambda}{l^2} = -\frac{8 \cdot 6{,}12}{37{,}5 \cdot 12} = -0{,}11$ annehmen) und zeichne hierauf für den mit den Kräften S'_1 und Z' belasteten Versteifungsbalken einen Cremona'schen Plan.

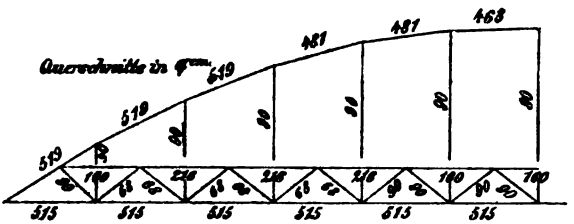


Fig. 272.

Die Ergebnisse sind in die Fig. 273b eingeschrieben, ebenso (in Klammern) die den Stäben der dritten Gurtung entsprechenden Werthe $\frac{S'^2 s}{EF}$. Bei Berechnung der letzteren wurde die für alle Stäbe gleiche Elasticitätsziffer E, deren Grösse auf das Verhältniss $\delta_{mm} : \Sigma \frac{S'^2 s}{EF}$ ohne Einfluss ist, $= 1$ gesetzt. Als Einheiten wurden die Tonne und das *cm* gewählt, so dass sich beispielsweise für das dritte Feld der Werth

$$\frac{S'^2 s}{EF} = \frac{1{,}07^2 \cdot 334}{1 \cdot 519} = 0{,}738$$

ergab.

Jetzt wurden für den Zustand $H = -1$ die Längenänderungen $\Delta s = \frac{S' s}{EF}$ der Stäbe des Versteifungsbalkens berechnet und in Fig. 274*) zusammengestellt (nicht eingeklammerte Zahlen), desgleichen die Werthe $\frac{S'^2 s}{EF} = S' \Delta s$ (eingeklammerte Zahlen). Für den zweiten Untergurtstab wurden z. B. erhalten:

$$\Delta s = \frac{1{,}20 \cdot 312{,}5}{1 \cdot 515} = 0{,}7282 = 0{,}73 \text{ und } S' \Delta s = 1{,}20 \cdot 0{,}7282 = 0{,}874.^{**})$$

Die Durchbiegungen δ_{mm} lassen sich als Momente M_w eines einfachen Balkens $A'B'$ (Fig. 271) deuten, welcher mit Gewichten w belastet wird, zu deren Berechnung die Gleichungen (6) und (7) auf Seite 105 dienen. Wegen $\sec \varphi_1 = \frac{1{,}64}{1{,}12} = 1{,}46$ und $\sec \varphi = \frac{1{,}97}{\frac{1}{2} \cdot 3{,}125} = 1{,}26$ ergeben sich, wenn die

*) Diese Figur ist verzerrt gezeichnet worden, um Platz für die Zahlen zu gewinnen.

**) Die Stablängen (in Metern) sind in Fig. 271 angegeben.

überall gleiche Abmessung h zunächst $= 1$ gesetzt wird, für die unteren Knoten die Werthe:

$$w_2 = 2{,}61 + 1{,}49 \cdot 1{,}46 - 2{,}32 \cdot 1{,}26 = 1{,}8622$$
$$w_4 = 4{,}09 + (2{,}32 - 1{,}83) \cdot 1{,}26 = 4{,}7074$$
$$w_6 = 5{,}54 + (1{,}83 - 1{,}30) \cdot 1{,}26 = 6{,}2078$$
$$w_8 = 6{,}55 + (1{,}30 - 0{,}59) \cdot 1{,}26 = 7{,}4446$$
$$w_{10} = 9{,}69 + (0{,}59 - 0{,}20) \cdot 1{,}26 = 10{,}1814$$
$$w_{12} = 9{,}96 + (0{,}20 + 0{,}20) \cdot 1{,}26 = 10{,}4640$$

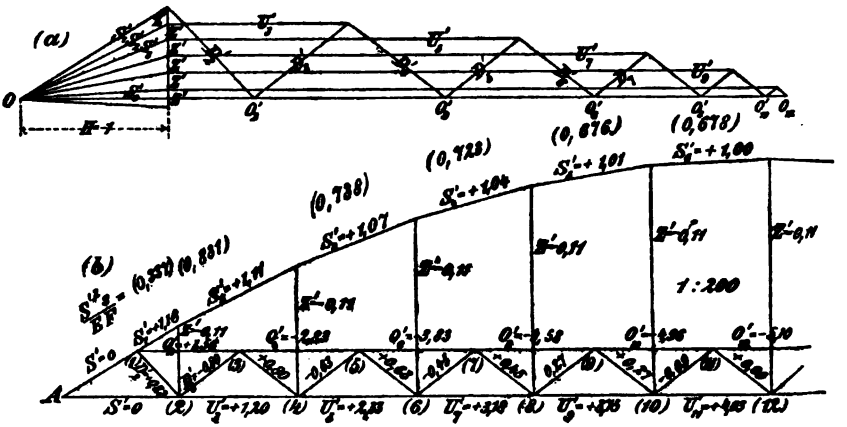


Fig. 273.

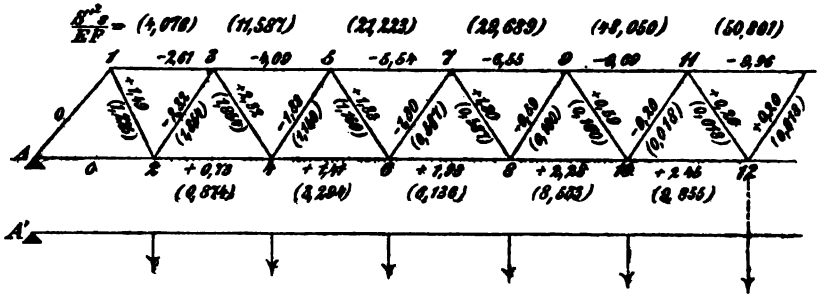


Fig. 274.

und für die oberen Knotenpunkte:

$$w_1 = -1{,}49 \cdot 1{,}46 = -2{,}18 \qquad w_7 = 1{,}93$$
$$w_3 = 0{,}78\ ^*) \qquad w_9 = 2{,}28$$
$$w_5 = 1{,}41 \qquad w_{11} = 2{,}45.$$

*) An jedem Knoten 3, 5, 7, ... greifen zwei Diagonalen an, deren Längenänderungen entgegengesetzt gleich sind und sich daher tilgen.

Werden die Gewichte der oberen Knoten auf die Querträger-Angriffspunkte 2, 4, 6, . . . vertheilt, so erhält man für diese letzteren die Gewichte:

$$w_2 = 1{,}8622 - 2{,}18\,\frac{2{,}005}{3{,}125} + \tfrac{1}{2}\,0{,}73 = 0{,}83 \qquad w_8 = 7{,}4416 + \tfrac{1}{2}\,(1{,}93 + 2{,}28) = 9{,}55$$

$$w_4 = 4{,}7074 + \tfrac{1}{2}\,(0{,}73 + 1{,}41) = 5{,}78 \qquad w_{10} = 10{,}1814 + \tfrac{1}{2}\,(2{,}28 + 2{,}45) = 12{,}55$$

$$w_6 = 6{,}2078 + \tfrac{1}{2}\,(1{,}41 + 1{,}93) = 7{,}88 \qquad w_{12} = 10{,}4640 + \tfrac{1}{2}\,(2{,}45 + 2{,}45) = 12{,}91,$$

denselben entsprechen mit $\lambda = 1$ die Momente:

$$M_{w_2} = 43{,}045 \qquad M_{w_6} = 121{,}695 \qquad M_{w_{10}} = 169{,}255$$

$$M_{w_4} = 85{,}260 \qquad M_{w_8} = 150{,}250 \qquad M_{w_{12}} = 175{,}710.$$

Die Zusammenzählung der in die Figuren 273 und 274 eingeschriebenen (eingeklammerten) Werthe $\frac{S'^2 s}{EF}$ giebt für beide Trägerhälften:

$$\Sigma \frac{S'^2 s}{EF} = 362{,}937$$

und hierzu tritt noch für die Hängestangen, für welche durchweg $S' = -0{,}11$ und $F = +90$ *qcm* ist, das Glied:

$$\frac{0{,}11^2 \cdot}{1 \cdot 90}\,[2\,(1{,}87 + 3{,}40 + 4{,}59 + 5{,}44 + 5{,}95) + 6{,}12] = 0{,}00654\,^*)$$

weshalb

$$\Sigma \frac{S'^2 s}{EF} = 362{,}937 + 0{,}654 = 363{,}59.$$

Da nun bei Berechnung der M_w sowohl $h = 1$ als auch $\lambda = 1$ gesetzt wurde, so folgt jetzt für $P = 1$

$$H = \frac{M_w}{363{,}59} \cdot \frac{\lambda}{h} = \frac{M_w \cdot 312{,}5}{363{,}59 \cdot 120} = \frac{M_w}{139{,}62}, \text{ also}$$

$$H_2 = \frac{43{,}045}{139{,}62} = 0{,}31;\quad H_4 = 0{,}61;\quad H_6 = 0{,}87;\quad H_8 = 1{,}08;\quad H_{10} = 1{,}21;\quad H_{12} = 1{,}26.$$

Diese genaueren Werthe weichen von den vorhin berechneten nur unwesentlich ab.

Wir empfehlen dem Leser, zur Uebung die δ_m-Linie noch mit Hilfe eines Williot'schen Planes oder mittels des Stabzugverfahrens zu bestimmen.

97. Einfluss schräger Lasten. Wir schliessen diesen § mit einer Untersuchung des Einflusses schräger Lasten auf einen Zweigelenkbogen mit gesprengter Zugstange (Dachbinder) und machen auf diejenigen Annahmen aufmerksam, welche zur Vereinfachung des im § 5 erledigten strengeren Verfahrens gemacht werden dürfen. Der allgemeine Ausdruck für H in Folge einer Einzellast P_m ist (nach der ersten der Gleichungen V auf Seite 163):

$$(41) \qquad H = P_m \frac{\delta'_m}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}},$$

*) Man übersieht hier recht deutlich den geringen Einfluss dieses Gliedes.

worin S' die dem Zustande $H = -1$ entsprechende Spannkraft irgend eines Stabes des Fachwerks ist, und δ_m' die Verschiebung bedeutet, welche der Angriffspunkt m der Last P_m im Sinne von P_m erfährt, sobald nur die Ursache $H = -1$ wirkt. Die Ermittlung der Verschiebungen δ', die in Fig. 275 mit Hilfe eines Williotschen Planes erfolgte, darf stets unter der Voraussetzung starrer Füllungsstäbe durchgeführt werden; auch ist es zulässig, sämmtlichen Gurtstäben denselben

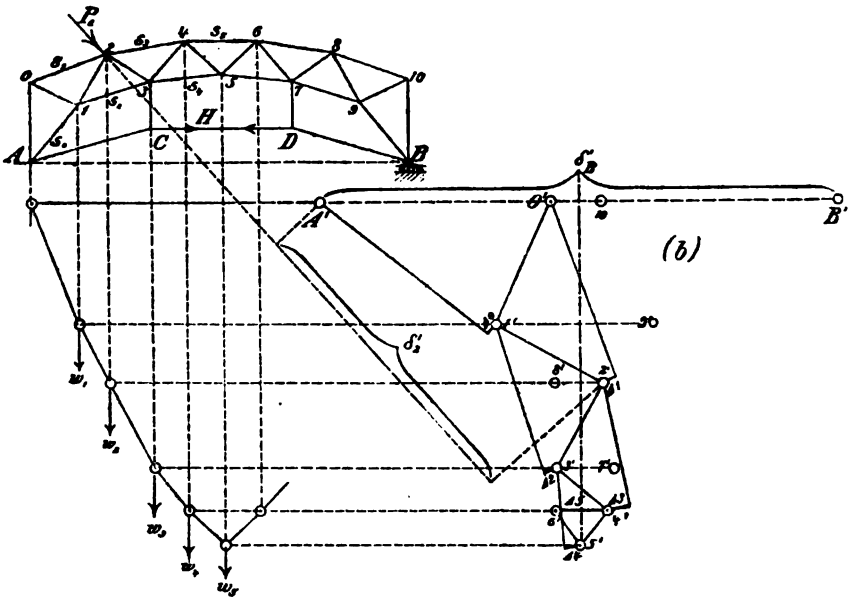


Fig. 275.

Querschnitt F_o zuzuschreiben. Setzt man dann bei der Berechnung der Längenänderungen $\Delta s = \frac{S' s}{E F_s}$ der Gurtstäbe sowohl $E = 1$ als auch $F_o = 1$, so muss man in Gleich. (41) den Nenner durch den Werth $\Sigma S'^2 s \frac{F_o}{F}$ ersetzen. In Fig. 275 liegt ein symmetrischer Träger vor. Es wurde bei Aufzeichnung des Verschiebungsplanes zunächst der Mittelpunkt und die Richtung des Stabes s_5 als festliegend angesehen hierauf $6'4' = \Delta 5$*) gemacht und $5'4' \perp 54$, $5'6' \perp 56$ gezogen.

*) Wir erinnern an die Bezeichnung $\Delta s_5 = \Delta 5$.

Die Anschliessung der Punkte 3′, 1′, 0′, A' erfolgte nach No. 32. — Die Punkte 8′, 10′, B' liegen in Bezug auf die Senkrechte durch 5′ symmetrisch zu 2′, 1′, A'; und ebenso würde man, falls auch in den Knoten 1, 3, 5, 7, 9, C, D Lasten angreifen sollten, die symmetrisch zu 3′ und 1′ gelegenen Punkte 7′, 9′, eintragen und endlich C', D', welche in Fig. 275 fortgelassen sind, bestimmen. Behufs Erfüllung der wirklichen Auflagerbedingungen musste schliesslich der Verschiebungspol aus dem Mittelpunkte von Δ5 in den dem festen Auflager A entsprechenden Punkte A' gelegt werden, worauf sich beispielsweise die Verschiebung δ_2' des Knotens 2 im Sinne von P_2 gleich der Projektion des Strahles $A'2'$ und die Richtung von P_2 ergab.*)

Wären nun Zugstange und Zwischenstäbe nicht vorhanden, so würde sich

$$\Sigma S'^2 s \frac{F_o}{F} = \delta_B' = \overline{A'B'}$$

ergeben, d. h. gleich der Verschiebung, welche B in Folge des Belastungszustandes $H = -1$ erfährt. Im vorliegenden Falle ist aber

$$\Sigma S'^2 s \frac{F_o}{F} = \delta_B' + \Sigma_s S'^2 s \frac{F_o}{F},$$

wobei sich das Zeichen Σ_s über die Glieder der Zugstange und die Zwischenstäbe erstreckt und hierfür darf stets

$$\Sigma S'^2 s \frac{F_o}{F} = \delta_B' + l \frac{F_o}{F_b}$$

gesetzt werden,**) womit sich

$$H = P_m \frac{\delta_m'}{\delta_B' + l \frac{F_o}{F_b}}$$

ergiebt, oder, falls man die Lasteinheit durch eine Strecke von der Länge $\delta_B' + l \frac{F_o}{F_b}$ darstellt,

$$H = P_m \delta_m'.$$

Will man die Punkte 5′, 6′, 4′, . . . in Fig. 275[b] aus der nach No. 93 für die lothrechte Lastenrichtung ermittelten Biegungslinie ableiten, was manchmal vortheilhaft ist, so beachte man die Beziehung:

---

*) Die bei unsymmetrischem Träger nach No. 33, Seite 61, zu zeichnende Figur A'' 0″ 1″ . . . B'' schrumpft hier zu einem mit A' sich deckenden Punkte zusammen.

**) Vergl. Seite 248, Gleich. (11).

$w_m = \frac{\Delta s_m}{r_m}$ (*absolut genommen*). Hat man also die Gewichte w nicht mittels der Gleichungen auf Seite 247 berechnet, sondern von den später gezeigten Vereinfachungen Gebrauch gemacht, so muss man bei Aufzeichnung des Linienzuges 5′, 4′, 2′, 0′, 1′, A' die Längenänderungen $\Delta s = wr$ auftragen und auch das Glied $l \frac{F_o}{F_b}$ entsprechend ändern. Liegt z. B. ein Sichelträger vor und wird nach Seite 200 das Gewicht $w_m = \frac{y_m}{r_m^2}$ $\left(\text{statt } \frac{y_m s_m}{r_m^2}\right)$ eingeführt, so folgt für den dem Knoten m gegenüberliegenden Gurtstab: $\Delta s_m = \frac{y_m}{r_m}$ und es muss $\frac{l}{s_o}\frac{F_o}{F_b}$ an die Stelle von $l\frac{F_o}{F_b}$ treten, wo s_o die mittlere Gurtstablänge bedeutet. Sind sämmtliche Füllungsstäbe mit Ausnahme eines etwa vorhandenen Endständers gegen die Lothrechte geneigt, so bestimme man 4′, 3′, 2′, 0′, indem man 5′ — 4′ ⊥ 5—4, 4′—3′ ⊥ 4—3, 3′—2′ ⊥ 3—2, 2′—1′ ⊥ 2—1 und 1′—0′ ⊥ 1—0 zieht, worauf A' am schnellsten mit Hilfe von $\Delta s_o = \Delta 0$ festgelegt wird.

Schliesslich sei noch daran erinnert, dass sich die Punkte 4′, 2′, 0′, A' auch nach dem Stabzugverfahren ermitteln lassen, wie das in No. 85 durchgeführte Zahlenbeispiel gezeigt hat.

Wird die Zugstange durch geneigte Stäbe mit dem Fachwerkbogen verbunden, Fig. 276*), so führe man die Spannkraft X irgend eines

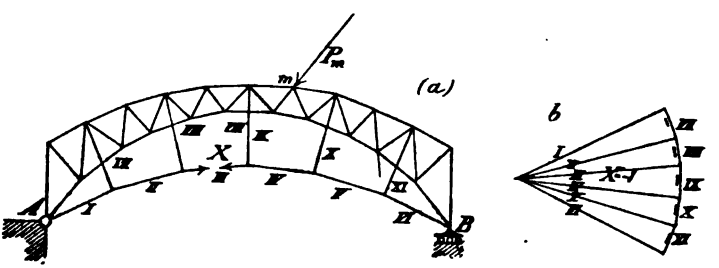


Fig. 276.

Gliedes derselben als statisch nicht bestimmbare Grösse ein, ermittle die von der Ursache $X = -1$ hervorgerufenen Spannkräfte und Längenänderungen und zeichne — wie in Figur 275 — einen Williotschen Verschiebungsplan. Die Bestimmung der S' für die Glieder der Zug-

*) In dieser Weise sind z. B. die Dachbinder der Queens-Street-Station der North British R. in Glasgow angeordnet.

stange und für die Zwischenstäbe hat hierbei nach Fig. 276[b] zu erfolgen.*) Zu betonen ist, dass alle vorhin als zulässig bezeichneten Annahmen auch für den Fall schräger Hängestangen statthaft sind; die Berechnung von X darf dann bei der üblichen geringen Sprengung der Zugstange mittels der Formel

$$X = P_m \frac{\delta_m'}{\delta_B' + l\frac{F_o}{F_b}} \quad \text{(vergl. Seite 268)}$$

erfolgen.

Hinsichtlich der bei der Berechnung von Dachbindern in Betracht zu ziehenden Belastungsfälle wird auf Band I, § 39 verwiesen.

§ 9.

Kette, versteift durch einen Fachwerkbalken.

98. Eine sehr wichtige Trägerart, deren Berechnung sich von der Untersuchung der im vorigen § behandelten Stabgebilde nur wenig unterscheidet, ist die in Fig. 277 dargestellte, durch einen einfachen Balken versteifte Kette. Bei R und T seien auf wagerechter Bahn geführte Auflager angeordnet; die Hängestangen seien lothrecht.

Da es zweckmässig ist, den Versteifungsbalken nur durch die bewegliche Belastung zu beanspruchen, so wird man das Bauwerk zunächst als unversteifte Kettenbrücke ausführen und die Dreiecke des Versteifungsbalkens erst dann schliessen, wenn die Kettenglieder und die Hängestangen die der ständigen Belastung entsprechenden Längenänderungen erfahren haben.

Die Aufsuchung der Form der meistens durch drei angenommene Punkte R, W, T geführten Kette und die Ermittlung der Spannkräfte in Folge der ständigen Belastung ist bereits im I. Bande (S. 404—408) unseres Buches beschrieben worden, und wir fügen nur noch hinzu, dass auf dem dort angegebenen Wege die Gestalt der durch die ständige Belastung *gespannten* Kette — nicht diejenige der *spannungslosen* — gefunden wird, dass also die Längen, welche den Kettengliedern und Hängestangen in der Werkstatt zu geben sind, $= s - \frac{S_g s}{EF}$ sein müssen,

*) Die Unterschiede in den Spannkräften der einzelnen Glieder werden stets gering sein; durch entsprechende Neigung der Hängestangen lässt sich sogar erreichen, dass in allen Theilen der Zugstange dieselbe Spannkraft X auftritt.

wenn allgemein s die Länge des fraglichen Stabes auf Grund der erwähnten Formbestimmung und S_g die Spannkraft in Folge der ständigen Belastung bedeutet. Dass ausserdem noch der Unterschied zwischen Aufstellungs- und Werkstattstemperatur berücksichtigt werden muss, ist selbstverständlich, ebenso dass bei Bemessung der Pfeilerhöhen der Verkürzung Rechnung zu tragen ist, welche die Pfeiler in Folge der ständigen Belastung erfahren werden.

Wird nur ein Theil (g_v) der ständigen Belastung (g) *vor* Ausführung der Versteifung aufgebracht, der Rest (g_n) erst *nach* Einfügung des Balkens, so ist in der vorstehenden Betrachtung S_{g_v} an die Stelle von S_g zu setzen. Die beschriebene Formbestimmung liefert die Gestalt der mit g_v belasteten Kette und der Einfluss von g_n muss, ebenso wie derjenige der beweglichen Belastung, nach den in den folgenden Untersuchungen abgeleiteten Verfahren festgestellt werden.

Andererseits könnte man aber auch ausser der gesammten ständigen Belastung (g) noch eine Belastung g' auf die unversteifte Brücke bringen und nach Vollendung des Versteifungsbalkens wieder entfernen. Es würde dann, bei Untersuchung der nach der Versteifung hinzutretenden Lasten, g' als eine negative Belastung aufzufassen sein.

Aehnliche Verhältnisse lassen sich natürlich bei jedem statisch unbestimmten Träger herbeiführen. So könnte man z. B. einen Zweigelenkbogen zunächst mit Scheitelgelenk ausführen und dieses Gelenk nach Aufbringung der gesammten ständigen Belastung g oder eines Theiles von g vernichten; auch eine später wieder zu beseitigende Belastung g' könnte zuweilen von Vortheil sein.

Die Untersuchung des Einflusses der nach erfolgter Versteifung der Kette auf den Balken gebrachten Belastungen beginnen wir wie immer mit der Betrachtung der Wirkung einer Einzellast.

99. Der Horizontalzug H in Folge einer Einzellast. Verbindet man die senkrecht über den Balkenstützen A, B gelegenen Punkte A'', B'' der Kette durch eine Gerade (die *Schlusslinie*) und bezeichnet die Strecke, welche Kette und Schlusslinie auf der Lothrechten durch irgend einen Knotenpunkt m abschneiden, mit y_m (Fig. 277), so ist das auf m bezogene Angriffsmoment:

$$M_m = M_{0m} - Hy_m,$$

wo M_{0m} den Werth von M_m für den Fall bedeutet, dass der von den Lasten P ergriffene Balken nicht an der Kette hängt, sondern nur in A und B gestützt wird. Für den Zustand $H = -1$ ergiebt sich $M_m' = y_m$ und hieraus folgt, dass die Berechnung des von einer Einzellast P hervorgerufenen Horizontalzuges H sich von der Ermittlung der Werthe H für die im vorigen § behandelten Trägerarten nur in-

sofern unterscheidet, als die im Nenner des allgemeinen Ausdrucks für H stehende Summe $\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}$ von den Rückhaltketten beeinflusst wird. Die Spannkraft der unter α' geneigten linken Rückhaltkette ist $= H \sec \alpha'$ und nimmt für $H = -1$ den Werth $S' = -\sec \alpha'$ an. Ist also die Länge dieser Kette $= s'$ und der Querschnitt $F = F_h \sec \alpha'$, wo F_h den zur Aufnahme der Spannkraft $S = H_{max}$ bestimmten

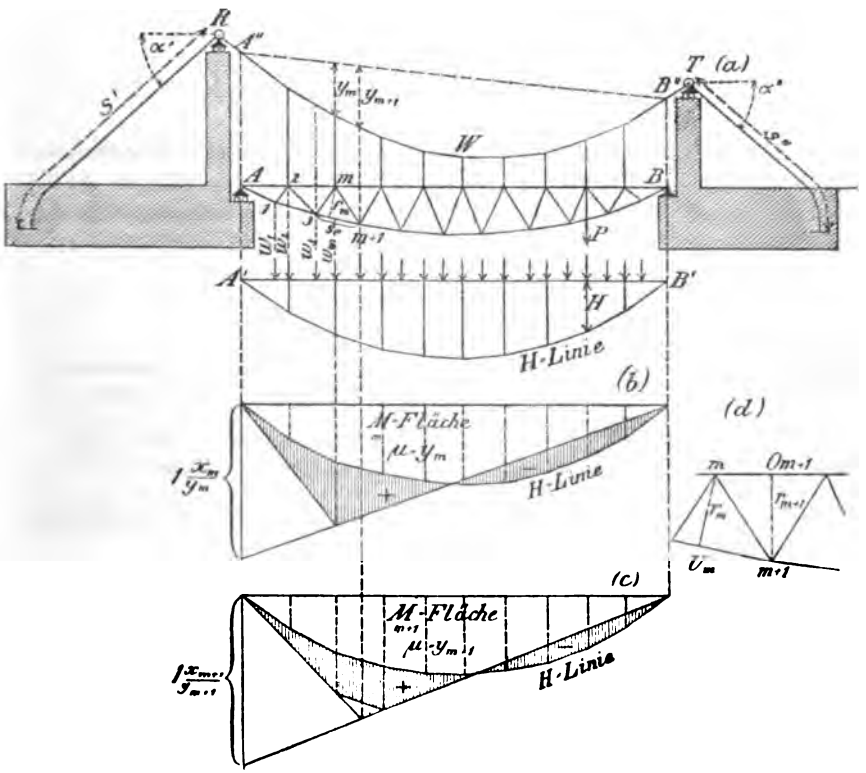


Fig. 277.

Scheitel-Querschnitt der Tragkette RWT bedeutet, so ergiebt sich $\frac{S'^2 s}{EF} = \frac{s' \sec \alpha'}{EF_h}$, wobei allerdings vorausgesetzt wird, dass sämmtliche Glieder der Rückhaltkette gleich gespannt sind, dass also die Stützung derselben auf die in Figur 171 (Seite 169) dargestellte Weise erfolgt. Bezeichnen s'' und α'' die entsprechenden Werthe der rechten Rückhaltkette, so führen die vorstehenden Betrachtungen zu der folgenden Bestimmungsweise der Einflusslinie für H.

Man berechne die Momente M_w eines mit den Gewichten $w_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2} \frac{F_o}{F_m}$ *belasteten einfachen Balkens $A'B'$ (unter F_o eine beliebig grosse, aber konstante Querschnittsfläche verstanden) und dividire dieselben durch*

$$(1) \quad \mathfrak{N} = \Sigma z_m + \frac{F_o}{F_k}(\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha'') + \frac{F_o}{F_s} \Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2,$$

worin $z_m = y_m w_m$. *Das Ergebniss ist* $H = \frac{M_w}{\mathfrak{N}}$.*)

Die zweite der Summen in Gleichung (1) erstreckt sich über sämmtliche Glieder der Tragkette, die dritte über alle Hängestangen. Für beide Summen lassen sich einfache, genügend genaue Näherungsformeln

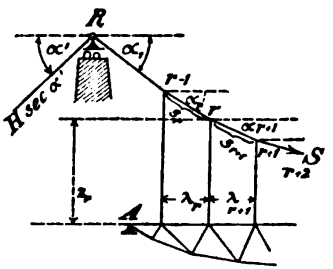


Fig. 278.

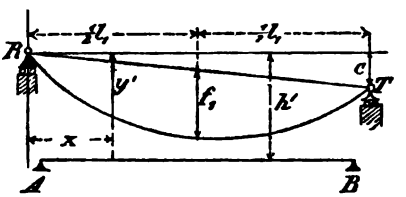


Fig. 279.

ableiten. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Kette als stetig gekrümmte Parabel und setzen mit Bezugnahme auf die Bezeichnungen in Fig. 279:

$$y' = \frac{4 f_1 x (l_1 - x)}{l_1^2} + \frac{c x}{l_1} \quad \text{und}$$

$$\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r = \int_0^{l_1} dx \left[1 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2\right] = l_1 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{c^2}{l_1^2}\right)$$

ferner $\Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2 = \lambda \Sigma (h' - y') \lambda \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}}{\lambda}\right)^2$

---

*) Die Bezeichnungen sind dieselben wie im vorigen §; sie wurden überdies in die Figuren 277 und 278 eingetragen. Die Knotenpunkte des Balkens und der Kette wurden für sich nummerirt; $\ldots m-1, m, m+1 \ldots$ sind die Ordnungsziffern der Knotenpunkte des Balkens, $\ldots r-1, r, r+1 \ldots$ diejenigen der Knotenpunkte der Kette.

$$= \lambda \int_0^{l_1} (h' - y')\, dx \left(\frac{d^2y'}{dx^2}\right)^2 = \lambda \left(\frac{8 f_1}{l_1^2}\right)^2 \int_0^{l_1} (h' - y')\, dx$$

$$= \lambda \left(\frac{8 f_1}{l_1^2}\right)^2 l_1 \left(h' - \frac{2}{3} f_1 - \frac{c}{2}\right).$$

Wir erhalten dann:

$$(2) \quad \mathfrak{N} = \Sigma z_m + \frac{F_o}{F_h} s_o + \frac{64 f_1^2 (3h' - 2f_1 - 1{,}5\, c)\, \lambda}{3 l_1^3} \frac{F_o}{F_s}, \quad \text{wo}$$

$$(3) \quad s_0 = l_1 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{c^2}{l_1^2}\right) + s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha''.$$

Das von den Abmessungen der Hängestangen abhängige letzte Glied von $\mathfrak{N}$ darf in der Regel gestrichen werden; sein Einfluss ist sehr gering. Bei Berechnung der Werthe w_m und z_m ist es zulässig, allen Gurtstäben denselben Querschnitt zuzuschreiben. Man setze daher

$$(4) \qquad w_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2}$$

und verstehe unter dem bislang willkürlichen F_o den Mittelwerth der Gurtquerschnitte.

Erfolgt die Versteifung der Kette durch einen nach Fig. 282 (S. 274) angeordneten Parallelträger von der Höhe h, so nimmt bei gleichlangen Feldern der Ausdruck $\frac{s_m}{r_m^2}$ den festen Werth $\frac{\lambda}{h^2}$ an. Setzt man dann

$$(5) \qquad w_m = y_m \quad \text{und} \quad z_m = y_m w_m = y_m^2,$$

so muss man mit

$$(6) \quad \mathfrak{N} = \Sigma y_m^2 + \frac{h^2}{\lambda} \left[\frac{F_o}{F_h} s_0 + \frac{64 f_1^2 (3h' - 2f_1 - 1{,}5\, c)\, \lambda}{3 l_1^3} \frac{F_o}{F_s}\right]$$

rechnen.

Für die durch einen Parallelträger versteifte Kette ist aber noch eine weitere Vereinfachung möglich, bestehend in der Einführung einer parabelförmigen H-Linie. Die Entwicklung ist ähnlich der in No. 82 für den Horizontalschub eines Zweigelenkbogens gegebenen Ableitung. Man betrachte die Kette als stetig gekrümmte Parabel, deren Gleichung

$$y = \frac{4 f x (l - x)}{l^2}$$

ist, (Fig. 280), und ersetze die Einzelgewichte w durch eine stetige Belastung, so zwar dass das Balkentheilchen dx mit $2y\, dx$ belastet wird, wobei die Ziffer 2 ausdrückt, dass an der Stelle dx die Gewichte *zweier* Knoten (eines oberen und eines unteren) zu berücksichtigen sind. Man erhält dann an der

Angriffsstelle von P das Moment

$$M_w = \frac{2f}{3l^2}(al^3 - 2la^3 + a^4)^*)$$

und findet nun: $H = \frac{PM_w}{\mathfrak{N}}$, wo

$$\mathfrak{N} = 2\int_0^l y^2\,dx + h^2\frac{F_c}{F_k}s_0 = 2\,\frac{8}{15}f^2l + \frac{h^2F_c}{F_k}s_0.$$

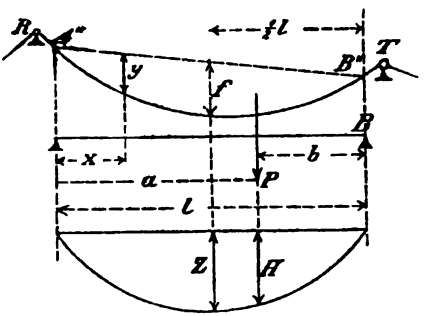


Fig. 280.

Der unwesentliche Einfluss der Hängestangen ist hierbei vernachlässigt worden. Ersetzt man die auf diese Weise erhaltene H-Linie durch eine Parabel (vergl. Seite 211) so findet man den Pfeil derselben:

(7) $$Z = \frac{3Pl\nu}{16f}, \text{ wo}$$

(8) $$\nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{16}\frac{h^2}{f^2}\frac{s_0}{l}\frac{F_c}{F_k}}.$$

Die Gleichung der Parabel ist

(9) $$H = \frac{3Pab\nu}{4fl}.$$

Der Werth s_0 ist nach Gleich. (3) zu berechnen. F_c bedeutet den mittleren Querschnitt der Balkengurtung, F_k den Querschnitt der Kette im Scheitel.

100. Horizontalzug in Folge einer Temperaturänderung. Eine gleichmässige Aenderung der Aufstellungstemperatur um $t°$ erzeugt:

(10) $$H_t = \frac{\varepsilon t\Sigma S's}{\Sigma\frac{S'^2s}{EF}} = \frac{\varepsilon EF_c t\Sigma S's}{\Sigma S'^2s\frac{F_c}{F}} = \frac{\varepsilon EF_c t\Sigma S's}{\mathfrak{N}}$$

wo $\mathfrak{N}$ der durch Gleichung (1) auf Seite 268 bestimmte Werth ist. Zahlenrechnungen beweisen, dass der Einfluss der Spannkräfte S' der Stäbe des Balkens auf die Summe $\Sigma S's$ ganz unwesentlich ist, und dass es genügt, in den Zähler der Gleichung (10) nur die den Kettengliedern und den Hängestangen entsprechenden Werthe $S's$ einzusetzen.

---

*) Vergl. den Ausdruck für M_w auf Seite 210. An die Stelle von x ist a getreten; f wurde durch $2f$ ersetzt; die Glieder $\frac{F_c}{F_w}$ und $\frac{1}{2}\left(h_0\frac{F_c}{F_w} - h_w\right)$. $x(l-x)$ wurden gestrichen.

Wir führen ein:

für die Tragkette: $\Sigma S's = -\Sigma \sec\alpha\, s = -\Sigma\lambda \sec^2\alpha$

$$= -l_1\left(1 + \frac{16}{3}\frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{c^2}{l_1^2}\right)$$

„ „ Rückhaltketten: $\Sigma S's = -(s' \sec\alpha' + s'' \sec\alpha'')$

„ „ Hängestangen: $\Sigma S's = -\Sigma z_\nu (\operatorname{tg}\alpha_\nu - \operatorname{tg}\alpha_{\nu+1})$

$$= -\Sigma (h' - y')\lambda\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha_\nu - \operatorname{tg}\alpha_{\nu+1}}{\lambda}\right) = +\int_0^{l_1}(h' - y')\,dx\,\frac{d^2y'}{dx^2}$$

$$= -\left(\frac{8f_1}{l_1^2}\right)\int_0^{l_1}(h' - y')\,dx = -\frac{8f_1}{l_1^2}\,l_1\left(h' - \frac{2}{3}f_1 - \frac{c}{2}\right)$$

und erhalten:

$$(11)\qquad H_t = -\frac{\varepsilon E F_o t}{\mathfrak{N}}\left[s_0 + \frac{8f_1(3h' - 2f_1 - 1{,}5\,c)}{3l_1}\right],$$

wobei $\mathfrak{N}$ und s_0 nach Gleichung (2) und (3) zu berechnen sind.

Das Vorzeichen deutet an, dass in Folge einer Erhöhung der Aufstellungstemperatur der Horizontalzug der Kette abnimmt.

Wird die Kette durch einen Paralleltträger versteift, so lässt sich Gleich. (11) noch erheblich vereinfachen. Man ersetze dann nach Streichung des unwesentlichen Einflusses der Hängestangen und Einführung eines mittleren Gurtquerschnittes den Werth

$$\mathfrak{N} = \Sigma\frac{y_m^2 s_m}{r_m^2} + \frac{F_o}{F_k}s_0$$

durch

$$\mathfrak{N} = 2\int_0^l \frac{y^2\,dx}{h^2} + \frac{F_o}{F_k}s_0 = \frac{16}{15}\frac{f^2 l}{h^2} + \frac{F_o}{F_k}s_0,$$

um dann zu erhalten:

$$H_t = -\varepsilon E F_k t\,\frac{15h^2}{16f^2}\,\frac{s_0}{l}\,\frac{F_o}{F_k}\,\frac{1}{1 + \frac{15}{16}\frac{h^2}{f^2}\frac{s_0}{l}\frac{F_o}{F_k}};$$

oder nach einfacher Umformung:

$$(12)\qquad H_t = -\varepsilon E F_k t\,(1 - \nu),$$

wo ν nach Gleich. (8) auf Seite 270 zu berechnen ist.

101. Einflussflächen. Die Einflussflächen für die Momente

$$M_m = M_{0m} - Hy_m \quad \text{und} \quad M_{m+1} = M_{0m+1} - Hy_{m+1}$$

sind in den Figuren 277 b und 277 c (für den Fall in den oberen Balkenknoten angreifender Lasten) dargestellt worden. Ihre Aufzeichnung be-

darf keiner weiteren Erläuterung mehr, da sie nach den in den §§ 7 und 8 für die M-Flächen gegebenen Regeln erfolgt. Nach Berechnung der Momente M_m, M_{m+1} findet man die Spannkräfte in den Gurtungen:

$$U_m = + \frac{M_m}{r_m}; \quad O_{m+1} = - \frac{M_{m+1}}{r_{m+1}} \text{ (vergl. Fig. 277 d).}$$

Auch die Ermittlung der Spannkräfte in den Füllungsstäben gestaltet sich ganz ähnlich wie beim Zweigelenkbogen und bei den im § 9 untersuchten Trägerarten. Wir führen durch A und B (Fig. 281) lothrechte Schnitte, welche die Tragkette in A'' bezieh. B'' treffen, zerlegen die Spannkräfte S_1 und S_n der äussersten Kettenglieder in die

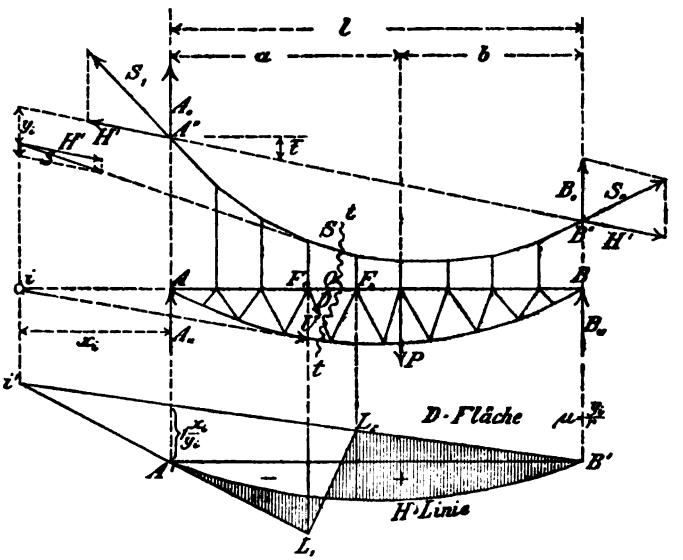


Fig. 281.

lothrechten Seitenkräfte A_o, B_o und die in die Schlusslinie fallenden Seitenkräfte H', und finden zunächst aus der auf B'' bezogenen Momentengleichung:

$$(A_o + A_u)\, l - Pb = 0,$$

dass $A_o + A_u$ ebenso gross ist, wie der Stützenwiderstand $A = \frac{Pb}{l}$ eines einfachen Balkens AB, und dass ferner $B_o + B_u = B = \frac{Pa}{l}$ ist. Sodann führen wir behufs Bestimmung von D den Schnitt tt, wählen

den Treffpunkt i von O und U zum Drehpunkt, bestimmen die Strecke y_i, welche der Kettenstab S und die Schlusslinie $A''B''$ auf der Lothrechten durch i abschneiden, zerlegen die Spannkraft S (welche auf die in der Fig. 281 angegebene Weise in ihrer Richtung verschoben wird) in eine lothrechte Seitenkraft und in die zur Schlusslinie parallele $H' = H \sec \tau$ (wo τ den Neigungswinkel der Schlusslinie bedeutet) und erhalten die Momentengleichung

$$M_{0i} - Hy_i + Dr_i = 0. \tag{13}$$

Hierin bedeutet M_{0i} das auf den Punkt i bezogene Angriffsmoment für den Fall, dass AB ein einfacher, nicht an der Kette hängender Balken ist, ein Balken also, dessen Stützenwiderstände $A_o + A_u = A$ und $B_o + B_u = B$ sind; r_i aber ist der Hebelarm von D in Bezug auf i. Die Gleichung (13) hat dieselbe Form wie Gleichung 34 auf Seite 212, und hieraus folgt die aus der Figur 281 ersichtliche Bestimmungsweise der D-Fläche. Man vergleiche die Figuren 222 bis 225 auf Seite 218 und beachte behufs Feststellung der Vorzeichen, dass bei der in Fig. 281 angenommenen Lage des Punktes i der Einfluss von H auf D gleich $+ H\frac{y_i}{r_i}$ (also positiv) ist, während sich im Falle $H = 0$ die Momentengleichung

$$-(A_o + A_u)\, x_i + Dr_i = 0$$

und hieraus der ebenfalls positive Werth

$$D = + A\frac{x_i}{r_i}$$

ergeben würde.

Es leuchtet ein, dass sich auch die anderen im § 7 zur Bestimmung der D-Flächen angegebenen Verfahren auf den vorliegenden Fall anwenden lassen; wir führen dies aber hier nicht weiter aus, empfehlen vielmehr dem Leser, diese leichte Arbeit selbst vorzunehmen und weisen nur noch auf den wichtigsten Sonderfall hin, nämlich den in Fig. 282 abgebildeten Versteifungsbalken mit parallelen Gurtungen. Hier ergeben sich die Spannkräfte in den Füllungsstäben in bekannter Weise aus den Querkräften Q, und es genügt daher, die Ermittlung der Q-Fläche für irgend ein Feld F_1F_2 zu zeigen.*)

Sind M_1 und M_2 die Angriffsmomente für die Knoten F_1, F_2, so besteht, da auf den Balken nur lothrechte Kräfte wirken, die Be-

*) Bildet die vom Schnitte t getroffene Diagonale (D) mit der Wagerechten den Winkel φ, so ist $D \sin \varphi = Q$.

ziehung

$$Q = \frac{M_2 - M_1}{\lambda} = \frac{M_{02} - Hy_2 - M_{01} + Hy_1}{\lambda} = Q_0 - H\frac{y_2 - y_1}{\lambda},$$

wo Q_0 die Querkraft für das Feld F_1F_2 eines einfachen nicht an der Kette hängenden Balkens AB bedeutet. Trägt man die Ordinaten y_1y_2 nach Fig. 282[b] von einer wagerechten Schlusslinie aus auf und

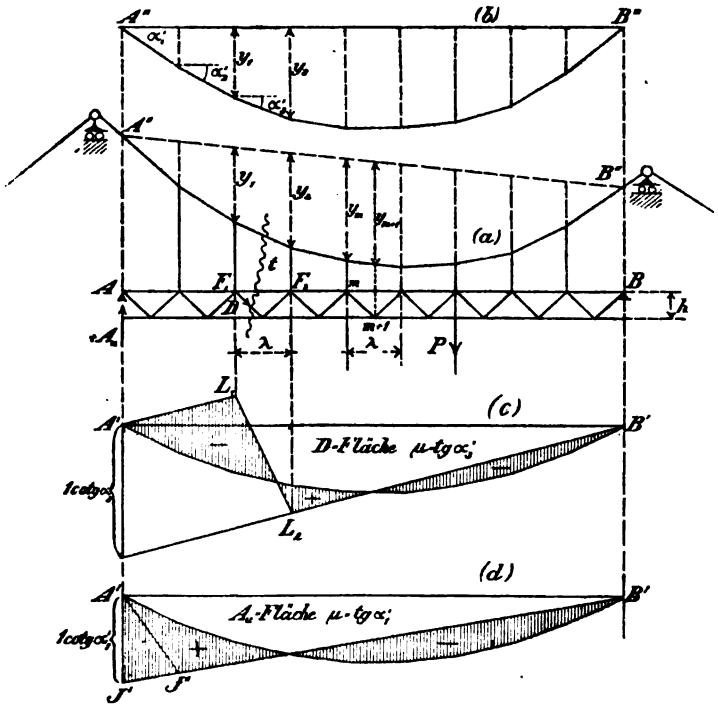


Fig. 282.

bezeichnet man die Neigungswinkel der auf diese Weise erhaltenen neuen Kettenlinie mit α', so erhält man die Gleichung

$$(14) \qquad Q = Q_0 - H \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha' (Q_0 \operatorname{cotg} \alpha' - H),$$

welche dieselbe Form hat wie Gleichung (3) auf Seite 246; sie führt zu der in Figur 282[c] angegebenen Darstellungsweise der Q-Fläche. Figur 282[d] zeigt schliesslich die Einflussfläche für den Auflagerdruck A_u, unter der Voraussetzung, dass bei A ein Querträger angeordnet ist; sie gilt für Träger beliebiger Gurtform und folgt ohne weiteres daraus,

dass dem Balkenquerschnitte A die Querkraft $Q = A_u$ entspricht. Fehlt der Endquerträger, wird also der erste Zwischenträger unmittelbar auf das Widerlager gelegt, so ist das Dreieck $A'J'B'$ durch das Dreieck $A'J''B'$ zu ersetzen.*)

102. Formeln für den gleichmässig belasteten Versteifungsbalken mit parallelen Gurtungen. Wird die statische Berechnung auf Grund der stets zulässigen Annahme durchgeführt, es liegen die Knoten der Kette in einer Parabel, deren Gleichung $y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$ ist, Fig. 280, und wird ferner die auf Seite 270 abgeleitete parabelförmige H-Linie benutzt, so lassen sich die von einer gleichförmigen Belastung verursachten Momente M und Querkräfte Q auch schnell durch Rechnung bestimmen. Die bezüglichen Formeln und Regeln sollen hier zusammengestellt werden; sie werden in ähnlicher Weise entwickelt, wie die auf Seite 241—243 und 253—257 für den Zweigelenkbogen bezw. den versteiften Stabbogen hergeleiteten Gesetze.

1. *Kette und Hängestangen.* Es möge der allgemeinere Fall vorausgesetzt werden, dass nur ein Theil (g_v) der ständigen Belastung g *vor* Ausführung der Versteifung aufgebracht werde, der Rest $g_n = g - g_v$ hingegen erst *nach* Vollendung des Balkens. Die Belastung g_v erzeugt: $H_1 = \frac{g_v l^2}{8f}$**), während g_n nur $H_2 = \frac{g_n l^2 \nu}{8f}$ hervorbringt. In Folge gänzlicher gleichförmiger Belastung des Balkens mit p entsteht $H_p = -\frac{p l^2 \nu}{8f}$ und in Folge einer Erniedrigung der Aufstellungstemperatur $H_t = +\varepsilon E F_k t (1-\nu)$, weshalb der Grösstwerth von H:

$$H_{max} = \frac{l^2}{8f}[g_v + (g_n + p)\nu] + \varepsilon E F_k t (1-\nu) \tag{15}$$

ist. Die grösste Spannkraft in einem unter α geneigten Gliede der Kette ist nun

$$S_{max} = H_{max} \sec \alpha \tag{16}$$

und die grösste Spannkraft in einer Hängestange:

$$Z_{max} = H_{max}(\operatorname{tg}\alpha_r - \operatorname{tg}\alpha_{r+1}) = H_{max}\frac{8f\lambda}{l^2}. \tag{17}$$

2. *Momente und Querkräfte des gänzlich belasteten Balkens.* Ist der ganze Balken mit p für die Längeneinheit belastet, so entsteht an der Stelle x das Moment

$$M_p = \frac{px(l-x)}{2} - H_p y = \frac{px(l-x)}{2} - \frac{pl^2}{8f}\nu \cdot \frac{4fx(l-x)}{l^2}, \text{ d. i.}$$

$$M_p = \frac{px(l-x)}{2}(1-\nu) \tag{18}$$

---

*) Die Auflager des Versteifungsbalkens und des ersten Zwischenträgers sind bündig liegend angenommen.

**) Wir vernachlässigen hier den Umstand, dass die Stützweite der Kette in der Regel etwas grösser ist als die des Balkens.

und im Felde F_1F_2 (Fig. 286) dessen Mitte von der Trägermitte den Abstand x'' haben möge, die Querkraft:

$$Q_p = \frac{pl}{2} - px - H_p \operatorname{tg}\alpha'' = px'' - \frac{pl^2\nu}{8f}\operatorname{tg}\alpha''.$$

Der Winkel α'', den das Kettenglied des fraglichen Feldes mit der vorerst in eine wagerechte Lage gebrachten Schlusslinie $A''B''$ bildet, ist ebenso gross, wie der Neigungswinkel einer an der Stelle x an die Parabel vom Pfeile f gelegten Tangente, weshalb

$$\operatorname{tg}\alpha'' = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x) = \frac{8f}{l^2}\left(\frac{l}{2} - x\right) = \frac{8f}{l^2}x''$$

und

$$Q_p = px''(1 - \nu). \tag{19}$$

M_p und Q_p sind also ebenso gross wie Moment und Querkraft für den Querschnitt x eines nicht an der Kette hängenden, nur bei A und B aufliegenden Balkens, der gleichmässig mit $p(1 - \nu)$ für die Längeneinheit belastet ist.

Den Einfluss M_g bezieh. Q_g der ständigen Belastung erhält man, indem man p durch g_n ersetzt.

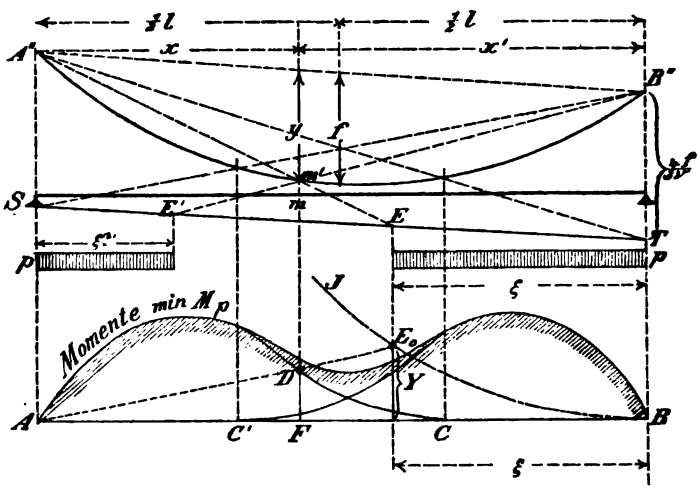


Fig. 283.

3. *Grenzwerthe der Momente in Folge der beweglichen Belastung.* Um das Moment $_{min}M_{pm}$ für einen (oberen oder unteren) Knoten m an der Stelle x zu bestimmen (Fig. 283, in welcher der Paralleträger durch eine Gerade ersetzt ist) mache man $B''T = \frac{4f}{3\nu}$, ziehe $TS \parallel B''A''$, lege durch den Kettenpunkt m' (senkrecht über m) die Geraden $A''E$ und $B''E'$ und belaste den Balken rechts von E und links von E'. Es entsteht dann (vergl. Seite 242):

(20) $$_{min}M_p = -\frac{p y \nu}{8 f l}(\xi^3 + \xi'^3),$$

während die Belastung der positiven Beitragstrecke EE' hervorbringt:

(21) $$_{max}M_p = +\frac{p y \nu}{8 f l}(\xi^3 + \xi'^3) + \frac{p x (l-x)}{2}(1-\nu),$$

weil $_{min}M_p + _{max}M_p = M_p$ ist.

Die Ergebnisse der Gleich. (20) lassen sich auch recht übersichtlich wie folgt durch Zeichnung darstellen. Man trage von der Geraden AB (Fig. 283) aus eine kubische Parabel BJ auf, deren Gleichung

$$Y = \frac{p \xi^3}{6 l}$$

ist, und verbinde den lothrecht unter E liegenden Punkt E_0 dieser Parabel mit A. Die Gerade AE_0 schneidet dann auf der Lothrechten durch m die Strecke

$$\overline{FD} = Y \frac{y}{\frac{4f}{3\nu}} = \frac{p y \nu \xi^3}{8 f l} \text{ (absolut genommen)}$$

ab, und es ist deshalb D ein Punkt der $_{min}M_p$-Linie, zunächst allerdings unter der Voraussetzung, dass nur *eine* Belastungsscheide E in Betracht kommt. Bestimmt man aber die Punkte D für alle Querschnitte, die zwischen A und der Stelle C liegen, welcher $\xi = 0$ entspricht, zeichnet dann das Spiegelbild $C'B$ der so erhaltenen Kurve und addirt schliesslich zwischen C' und C die Ordinaten beider Kurven, so erhält man die endgültige $_{min}M_p$-Linie. Dieselbe wurde in Fig. 283 durch Schraffirung hervorgehoben. Behufs Aufzeichnung der kubischen Hilfsparabel berechne man für irgend eine Abscisse ξ_1 die Ordinate $Y_1 = \frac{p \xi_1^3}{6 l}$ und bringe dann die Gleichung der Parabel auf die Form: $Y = Y_1 \frac{\xi^3}{\xi_1^3}$. Eine bequeme Konstruktion dieses Ausdrucks ist in der ohne weiteres verständlichen Fig. 284 angegeben; die Geraden LM und NO sind parallel zur Abscissenachse.

Die Ordinaten Y wachsen sehr schnell, weshalb es sich empfiehlt, ξ_1 nicht grösser anzunehmen, als gerade erforderlich, damit die Zeichnung nicht zu viel Raum beansprucht. Am besten ist es, die Punkte der kubischen Parabel nur für diejenigen Querschnitte zu bestimmen, für welche die Momente gesucht werden. Man vergleiche das auf Tafel 5 durchgeführte Beispiel.

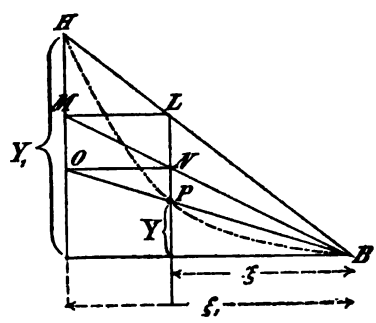


Fig. 284.

Will man die Momente rechnen, so setze man (indem man zunächst nur die Belastungsscheide E berücksichtigt):

$$_{min}M_p = -\frac{p y \nu \xi^3}{8 f l}$$

und beachte, dass $y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$, ferner

$$(l-\xi) : x = \frac{4f}{8\nu} : y$$

ist. Man erhält dann für die Kurve ADC (Fig. 283) die Gleichung

$$(22) \qquad {}_{min}M_p = -\frac{px[8\nu x' - l]^2}{54\nu^2 x'^2}$$

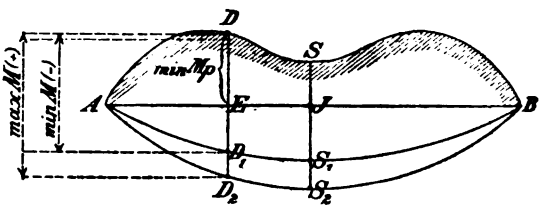


Fig. 285.

worin $x' = l - x$ ist. Die Berücksichtigung der zweiten Belastungsscheide erfolgt in derselben Weise wie beim zeichnerischen Verfahren. Der Punkt C (Fig. 283) liegt bei $x = l - \frac{l}{8\nu}$ und der Punkt C' bei $x = \frac{l}{8\nu}$.

4. *Die Momente M_t in Folge einer Temperaturänderung* sind:

$$(23) \qquad M_t = \mp H_t y = \mp \frac{8H_t f}{l^2} \frac{x(l-x)}{2};$$

sie sind ebenso gross wie die Momente eines nicht an der Kette hängenden einfachen Balkens AB, welcher gleichmässig mit $+\frac{8H_t f}{l^2}$ für die Längeneinheit belastet ist.

5. *Die Gesammtmomente:*

$$\begin{aligned} {}_{min}M &= {}_{min}M_p - H_t y + M_g \\ {}_{max}M &= {}_{max}M_p + H_t y + M_g \\ &= -{}_{min}M_p + M_p + H_t y + M_g \end{aligned}$$

lassen sich nun sehr übersichtlich wie folgt darstellen.

Man zeichne zuerst die Linie $ADSB$, deren Ordinaten die grössten negativen Momente ${}_{min}M_p$ angeben und addire hierzu die Ordinaten einer Parabel AS_1B von der Pfeilhöhe.

$$\overline{S_1 J} = -H_t f + \frac{g_n l^2}{8f}(1-\nu).$$

Je nachdem $H_t f \gtrless \frac{g_n l^2}{8f}(1-\nu)$ ist, wird diese Parabel unterhalb oder oberhalb der AB aufgetragen; ihre Ordinate an der Stelle x ist

$$\overline{ED_1} = -H_t y + g_n \frac{x(l-x)}{2}(1-\nu) = -H_t y + M_g$$

und es ergiebt sich daher: ${}_{min}M = -\overline{DD_1}$.

Jetzt zeichnet man eine zweite Parabel AS_2B, welche die Pfeilhöhe

$$\overline{S_2 J} = H_t f + (p + g_n)\frac{l^2}{8f}(1 - \nu)$$

hat und deren Ordinate an der Stelle x

$$\overline{ED_2} = H_t y + (p + g_n)\frac{x(l-x)}{2}(1-\nu) = H_t y + M_p + M_g$$

ist, weshalb man $_{max}M = + DD_2$ erhält.

6. *Das grösste aller Balken-Momente* entsteht sehr nahe der Stelle $x = \frac{1}{4}l$. Es kommt dort nur *eine* Belastungsscheide in Betracht, und es ist daher (wegen $y = \frac{3}{4}f$):

$$_{max}M = {}_{max}M_p + M_g + H_t g = - {}_{min}M_p + M_g + M_g + \frac{3H_t f}{4}$$

$$= \frac{px[3\nu x' - l]^2}{54\nu^2 x'^2} + \frac{pxx'}{2}(1-\nu) + \frac{g_n x x'}{2}(1-\nu) + \frac{3H_t f}{4}.$$

Mit $x = \frac{1}{4}l$ und $x' = \frac{3}{4}l$ geht dieser Werth über in

$$(24) \qquad M = \frac{3pl^2}{32\nu^2}\left(\nu - \frac{4}{9}\right)^2 + \frac{3}{32}(p + g_n)l^2(1-\nu) + \frac{3}{4}H_t f.$$

Für den Gurtquerschnitt des Versteifungsbalkens ergiebt sich nun an der betrachteten Stelle der Werth

$$F = \frac{M}{h\sigma},$$

wo σ die zulässige Spannung bedeutet. *Es empfiehlt sich, den auf diese Weise gefundenen Querschnitt der Berechnung der Ziffer ν zu Grunde zu legen, weil die Momente mit abnehmendem ν wachsen und es deshalb rathsam ist, den Werth ν eher etwas zu klein als zu gross zu nehmen.* Wir setzen daher:

$$(25) \qquad F_o = \frac{3l^2}{32h\sigma}\left[\frac{p}{\nu^2}\left(\nu - \frac{4}{9}\right)^2 + (p + g_n)(1-\nu)\right] + \frac{3H_t f}{4h\sigma}.$$

7. *Grenzwerthe der Querkräfte in Folge der beweglichen Belastung.* Nachdem die Schlusslinie $A''B''$ in wagerechte Lage gebracht worden ist (Fig. 282 u. 286), wird im Abstande $\overline{S'B''} = 4f : 3\nu$ die Wagerechte SS' eingetragen.*) Hierauf wird, behufs Ermittlung der Querkraft $_{max}Q_p$ des Feldes F_1F_2, durch A'' eine Parallele zu dem Kettengliede $F'F''$ gezogen, der Schnittpunkt E dieser Geraden mit SS' bestimmt und (vorausgesetzt dass E links von B'' liegt) der Balken zwischen E und der Feldmitte belastet. Für diesen Belastungszustand werden nun mit Hilfe der zweiten A-Linie und der zweiten H-Linie die Werthe A und H dargestellt und dann wird gefunden:

$$(26) \qquad {}_{max}Q_p = A - H \operatorname{tg} \alpha''$$

wo α'' den Winkel bedeutet, welchen $F'F''$ mit der Wagerechten einschliesst. Die zweite A-Linie ist eine Parabel, deren Scheitel bei B_0 liegt, und die zweite H-Linie wird in derselben Weise bestimmt wie beim Bogen mit zwei Gelenken (Gleich. 46, Seite 239); nur mit dem Unterschiede, dass ν einen anderen Werth annimmt. Vergleiche auch die auf Seite 240 gelöste Aufgabe.

---

*) Damit Figur 286 recht deutlich werde, nahmen wir die Balkenachse zusammenfallend mit der Geraden SS' an.

Liegt E rechts von B_0, so wird der Balken von der Mitte des Feldes F_1F_2 bis B belastet.

Zur Berechnung von ${}_{min}Q_p$ dient schliesslich die Gleichung

$$(27) \qquad {}_{min}Q_p + {}_{max}Q_p = Q_p = p x'' (1 - \nu).$$

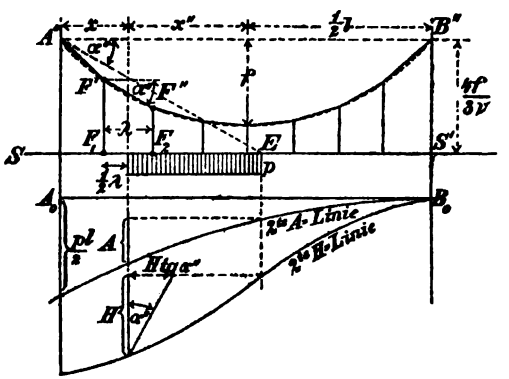


Fig. 286.

Ein zweites Verfahren, ${}_{max}Q_p$ zu ermitteln, ist auf Seite 256 und 257 erläutert worden; dasselbe setzt gleiche Feldweiten und feste Werthe der Knotenlasten voraus; und ein drittes Verfahren, ebenfalls für gleichlange Felder und feste Knotenlasten, ergiebt sich wie folgt:

Belastet man r Knotenpunkte, von B aus gezählt, Fig. 287, mit je $p\lambda$, so entsteht

$$(28) \qquad A_r = \frac{p r \lambda (r+1)\lambda}{2l}$$

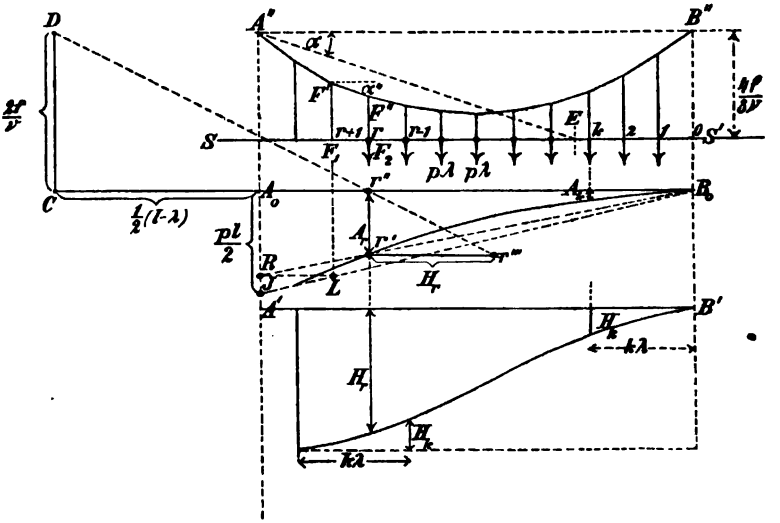


Fig. 287 u. 288.

und (nach der Formel 9, Seite 270, mit $l = n\lambda$):

$$(29) \quad \begin{cases} H_r = \dfrac{3 p \lambda \nu}{4 f l}\Big[1(n-1) + 2(n-2) + 3(n-3) + \ldots + r(n-r)\Big]\lambda^2 \\ \quad = \dfrac{p \lambda^3 \nu}{8 f l} r (r+1)(3n - 2r - 1), \end{cases}$$

wofür man mit Rücksicht auf Gleich. 28 auch schreiben darf

$$H_r = A_r \frac{1{,}5\, l - 0{,}5\, \lambda - r\lambda}{2f} \nu. \tag{30}$$

Zur zeichnerischen Bestimmnng der Werthe A_r und H_r mache man (nach Fig. 287) $\overline{A_o J} = \frac{pl}{2}$, bestimme senkrecht unter $r+1$ auf der Geraden $B_o J$ den Punkt L, ziehe $LR \parallel A_o B_o$ und verbinde R mit B_o. Die Geraden $B_o A_o$ und $B_o R$ schneiden auf der Senkrechten durch r die Kraft $\overline{r'' r'} = A_r$ ab.

Verlängert man jetzt $B_o A_o$ um $A_o C = 0{,}5\,(l - \lambda)$, macht $CD = 2f : \nu$ und bringt die Gerade Dr'' mit der Wagerechten durch r' in r''' zum Schnitt, so erhält man $r' r''' = H_r$, welcher Werth nun von einer Wagerechten $A'B'$ aus als Ordinate aufgetragen wird.

Soll nun die Querkraft ${}_{max}Q_p$ für das Feld $F_1 F_2$ bestimmt werden, so suche man mit Hilfe von $A'' E \parallel F' F''$ die Belastungsscheide E auf und nehme nur die zwischen E und dem Schnitte tt gelegenen Knoten belastet an. Es seien dies die Knoten r, $(r-1)$, ... $k+1$. Dann entsteht

$$A = A_r - A_k; \quad H = H_r - H_k; \quad {}_{max}Q_p = A - H \operatorname{tg} \alpha''.^*)$$

8. *Die Querkräfte Q_t in Folge einer Temperaturänderung* sind

$$Q_t = \mp H_t \operatorname{tg} \alpha'' = \mp \frac{8 f H_t}{l^2} x'';$$

sie sind ebenso gross wie die Querkräfte eines nicht an der Kette hängenden einfachen Balkens AB, welcher gleichmässig mit $\mp \frac{8 f H_t}{l^2}$ f. d. Längeneinheit belastet ist.

9. *Die Gesammtquerkräfte:*

$${}_{max}Q_p = {}_{max}Q_p + \frac{8 f H_t}{l^2} x'' + Q_g^{**})$$

$${}_{min}Q_p = {}_{min}Q_p - \frac{8 f H_t}{l^2} x'' + Q_g$$

$$= - {}_{max}Q_p + Q_p - \frac{8 f H_t}{l^2} x'' + Q_g$$

lassen sich jetzt übersichtlich wie folgt darstellen.

Man trage von der Wagerechten $A'B'$ aus (Fig. 289) die Querkräfte ${}_{max}Q_p$ auf und addire zu denselben die Querkräfte eines gleichmässig mit $g_n(1-\nu) + \frac{8 f H_t}{l^2}$ für die Längeneinheit belasteten Balkens, welche letztere in bekannter Weise mittels einer Geraden $J_1 M$ gewonnen werden, wobei $A'M = \frac{1}{2} l$ und $\overline{J_1 A'} = g_n(1-\nu)\frac{l}{2} + \frac{4 f H_t}{l}$ ist. Das Ergebniss ist:

$${}_{max}Q_p + \overline{A' J_1} \frac{x''}{0{,}5\, l} = {}_{max}Q_p + \frac{8 f H_t}{l^2} x'' + g_n(1-\nu) x'' = {}_{max}Q.$$

---

*) Dieses Verfahren lässt sich selbstverständlich auch beim Zweigelenkbogen mit annähernd konstanter Höhe h, sowie bei dem im vorigen § behandelten Versteifungsbalken mit parallelen Gurtungen anwenden.

**) H_t sei der absolute Werth des Horizontalzuges in Folge einer Temperaturänderung.

Ersetzt man die Gerade $J_1 M$ durch die mit Hilfe von

$$\overline{A' J_2} = \frac{4 f H_t}{l} - (g_n + p)(1 - \nu)\frac{l}{2}$$

bestimmte Gerade $J_2 M$, so erhält man:

$$_{max}Q_p + \overline{A' J_2}\frac{x''}{0{,}5\,l} = {}_{max}Q_p + \frac{8 f H_t}{l^2} x'' - p(1-\nu)x'' - g_n(1-\nu)x''$$

$$= {}_{max}Q_p + \frac{8 f H_t}{l^2} x'' - Q_p - Q_g = -\,{}_{min}Q.$$

Innerhalb eines Feldes hat Q einen festen Werth.

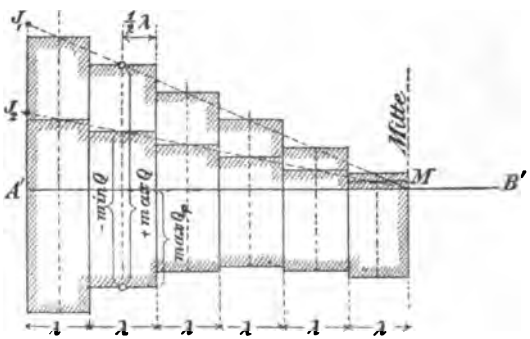


Fig. 289.

103. ***Zahlenbeispiel*** (Tafel 5). Es soll eine versteifte Kettenbrücke mit folgenden Abmessungen berechnet werden:

Stützweite der Kette $l_1 = 75^m$, des Balkens $l = 72^m$; Pfeil der Kette, gemessen bis zur Schlusslinie $f = 9{,}0^m$ ($f_1 =$ rund $9{,}7^m$); Länge der unter $\alpha' = 35°$ geneigten Rückhaltkette $s' = 27^m$; Höhe des Versteifungsbalkens $h = 2{,}0^m$; Feldweite $\lambda = 3^m$.

Die ständige Belastung für jeden der beiden die Brückenbahn stützenden Hauptträger sei $g = 2{,}8^t$ f. d. Meter, die bewegliche $p = 1{,}5^t$, Es sei in Aussicht genommen, die Brücke zuerst unversteift auszuführen (vergl. Seite **266**) weshalb $g_v = g = 2{,}8^t$ und $g_n = 0$. Die Temperaturänderung sei $t = \pm 40°$ Cels.

1. ***Abschätzung des Querschnittsverhältnisses*** $F_c : F_k$ ($F_c =$ Gurtquerschnitt des Balkens, $F_k =$ Querschnitt der Kette im Scheitel) behufs Berechnung der Ziffer ν. Es ist

$$\frac{s_0}{l} = \frac{l_1}{l}\left[1 + \frac{16}{3}\frac{f_1^2}{l_1^2} + 2\frac{s'}{l}\sec\alpha'\right] = 2{,}09 \text{ und}$$

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{16}\frac{h^2}{f^2}\frac{s_0}{l}\frac{F_c}{F_k}} = \frac{1}{1 + 0{,}0968\,\frac{F_c}{F_k}}.$$

Schätzt man zuerst $F_c : F_k = 0{,}40$ bis $0{,}45$, so erhält man $\nu = 0{,}962$ bis $\nu = 0{,}957$, also rund $\nu = 0{,}96$. Aus der Formel

$$\sigma F_k = H_{max} = \frac{l^2}{8 f}[g_v + (g_n + p)\nu] + \varepsilon E F_k t (1 - \nu)$$

folgt nun der erforderliche Kettenquerschnitt im Scheitel

$$F_k = \frac{l^2 [g_r + (g_m + p)\nu]}{8f[\sigma - \varepsilon E t (1-\nu)]}$$

und, wenn für eine schweisseiserne Flacheisenkette die Beanspruchung

$$\sigma = 1000^{kg} \text{ f. d. } qcm = 10000^{t} \text{ f. d. } qm$$

zugelassen und $\varepsilon E = 240^{t}$ f. d. qm gesetzt wird:

$$F_k = \frac{72^2 (2{,}8 + 1{,}5 \cdot 0{,}96)}{8 \cdot 9 [10000 - 240 \cdot 40 \cdot 0{,}04]} = 0{,}0317\ qm.$$

Der Neigungswinkel α der äussersten Glieder der parabelförmig gerechneten Kette ist durch

$$\sec \alpha_1 = \sqrt{1 + \frac{16 f^2}{l^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

bestimmt, und es muss daher der Kettenquerschnitt bis zu $F_k \sec \alpha_1 = \frac{0{,}0317}{2}\sqrt{5}$ $= 0{,}0356\ qm$ anwachsen. Im vorliegenden Falle empfiehlt es sich, der Kette den überall gleichen Querschnitt 0,0356 qm zu geben, also auch $F_k = 0{,}0356$ zu setzen.

Nun ergiebt sich der Horizontalzug in Folge der Temperaturänderung:

$$H_t = \varepsilon E F_k t (1-\nu) = 240 \cdot 0{,}0356 \cdot 40 \cdot 0{,}04 = 13{,}7^{t}$$

und der Gurtquerschnitt des Balkens nach Gleich. 25 (wegen $g_m = 0$):

$$F_o = \frac{3 l^2 p}{32 h \sigma}\left[\frac{1}{\nu^2}\left(\nu - \frac{4}{9}\right)^2 + (1-\nu)\right] + \frac{3 H_t f}{4 h \sigma}.$$

Wird $\sigma = 750^{kg}$ f. d. $qcm = 7500^{t}$ f. d. qm gestattet, so folgt:

$$F_o = \frac{3 \cdot 72^2 \cdot 1{,}5}{32 \cdot 2{,}0 \cdot 7500}\left[\frac{1}{0{,}96^2}\left(0{,}96 - \frac{4}{9}\right)^2 + 0{,}04\right] + \frac{3 \cdot 13{,}7 \cdot 9{,}0}{4 \cdot 2{,}0 \cdot 7500} = 0{,}0154.$$

Hiernach ist:

$$\frac{F_o}{F_k} = \frac{0{,}0154}{0{,}0356} = 0{,}433 \text{ und } \nu = \frac{1}{1 + 0{,}0968 \cdot 0{,}433} = 0{,}9598,$$

also rund $\nu = 0{,}96$, übereinstimmend mit dem zuerst gefundenen Werthe von ν. Eine Wiederholung der Rechnung ist daher nicht erforderlich, und es darf die Untersuchung des Versteifungsbalkens mit $\nu = 0{,}96$ durchgeführt werden.

Der grösste Horizontalzug der Kette ist

$$_{max}H = \frac{l^2}{8f}(g + p\nu) + H_t = \frac{72^2}{8 \cdot 9{,}0}(2{,}8 + 1{,}5 \cdot 0{,}96) + 13{,}7 = 319^{t}$$

und der grösste Zug in einer Hängestange:

$$_{max}Z = H_{max}(\operatorname{tg}\alpha_m - \operatorname{tg}\alpha_{m+1}) = H_{max}\frac{8f\lambda}{l^2} = 319\,\frac{8 \cdot 9{,}0 \cdot 3{,}0}{72^2} = 14^{t}.$$

Für die Rückhaltkette erhält man:

$$S_{max} = H_{max} \sec 35° = 389^{t},$$

und der Druck auf den Kettenpfeiler ist:

$$H_{max}(\operatorname{tg} 35° + \operatorname{tg}\alpha_1)^{*}) = 319\,[0{,}7 + 0{,}5] = 383^{t}.$$

---

*) Genügend genau ist $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{4f}{l}$.

2. Spannkräfte in den Gurtungen, Fig. 290. Die zur Ermittlung der Belastungsscheiden dienende Wagerechte SS' liegt im Abstande

$$\frac{4f}{8\nu} = \frac{4 \cdot 9{,}0}{8 \cdot 0{,}96} = 12{,}5^{m}$$

von der $A''B''$; ihre Schnittpunkte 1_0, 2_0, 3_0, ... mit den Geraden $A''1'$, $A''2'$, $A''3''$, . . . bestimmen die den Knotenpunkten 1, 2, 3, . . . entsprechenden Belastungsscheiden. In Fig. 290 wurde die Kette parabolisch angenommen. Auf der Senkrechten durch B'' wurde die Strecke $B''0'' = 4f = 36^{m}$ aufgetragen und in 24 gleiche Theile zerlegt. Die von den Theilpunkten 1'', 2'', 3'', . . . nach A'' gezogenen Strahlen schneiden dann die Senkrechten durch 1, 2, 3, . . . in den Kettenpunkten 1', 2', 3' . . . und die Gerade SS' in den Punkten 1_0, 2_0, 3_0, ...

Die Werthe $\frac{M}{h}$ wurden nach dem auf Seite 276 bis 279 zur Ermittlung der Momente M benutzten Verfahren bestimmt. Punkt 1_0 liegt im Abstande $\xi_1 = 45{,}91^{m}$ von der Senkrechten $B''B'$, und es ist daher die zugehörige Ordinate der nach Fig. 284, Seite 277 aufzutragenden kubischen Hilfsparabel:

$$\frac{p\xi_1^3}{6lh} = \frac{1{,}5 \cdot 45{,}91^3}{6 \cdot 72 \cdot 2.0} = 168{,}0 \text{ Tonnen.}$$

Die Pfeilhöhen der gemeinen Parabeln $A'L_1B'$ und $A'L_2B'$ sind (wegen $g_n = 0$), bezw.

$$\frac{H_1 f}{h} = \frac{13{,}7 \cdot 9{,}0}{2{,}0} = 61{,}65 \text{ Tonnen} = \text{rund } 62 \text{ Tonnen}$$

und

$$\frac{H_1 f}{h} + \frac{pl^2}{8h}(1-\nu) = 61{,}65 + \frac{1{,}5 \cdot 72^2 \cdot 0{,}04}{8 \cdot 2{,}0} = \text{rund } 81 \text{ Tonnen.}$$

Die Zeichnung liefert für die Knoten 1, 2, 3, . . . 12:

$$\max \frac{M}{h} = +32;\ +59;\ +80;\ +97;\ +108;\ +115;\ +118;\ +118;\ +115;\ +111;\ +109;\ +108 \text{ Tonnen}$$

$$\min \frac{M}{h} = -29;\ -53;\ -72;\ -86;\ -95;\ -101;\ -102;\ -101;\ -97;\ -93;\ -90;\ -89 \text{ Tonnen.}$$

Durch diese Werthe sind die in Fig. 293 zusammengestellten Spannkräfte in den Gurtungen bestimmt.

3. Spannkräfte D in den Diagonalen. In einer unter dem Winkel φ gegen die Wagerechte geneigten Diagonale entsteht die Spannkraft

$$D = \pm \frac{Q}{\sin \varphi},$$

wo Q die Querkraft für das fragliche Feld bedeutet. Das obere Vorzeichen gilt für eine linkssteigende, das untere für eine rechtssteigende Diagonale. Da φ für sämmtliche Diagonalen gleich gross ist $\left(\frac{1}{\sin \varphi} = 1{,}8028\right)$, so wurden an Stelle der Querkräfte Q sofort die Werthe $Q' = \frac{Q}{\sin \varphi}$ dargestellt und zwar nach dem auf Seite 280, Fig. 287 und 288 für die Ermittlung der Kräfte Q angegebenen Verfahren. Hiernach sind die Ordinaten der für feste Knotenlasten $p\lambda$ aufgetragenen zweiten $(A : \sin \varphi)$-Linie durch die Strecke (Fig. 291)

$$\overline{A_0 J} = \frac{pl}{2 \sin \varphi_1} = \frac{1{,}5 \cdot 72 \cdot 1{,}8028}{2} = 97{,}35^t$$

bestimmt. Die Ordinaten der zweiten ($H : \sin\varphi$)-Linie wurden nach Festlegung des Punktes D [mittels $\overline{A_0 C} = \frac{1}{2}(l - \lambda) = \frac{1}{2}(72 - 8) = 34{,}50^m$ und $\overline{CD} = \frac{2f}{\nu} = \frac{2 \cdot 9{,}0}{0{,}96} = 18{,}75^m$] auf die früher beschriebene Weise (Fig. 287) aus den Werthen $A : \sin\varphi$ hergeleitet; die Hilfslinien sind grösstentheils wieder ausgelöscht worden. Für $A : \sin\varphi$ und $H : \sin\varphi$ wurden auf Tafel 5 die kürzeren Zeichen A' und H' eingeführt.

Wird nun beispielsweise ${}_{max}Q_p'$ für das dritte Feld gesucht, so zieht man von A'' aus zu dem Kettengliede III eine Parallele, bringt diese mit der Wagerechten SS' in III_0 zum Schnitt und erhält in der Senkrechten durch III_0 eine Belastungsscheide.*) Hierauf nimmt man die zwischen dem fraglichen Felde und III_0 gelegenen Knotenpunkte 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 mit je $p\lambda$ belastet an und findet für diesen Zustand:

$$\frac{A}{\sin\varphi} = A_3' - A_{11}'; \quad \frac{H}{\sin\varphi} = H_3' - H_{11}', \text{ mithin}$$

$${}_{max}Q_p' = (A_3' - A_{11}') - (H_3' - H_{11}') \operatorname{tg} \alpha_3.$$

Der Kürze wegen haben wir auf Tafel 5 den Werth $A_3' - A_{11}'$ mit A_{III} bezeichnet und den Werth $(H_3' - H_{11}') \operatorname{tg} \alpha_3$ mit T_{III}. Die letztere Kraft ist mittels der zum Kettengliede III rechtwinkligen Geraden III' bestimmt worden.

Auf dieselbe Weise wurde die Kraft ${}_{max}Q_p'$ für alle Felder der linken Balkenhälfte in der Form dargestellt:

$${}_{max}Q'_{pI} = A_I - T_I; \quad {}_{max}Q'_{pII} = A_{II} - T_{II}; \text{ u. s. w.}$$

wobei zu beachten ist, dass nur den Feldern I bis VIII Belastungsscheiden $I_0 \ldots . VIII_0$ entsprechen. Für das IX^{te} Feld entsteht ${}_{max}Q_p'$ sobald sämmtliche rechts von diesem Felde gelegenen Knoten belastet sind, weshalb $A_{IX} = A_9'$ und $T_{IX} = H_9 \operatorname{tg} \alpha_9$, und ebenso folgt $A_X = A_{10}'$, $T_X = H_{10}' \operatorname{tg} \alpha_{10}$ u. s. w.

Die so gewonnenen Kräfte ${}_{max}Q_p'$ sind in Fig. 292 im Maassstabe $1^{mm} = 1^t$ von der Geraden AM aus nach unten aufgetragen worden. Hierauf wurde die Gerade $J_1 M$ mittels

$$AJ_1 = \frac{4fH_t}{l \sin\varphi} = \frac{4 \cdot 9{,}0 \cdot 13{,}7}{72} \cdot 1{,}8028 = 12{,}35^t$$

festgelegt und für jedes Feld die Kraft ${}_{max}Q'$ nach dem auf Seite 281, Fig. 289, angegebenen Verfahren bestimmt.

Zur Ermittlung der ${}_{min}Q'$ müsste die Gerade $J_1 M$ durch eine Gerade $J_2 M$ (Fig. 289) ersetzt werden, wobei

$$AJ_2 = \frac{4fH_t}{l \sin\varphi} - p(1 - \nu)\frac{l}{2 \sin\varphi} = 11{,}96^t$$

zu machen wäre. Es unterscheiden sich aber die Ordinaten der Geraden $J_1 M$ und $J_2 M$ so wenig voneinander, dass es im vorliegenden Falle erlaubt ist, ${}_{min}Q' = -{}_{max}Q'$ zu setzen.

---

*) Ist die Kette parabelförmig, so sind die von A'' aus nach den bereits in Fig. 290 benutzten Punkten 1'', 3'', 5'', 7'', ... gezogenen Geraden beziehungsweise parallel zu den Kettengliedern I, II, III, IV, . . .

Die Ergebnisse lauten für die Felder 1, 2, 3, ... 12:

$$\left.\begin{matrix}max\\min\end{matrix}\right\} Q' = \pm 39^t;\ 33^t,\ 29^t;\ 26^t;\ 24^t;\ 23^t;\ 23^t:\ 24^t;\ 25^t;\ 25^t;\ 25^t;\ 25^t;$$

denselben entsprechen die in die Figur 293 eingeschriebenen Spannkräfte D.

Der Widerstand A am linken Auflager des Balkens ist, falls kein Endquerträger angeordnet wird:

$$A = D_1 \sin\varphi, \text{ woraus } {}_{max}A = +21{,}6^t;\ {}_{min}A = -21{,}6^t.$$

Der positive Widerstand ist nach oben gerichtet, der negative Werth A muss durch einen Anker aufgenommen werden.

Ist ein Endquerträger vorhanden, so entsteht

$${}_{max}A = 21{,}6 + \frac{p\lambda}{2} = 21{,}6 + \frac{1{,}5 \cdot 3{,}0}{2} = +24^t,$$

während ${}_{min}A$ den oben angegebenen Werth behält, weil bei der Belastung, welche ${}_{min}A$ erzeugt, der Knoten 0 unbelastet bleibt.

Wir empfehlen dem Leser, auf Grund der angegebenen Spannkräfte nunmehr die Längenänderungen sämmtlicher Stäbe zu berechnen, die genauere Einflusslinie für H als Biegungslinie für den Zustand $H = -1$ darzustellen und für einige Momente und Querkräfte die Einflussflächen abzuleiten. Diese schärfere Ermittlung der H-Linie erfolgt genau wie bei dem in No. 96 behandelten Zahlenbeispiele, und es dürfte deshalb überflüssig sein, hier näher darauf einzugehen.

104. Der Stabbogen mit darüber liegendem Versteifungsbalken, Fig. 294, lässt sich als umgekehrte versteifte Kette deuten und mit Hilfe der im vorstehenden entwickelten Verfahren untersuchen. Die Glieder des Stabbogens und die senkrechten Zwischenstäbe werden natürlich auf *Druck* beansprucht; auch muss man zur Bestimmung der Punkte A'' und B'' die äussersten Glieder des Bogens über R und T hinaus verlängern. Endlich sind bei Berechnung des Horizontalschubes H mit Hilfe der für den Horizontalzug der Kette abgeleiteten Formeln die Längen s' und s'' der Rückhaltketten gleich Null zu setzen.

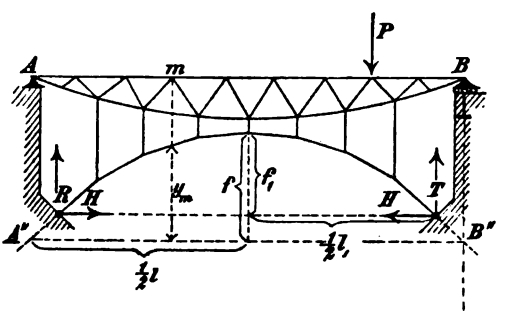


Fig. 294.

In Fig. 294 ist ein bei A und B auf den Pfeilern gelagerter Balken gezeichnet worden, in Fig. 295 ein an den Enden mit den Kämpfergelenken durch senkrechte Stäbe verbundenes Versteifungsfachwerk.

Während das erstere Tragwerk Lasten beliebiger Richtung aufzunehmen vermag, ist letzteres nur senkrechten Lasten gewachsen. Damit es fähig werde, auch wagerechte Lasten auf die Pfeiler zu übertragen, lege man *einen* Knoten des Versteifungsbalkens auch im wagerechten Sinne fest, z. B. B in Fig. 295[a]. Führt man dagegen den Stabbogen bis an den Balken heran, Fig. 296, so erhält man ein Fachwerk, welches nur in den Punkten R und T gestützt zu werden braucht; dasselbe ist steif und einfach statisch unbestimmt.

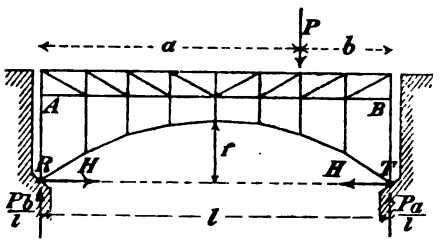


Fig. 295.

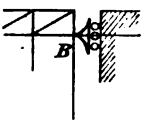


Fig. 295a.

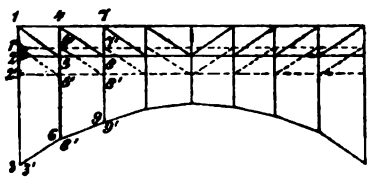


Fig. 295b.

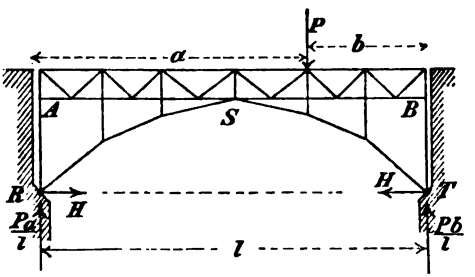


Fig. 296.

Für den in Fig. 295 dargestellten Träger ist die Anzahl der Knotenpunkte $k = 27$, der Stäbe $s = 50$ und der Seitenkräfte der Stützenwiderstände $a = 4$*), mithin

$$2k = s + a \text{ (d. h. } 54 = 50 + 4),$$

so dass man versucht sein könnte, den Träger für einen statisch bestimmten zu halten. Ein Blick auf die in Fig. 295[b] eingetragene Figur F' lehrt aber, dass hier ein bewegliches Stabgebilde vorliegt, ein Tragwerk, welches sich nur in gewissen Belastungsfällen als brauchbar erweist, dann aber statisch unbestimmt ist; und zwar ist leicht einzusehen, dass einer am Versteifungsbalken angreifenden wagerechten Last erst dann von den Spannkräften der anfänglich

*) Wir erinnern daran, dass bei Ermittlung der Zahl a der Widerstand eines festen Auflagers in zwei Seitenkräfte zerlegt werden muss. Einem beweglichen Auflager entspricht $a = 1$.

senkrecht stehenden Zwischenstäbe das Gleichgewicht gehalten werden kann, wenn diese Stäbe in Folge einer Verschiebung des Balkens eine geneigte Lage angenommen haben. Fällt der Stabbogen mit der Geraden RT zusammen ($f = 0$), so ist das Fachwerk ein solches von endlicher Beweglichkeit; Gleichgewicht ist in diesem Falle bei einer wagerechten Belastung des Versteifungsbalkens überhaupt nicht möglich. Sonst ist die Beweglichkeit — starre Stäbe vorausgesetzt — eine unendlich kleine, und es liegt einer der auf Seite 37 hervorgehobenen Ausnahmefälle vor.

Haben Stabbogen und Versteifungsbalken einen Knotenpunkt gemein und wird trotzdem das eine Balkenauflager fest gemacht (Fig. 297), so entsteht ein steifes, zweifach statisch unbestimmtes Fachwerk. Als statisch nicht bestimmbare Grössen führt man zweckmässig die wagerechten Auflagerwiderstände H_o und H_u ein; man berechne sie mit

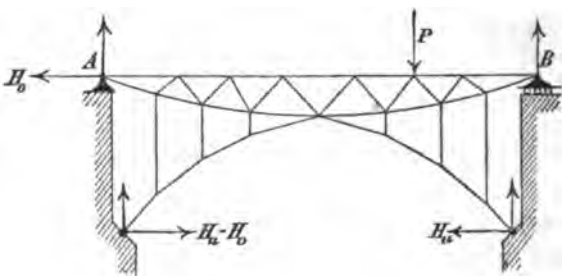


Fig. 297.

Hilfe des im § 5 gelehrten allgemeinen Verfahrens und leite die Einflusslinie für H_o und H_u aus den Biegungslinien für die Zustände $H_o = -1$ und $H_u = -1$ ab.

Eine solche zweifache statische Unbestimmtheit entsteht natürlich auch dann, wenn eine der Hängestangen der in Fig. 277 dargestellten versteiften Kettenbrücke die Länge Null erhält; und man kann hieraus schon schliessen, dass im Falle sehr kurzer mittlerer Hängestangen die unter der Voraussetzung einer einfachen statischen Unbestimmtheit gewonnenen Ergebnisse nicht mehr ganz scharf sein können, eine Thatsache, die sich auch in der Weise erklären lässt, dass die Neigungswinkel sehr kurzer Stäbe schon bei einer geringen Formveränderung des Fachwerks sich wesentlich ändern können, was dann zur Folge hat, dass die Annahme verschwindend kleiner Winkeländerungen nicht mehr zutrifft.

§ 10.

Einfach statisch unbestimmte Bogen- und Kettenbrücken mit mehreren Oeffnungen.

105. Die nächste Untersuchung beschäftigt sich mit einer Reihe *einfach statisch unbestimmter Bogen- und Kettenbrücken mit mehreren Oeffnungen*, deren Berechnung sich eng an die Untersuchungen der vorigen Paragraphen anschliesst. Als statisch nicht bestimmbare Grösse wird durchweg der Horizontalschub (bezieh. Horizontalzug) H eingeführt und zur Ermittlung von H in Folge einer senkrechten, in m angreifenden Last P_m wird die Gleichung

$$H = P_m \frac{\delta_m'}{\Sigma S'^2 s \frac{F_e}{F}}$$

benutzt, wobei δ' die mit EF_e multiplicirte senkrechte Verschiebung bedeutet, welche m bei Eintreten des gedachten Belastungszustandes $H = -1$ erfahren würde, während S' die Stabkraft für den Zustand $H = -1$ ist. Die zu betrachtenden Tragwerke lassen sich in zwei Gruppen scheiden; bei den Gebilden der einen Gruppe besteht das statisch bestimmte Hauptnetz aus einer Reihe von *Einzelbalken*, während die anderen im Falle $H = 0$ in *Gerbersche Balken* übergehen.

a. Das statisch bestimmte Hauptnetz besteht aus einer Folge von Einzelbalken.

106. Bogenbrücke mit mehreren Oeffnungen. Die über einem Mittelpfeiler zusammentreffenden Bögen erhalten dort ein gemeinschaftliches, auf wagerechter Bahn geführtes Kämpfergelenk, damit diese Pfeiler nur senkrechte Drücke erfahren. An den Enden sind feste Kämpfergelenke angeordnet, Fig. 298.

Liegen sämmtliche Gelenke in einer wagerechten Geraden, so sind die senkrechten Stützenwiderstände A, B, C unabhängig von H und ebenso gross als bestände das Tragwerk aus einzelnen Balken AC_1, C_1C_2, . . . Man erhält z. B. für die in Fig. 298 angenommene Belastung:

$$A = P_1 \frac{b_1}{l_1}; \quad C_1 = P_1 \frac{a_1}{l_1} + P_2 \frac{b_2}{l_2}; \quad C_2 = P_2 \frac{a_2}{l_2} + P_3 \frac{b_3}{l_3}; \quad B = \frac{P_3 a_3}{l_3}.$$

Um die H-Linie zu bestimmen, berechne man für jede einzelne Oeffnung die den Gewichten $w = \frac{ys}{r^2} \frac{F_e}{F}$ entsprechenden einfachen Balkenmomente M_w — *genau wie beim Zweigelenkbogen* (Seite 195) —

und dividire dieselben durch die über die Knotenpunkte *sämmtlicher* Oeffnungen auszudehnende Summe: $\Sigma z = \Sigma y w$. Man erhält für $P = 1$:

$$H = \frac{M_w}{\Sigma z}.$$

Aus der durchweg positiven H-Linie werden alle übrigen Einflusslinien ganz in derselben Weise abgeleitet wie beim Zweigelenkbogen.

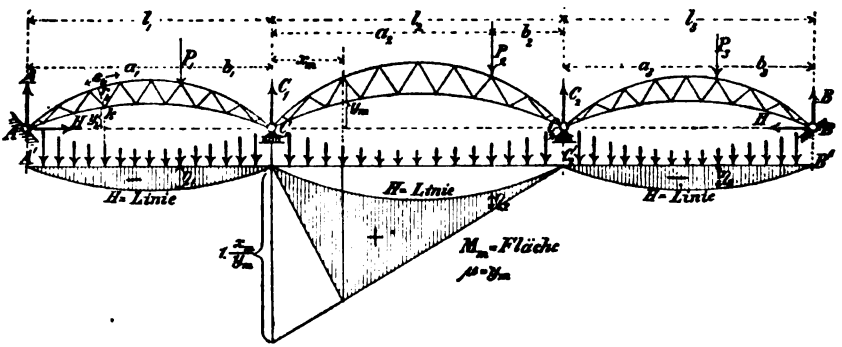


Fig. 298.

In Fig. 298 ist beispielsweise die M_m-Fläche für einen Knotenpunkt m der Mittelöffnung $C_1 C_2$ dargestellt worden; sie unterscheidet sich von der M_m-Fläche eines Zweigelenkbogens $C_1 C_2$ (abgesehen von den kleineren Ordinaten der H-Linie) nur dadurch, dass sie links von C_1 und rechts von C_2 einen aus den negativ zu nehmenden H-Flächen bestehenden Zuwachs erhält. Denn Lasten, welche ausserhalb der Oeffnung $C_1 C_2$ liegen, beeinflussen das zweite Glied des Ausdruckes

$$M_m = M_{om} - H y_m.$$

Für den in Folge einer gleichmässigen Zunahme der Anfangstemperatur um t^0 entstehenden Horizontalschub findet man (vgl. S. 199)

$$H_t = \frac{\varepsilon E t F_o \Sigma l}{\Sigma z_m},$$

wo Σl die Summe der Stützweiten sämmtlicher Oeffnungen bedeutet.

107. Kette, versteift durch mehrere Einzelbalken. Der in No. 106 behandelten Bogenbrücke kann man die in Fig. 299 dargestellte, durch Einzelbalken versteifte Kettenbrücke an die Seite stellen. Jeder Balken erhält ein festes und ein bewegliches Auflager. Behufs Ermittlung der H-Linie berechne man auch hier für jede einzelne Oeffnung die den Gewichten $w = \frac{y s}{r^2} \frac{F_o}{F}$ entsprechenden einfachen Balkenmomente M_w und dividire dieselben durch den Ausdruck

$$\mathfrak{N} = \Sigma z + \frac{F_o}{F_k}(\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha'')$$
$$+ \frac{F_o}{F_s} \Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2,$$

dessen Summen sich über sämmtliche Oeffnungen erstrecken. Man erhält für $P = 1$:

$$H = \frac{M_m}{\mathfrak{N}}.$$

Aus der durchweg positiven H-Linie werden die übrigen Einflusslinien in derselben Weise abgeleitet wie im § 9, No. 101. In Fig. 299 ist als Beispiel die M_m-Fläche für einen Knotenpunkt der Mittelöffnung gezeichnet worden.

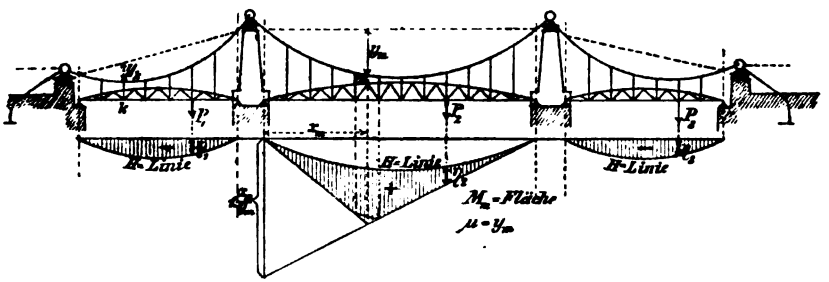


Fig. 299.

Für den Horizontalzug in Folge einer Temperaturänderung erhält man nach Seite 270 und 271:

$$H_t = \frac{\varepsilon E F_o t \Sigma S' s}{\mathfrak{N}} = -\frac{\varepsilon E F_o t}{\mathfrak{N}} [\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha + s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha''$$
$$+ \Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})].$$

Die in den vorstehenden Formeln noch enthaltenen Summenausdrücke darf man für die einzelnen Oeffnungen nach den Formeln berechnen:

$$\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha = l_1 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{c^2}{l_1^2}\right)$$

$$\Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2 = \frac{64 f_1^2 (3h' - 2f_1 - 1{,}5\, c)\, \lambda}{3 l_1^3}$$

$$\Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}) = \frac{8 f_1 (8h' - 2f_1 - 1{,}5\, c)}{3 l_1},$$

wo l_1, f_1 und c die in Fig. 279 auf Seite 268 angegebene Bedeutung haben.

Die im § 9 für Versteifungsbalken mit parallelen Gurtungen nachgewiesenen Vereinfachungen sind natürlich auch bei der Kettenbrücke mit mehreren Oeffnungen ausführbar.

108. Hängebrücke über drei Oeffnungen, bestehend aus drei Scheiben, Fig. 300, 301. Jede Scheibe ruht auf zwei Gleitlagern. An den beiden äusseren Scheiben greifen die Rückhaltketten S_1 und S_6 an, so dass jede dieser beiden Scheiben durch drei Widerstände gestützt wird, deren Richtungen sich nicht in einem und demselben Punkte schneiden. Die mittelste Scheibe wird durch vier Kräfte gestützt, nämlich durch die an den beiden beweglichen Auflagern auftretenden Widerstände und durch die Spannkräfte S_3 und S_4, welche an den mit Hilfe der Stäbe S_2 und S_5 festgehaltenen Gleitlagern C angreifen. Das vorliegende Tragwerk ist deshalb einfach statisch unbestimmt; es unterscheidet sich von dem im I. Bande, § 47, Seite 389 untersuchten Hängewerke nur dadurch, dass das Scheitelgelenk fehlt. Als statisch unbestimmte Grösse wird wieder der Horizontalzug, d. i. die überall gleiche wagerechte Seitenkraft H der Kettenstäbe S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 eingeführt. Man findet dann für die Mittelöffnung, mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen, die Angriffsmomente

$$M_m = M_{0m} - Hy_m$$
$$M_k = M_{0k} - Hy_k$$

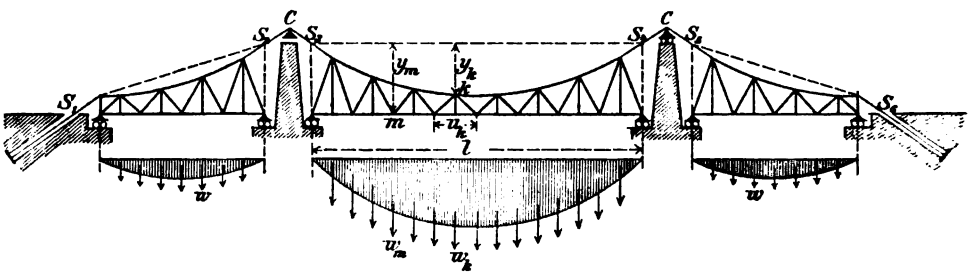


Fig. 300.

wo M_{0m} und M_{0k} die Angriffsmomente für die Punke m und k eines einfachen Balkens von der Stützweite l bedeuten. Berücksichtigt man bei Ermittlung der Durchbiegungen δ' für den Zustand $H = -1$ nur die Formänderungen der Gurtungen, so erhält man

$$w_m = -\frac{\Delta o_m}{r_m} = +\frac{y_m o_m}{r_m^2 EF_m}$$
$$w_k = +\frac{\Delta u_k}{r_k} = +\frac{y_k u_k}{r_k^2 EF_k}.$$

Will man auch die Formänderungen der Füllungsglieder berücksichtigen, so bedient man sich am zweckmässigsten der Formeln 6 und 7 auf Seite 105. Die Vertikalen sind für den Belastungsfall $H = -1$ spannungslos, sie haben also keinen Einfluss auf die Durchbiegungen δ'.

Für die über die Seitenöffnung gelegte Scheibe findet man, nach Zerlegung von S_1 in A' und H' (Fig. 301) und von S_2 in B' und H', die Gleichgewichtsbedingungen

$$(A - A')\,l = Pb \quad (B + B')\,l = Pa$$
$$A' = H(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha) \quad B' = H(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha)$$

mithin

$$A = \frac{Pb}{l} + H(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha)$$

$$B = \frac{Pa}{l} - H(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha).$$

Die Angriffsmomente sind

$$M_m = M_{0m} - Hy_m, \quad M_k = M_{0k} - Hy_k.$$

Die Spannkraft in einer Diagonale ist

$$D = D_0 - H\frac{y_i}{r_i}$$

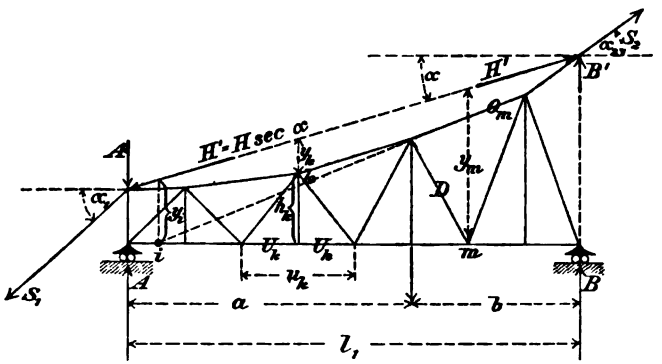


Fig. 301.

wo r_i das Loth von i auf D bedeutet. M_{0m}, M_{0k}, D_0 sind die Werthe für den einfachen Balken AB. Damit sind auch die Gewichte w bestimmt. Zu beachten ist, dass in der Formel

$$H = P_m \frac{\delta'_m}{\Sigma S'^2 s \frac{F_0}{F}}$$

die im Nenner stehende Summe die drei Scheiben und die 6 Stäbe S_1 bis S_6 umfasst. Bezüglich des Einflusses der ständigen Belastung g und einer Belastung g' wird auf Seite 266 verwiesen.

b. Das statisch bestimmte Hauptnetz ist ein Gerberscher Balken.

109. Ausleger-Bogenbrücke mit drei Oeffnungen. Das Tragwerk in Figur 302 besteht aus einem Zweigelenkbogen AB mit Auslegern AG_1 und BG_2, welche zur Unterstützung der Einzelbalken CG_1 und G_2D bestimmt sind. Wird eines der beiden festen Lager

A, B in ein auf wagerechter Bahn bewegliches verwandelt, so entsteht ein Gerberscher Balken (Zustand $H = 0$), dessen Angriffsmomente mit M_0 bezeichnet werden mögen, und dessen senkrechte Stützenwiderstände $= A, B, C, D$ seien. Durch Hinzutreten der Widerstände H werden die senkrechten Auflagerkräfte sowie die Spannkräfte in den äusseren Oeffnungen CA und BD nicht geändert. Nur im mittleren Theile AB sind die Stabkräfte S abhängig von H; sie lassen sich auf die Form bringen: $S = S_0 - S'H$ wo S_0 den Werth von S für $H = 0$ bedeutet und S' die Spannkraft in Folge $H = -1$ ist.

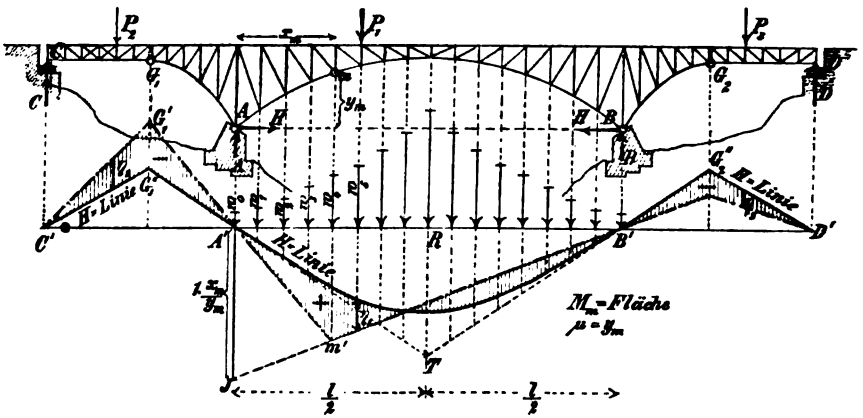


Fig. 302.

Zur Ermittlung der H-Linie benutzen wir wieder das Gesetz:

$$H = P \frac{\delta'}{\Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F}},$$

wo δ' die mit EF_c multiplicirte Ordinate der Biegungslinie für den Zustand $H = -1$ vorstellt. Diese Biegungslinie besteht zwischen A und B aus einem Polygon, welches genau so bestimmt wird, wie für einen gewöhnlichen Zweigelenkbogen AB, ferner aus den Geraden $A'G_1''$, $G_1''C'$ und $B'G_2'$, $G_2'D'$, welche den bei Eintreten des Zustandes $H = -1$ spannungslos bleibenden Auslegern und Einzelbalken entsprechen. Wird die Biegungslinie des Theiles AB durch Aufzeichnung eines Seilpolygons gewonnen, so erhält man die Geraden $A'G_1''$ und $B'G_1''$ als die äussersten Seiten dieses Polygons. Meistens führt jedoch die Berechnung der H-Linie mittels der Formel

$$H = \frac{M_w}{\Sigma z} \text{ (vergl. § 7).}$$

schneller zum Ziele. In diesem Falle empfiehlt es sich, behufs Verlängerung der H-Linie über A' und B' hinaus, sämmtliche Gewichte

w zur Σw zu vereinigen, das Moment $\Sigma w \frac{l}{4}$ zu berechnen, welches dieses Gewicht in der Mitte eines einfachen Balkens $A'B'$ hervorbringt, hierauf senkrecht zu $A'B'$ die Strecke $\overline{RT} = \frac{\Sigma wl}{4 \Sigma z}$ aufzutragen und die Geraden TA' und TB' zu ziehen. Es ist dann $A'G_1''$ die Verlängerung der Geraden TA' und $B'G_2''$ die Verlängerung von TB'. Lasten P, welche links von A' oder rechts von B' aufgebracht werden, rufen einen *negativen* Horizontalschub H hervor.

Hätte beispielsweise der mittlere Theil AB die Abmessungen des in Fig. 211 auf Seite 207 dargestellten Zweigelenkbogens, so würde zwischen A und B die in Fig. 211 dargestellte H-Linie ohne jede Aenderung beizubehalten sein. Man würde dann $\Sigma w = (w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4)\ 2 + w_5 = (0{,}33^*) + 0{,}88 + 2{,}35 + 15{,}00)\ 2 + 20{,}00 = 57{,}12$ erhalten, mithin

$$\overline{RT} = \frac{\Sigma wl}{4 \cdot \Sigma z} = \frac{57{,}12 \cdot 20}{4 \cdot 183{,}356} = 1{,}56.$$

Der Horizontalschub in Folge einer Temperaturänderung ist ebenso gross wie der eines Zweigelenkbogens AB.

Behufs Herleitung der übrigen Einflusslinien aus der H-Linie beachte man, dass sich die Mittelöffnung bei unbelasteten Seitenöffnungen genau wie ein gewöhnlicher Zweigelenkbogen verhält. Will man also beispielweise die M_m-Fläche zeichnen, so trage man (wie in Fig. 220, Seite 216) $\overline{A'J} = 1 \frac{x_m}{y_m}$ auf, ziehe JB', bestimme m' lothrecht unter m, verbinde m' mit A' und subtrahire die H-Fläche von dem die $\frac{M_{0m}}{y_m}$-Fläche vorstellenden Dreiecke $A'm'B'$. Der Unterschied beider Flächen ist die M_m-Fläche des Zweigelenkbogens AB; der Multiplikator ist $= y_m$. Verlängert man nun die Geraden $m'A'$ und $m'B'$ bis zu ihren Schnittpunkten G_1', G_2' mit den Senkrechten durch G_1, G_2, und zieht man schliesslich die Geraden $G_1'C'$, $G_2'D'$ so giebt der Linienzug $C'G_1'A'm'B'G_2'D'$ die auf $A'B'$ als Nulllinie bezogenen $\frac{M_{0m}}{y_m}$-Linie des Gerber'schen Balkens $CABD$ an, und die in Fig. 302 schraffirte, zwischen dieser Linie und der H-Linie gelegene Fläche ist daher die gesuchte M_m-Fläche.

110. Stabbogen, versteift durch einen Gerber'schen Balken. Ganz ebenso wie der in No. 109 untersuchte Träger werden die in den Figuren 303 und 304 dargestellten Stabgebilde behandelt. Zuerst werden die Einflusslinien für die Mittelöffnung genau so gezeichnet, als

*) Der Werth $w_0 = \frac{h_0}{h_0^2} = \frac{1}{3{,}0} = 0{,}33$ wurde früher nicht gebraucht, da er ohne Einfluss auf die Momente M_w ist.

wären die Seitenöffnungen gar nicht vorhanden, und schliesslich werden sie über A' und B' hinaus auf die vorhin beschriebene Weise verlängert. In Fig. 303 ist eine Q-Fläche eingezeichnet worden.

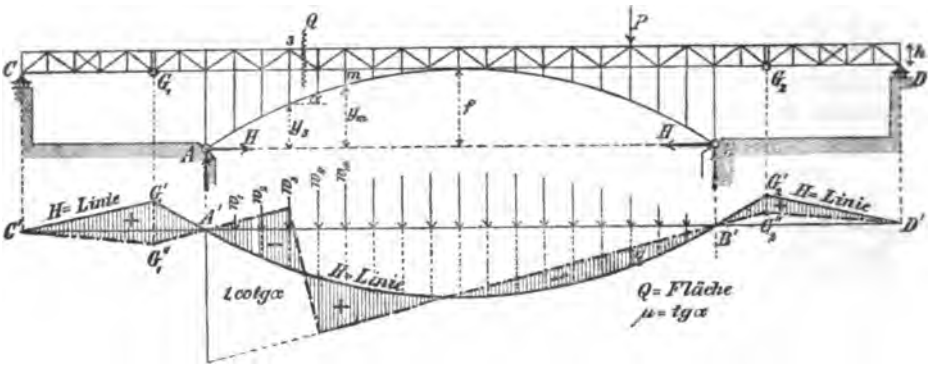


Fig. 303.

Fig. 304.

§ 11.

Fachwerkbogen mit eingespannten Kämpfern.

111. Der bereits auf Seite 158 in ganz allgemeiner Weise behandelte Bogenträger mit eingespannten Enden ist dreifach statisch unbestimmt und erfordert daher die Aufstellung von drei Elasticitätsbedingungen. Diese soll hier nach zwei verschiedenen Verfahren erfolgen, von denen das erste an die Voraussetzung senkrechter Lasten gebunden ist, während die zweite Untersuchung Einzelkräfte beliebiger Richtung berücksichtigen wird. Besonders hervorzuheben ist, dass bei der Herleitung der Elasticitätsgleichungen die Längenänderungen der Füllungsstäbe in der Regel vernachlässigt werden dürfen. Beim Bogen mit eingespannten Kämpfern erweist sich der Einfluss der Temperaturänderungen (welche doch nur geschätzt werden können) als so bedeutend, dass eine allzu peinliche Ermittlung der übrigen Einflüsse noch viel weniger am Platze ist, wie beim Zweigelenkbogen. Auch die Annahme eines überall gleichen oder nach einem einfachen Gesetze sich ändernden Gurtquerschnitts ist zur Vereinfachung der Rechnung meistens anzurathen.

a. Erstes Verfahren.

112. Einfluss einer senkrechten Einzellast (Fig. 305). Die Einzellast P erzeugt Stützenwiderstände (Kämpferdrücke) K_1 und K_2, welche P in demselben Punkte C treffen, und deren Schnittpunkte mit den Senkrechten durch die äussersten Stützpunkte A und B mit F_1 und F_2 bezeichnet werden mögen. Der Linienzug $F_1 C F_2$ heisst das *Mittelkraftspolygon* und die Gerade $F_1 F_2$ die *Schlusslinie*.

Der senkrechte Abstand NQ eines Punktes des Mittelkraftspolygons von der Schlusslinie ist gleich dem durch den Horizontalschub H des Bogens dividirten Biegungsmomente M_0 eines durch die Last P beanspruchten einfachen Balkens $A'B'$, dessen Stützweite $= l$ ist und der an den Enden frei aufliegt.*) Es folgt deshalb

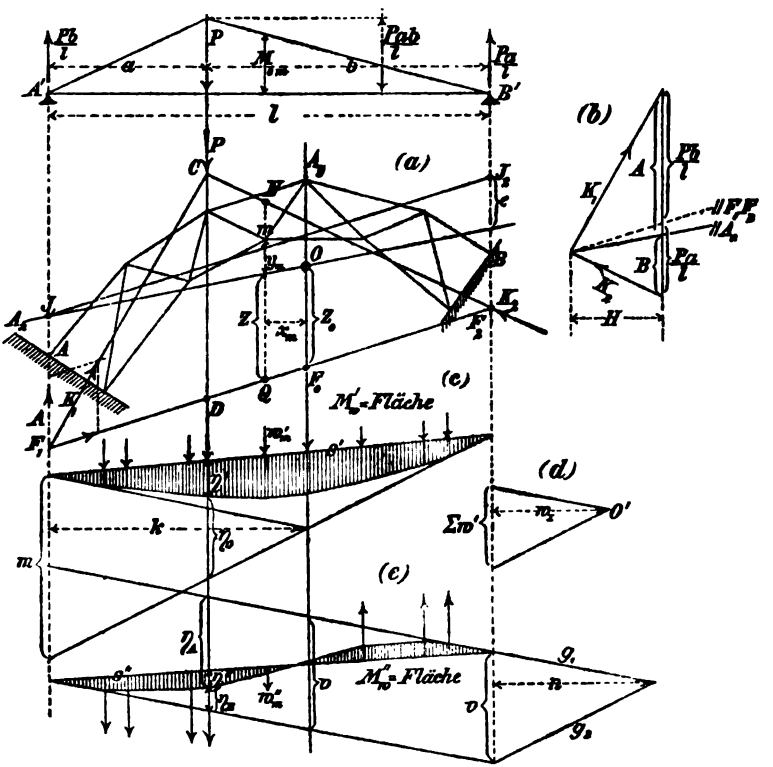


Fig. 305.

*) Man betrachte $F_1 C F_2$ als Culmann'sche Momentenfläche des einfachen Balkens $A'B'$.

$$\overline{CD} = \frac{Pab}{lH},$$

und hiernach ist das Dreieck $F_1 C F_2$ und somit auch die Richtung von K_1 und K_2 bestimmt, sobald die Schlusslinie $F_1 F_2$ und der Horizontalschub H gegeben sind.

Wir beziehen den Bogenträger auf eine senkrechte Achse A_y und eine schräg liegende Achse A_x. Neigung der A_x und Lage des Ursprungs O seien vorläufig beliebig. Die Lage der Schlusslinie bestimmen wir durch Angabe ihres Schnittpunktes F_o mit der Achse A_y, d. h. durch Angabe der Strecke z_o in Fig. 305[a], ferner durch die Strecke e, welche die zur Schlusslinie parallele Gerade $J_1 J_2$ auf der Senkrechten durch B abschneidet.

Behufs Ermittlung des Angriffsmomentes M_m für irgend einen Knotenpunkt m führen wir durch m einen senkrechten Schnitt, zerlegen den von diesem Schnitte in N getroffenen Kämpferdruck (hier K_2) im Punkte N in eine senkrechte und eine wagerechte Seitenkraft und erhalten:

$$M_m = H \cdot \overline{Nm}.$$

Sind nun y_m und x_m der senkrechte bezw. wagerechte Abstand des Punktes m von den Achsen A_x und A_y, so ergiebt sich

$$\overline{Nm} = \overline{NQ} - y_m - z,$$

$$\frac{z - z_o}{x_m} = \frac{e}{l}, \quad \text{also } z = \frac{e}{l} x_m + z_o$$

mithin (wegen $H \cdot \overline{NQ} = M_{om}$):

$$M_m = M_{om} - H y_m - \frac{He}{l} x_m - H z_o. \tag{1}$$

Indem wir nun die Bezeichnungen einführen

$$H z_o = X'; \quad \frac{He}{l} = X''; \quad H = X''', \tag{2}$$

erhalten wir die Gleichung

$$M_m = M_{om} - X' - X'' x_m - X''' y_m, \tag{3}$$

welche die Berechnung der Momente M_m gestattet, *sobald die drei statisch nicht bestimmbaren Grössen* X', X'', X''' gefunden sind.

Zur Berechnung der X bedienen wir uns der Gleichungen (V) auf Seite 168. Wir nehmen starre Widerlager an, setzen also $L' = 0$, $L'' = 0$, $L''' = 0$. Auch vernachlässigen wir die Formänderung der Füllungsstäbe.

Die Spannkraft des einem Knotenpunkte m gegenüberliegenden Gurtstabes ist

$$S = \mp \frac{M_m}{r_m} \tag{4}$$

und zwar gilt das obere Vorzeichen für die obere, das untere für die untere Gurtung. Den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$ entsprechen die Momente:

$$(5) \qquad M_m' = +1; \quad M_m'' = +x_m; \quad M_m''' = +y_m$$

und die Stabkräfte:

$$(6) \qquad S' = \mp\frac{1}{r_m}; \quad S'' = \mp\frac{x_m}{r_m}; \quad S''' = \mp\frac{y_m}{r_m}.$$

Wählen wir nun das Achsenkreuz A_x, A_y derart, dass die Summen

$$\Sigma S'S''\frac{s}{EF}; \quad \Sigma S'S'''\frac{s}{EF}; \quad \Sigma S''S'''\frac{s}{EF} \text{ *)}$$

verschwinden, dass also die Bedingungen:

$$(7) \qquad \Sigma\frac{x_m s_m}{EF_m r_m^2} = 0; \quad \Sigma\frac{y_m s_m}{EF_m r_m^2} = 0; \quad \Sigma\frac{x_m y_m s_m}{EF_m r_m^2} = 0$$

erfüllt werden, so gehen die Gleichungen (V) für *eine* Einzellast P über in:

$$(8) \qquad \begin{cases} X' \ \Sigma\dfrac{s_m}{EF_m r_m^2} = P\delta' + \Sigma S'\varepsilon ts \\ X'' \ \Sigma\dfrac{x_m^2 s_m}{EF_m r_m^2} = P\delta'' + \Sigma S''\varepsilon ts \\ X''' \ \Sigma\dfrac{y_m^2 s_m}{EF_m r_m^2} = P\delta''' + \Sigma S'''\varepsilon ts, \end{cases}$$

wo δ', δ'', δ''' die an der Stelle P gemessenen Ordinaten der den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$ entsprechenden Biegungslinien bedeuten.

Zur weiteren Vereinfachung der Rechnung schreiben wir sämmtlichen Gurtstäben denselben Querschnitt F (Mittelwerth der F_m) zu und setzen feste Werthe E, ε, t voraus. Multipliciren wir dann die Gleichungen (8) mit EF, so erhalten wir mit der Bezeichnung: $\frac{s_m}{r_m^2} = w_m'$ **) den Einfluss einer Einzellast P:

$$(9) \qquad X' = P\frac{EF\delta'}{\Sigma w_m'}; \quad X'' = P\frac{EF\delta''}{\Sigma x_m^2 w_m'}; \quad X''' = P\frac{EF\delta'''}{\Sigma y_m^2 w_m'}$$

ferner den Einfluss einer gleichmässigen Erwärmung um t^0:

$$(10) \quad X_t' = \frac{\varepsilon EFt\Sigma S's}{\Sigma w_m'}; \quad X_t'' = \frac{\varepsilon EFt\Sigma S''s}{\Sigma x_m^2 w_m'}; \quad X_t''' = \frac{\varepsilon EFt\Sigma S'''s}{\Sigma y_m^2 w_m'}.$$

---

*) In den angezogenen Gleichungen (V) ist $\rho = \frac{s}{EF}$.

**) Sollen verschieden grosse Gurtquerschnitte F_m berücksichtigt werden, so muss $w_m' = \frac{s_m}{r_m^2}\frac{F}{F_m}$ gesetzt werden.

Die Bedingungen, welche durch geeignete Wahl der Lagen der Achsen A_x, A_y zu erfüllen sind, lauten:

$$(11) \qquad \Sigma x_m w_m' = 0, \quad \Sigma y_m w_m' = 0, \quad \Sigma x_m y_m w_m' = 0.$$

Wird dem Knotenpunkte m das Gewicht w_m' beigelegt, so fordern die Gleichungen (11):

1. Der Ursprung O muss mit dem Schwerpunkte der Gewichte w' zusammenfallen.
2. Die Richtung der Achse A_x muss so gewählt werden, dass das Centrifugalmoment der Gewichte w' gleich Null ist.

In der Regel wird der Bogen symmetrisch sein in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte. Dann fällt die Achse A_y mit der Symmetrieachse zusammen und die Achse A_x mit der wagerechten Schwerachse der Gewichte w'.

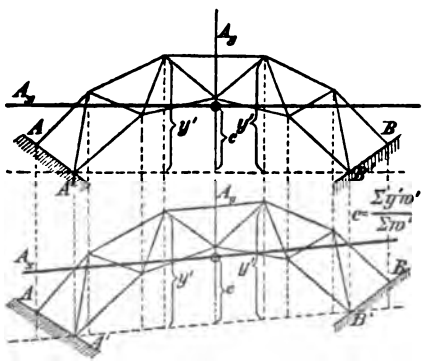


Fig. 306.

Einen steigenden Bogen leite man, falls der Unterschied in der Höhenlage der Kämpfer gering ist, nach Fig. 306 aus einem symmetrischen Bogen ab und schreibe den einander entsprechenden Knotenpunkten beider Bogenhälften gleiche Gewichte w' zu.*) Man erreicht hierdurch, dass die Achse A_y mit der Mittelsenkrechten und die A_x mit der zu $A'B'$ parallelen Schwerachse der Gewichte w' zusammenfällt.

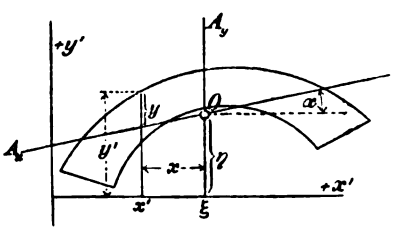


Fig. 307.

Ganz allgemein findet man die Achsen A_x, A_y wie folgt. Man bezieht den Bogen zunächst auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz x', y' mit wagerechter x'-Achse (Fig. 307) berechnet die Summen;

$$\Sigma w', \ \Sigma w'x', \ \Sigma w'y', \ \Sigma w'x'^2, \ \Sigma w'y'^2, \ \Sigma w'x'y'$$

bezeichnet mit ξ, η die Koordinaten von O in Bezug auf x', y', mit α den Neigungswinkel der A_x gegen

*) Diese Annahme ist ebenso zulässig, wie die Annahme $F : F_m = 1$.

die x'-Achse und hat dann:

$$x = \xi - x'$$
$$y = y' - x' \operatorname{tg}\alpha - (\eta - \xi \operatorname{tg}\alpha).$$

Die Gleichungen $\Sigma w' x = 0$, $\Sigma w' y = 0$, $\Sigma w' xy = 0$ liefern nun:

$$(12) \quad \left| \begin{array}{l} \xi = \dfrac{\Sigma w' x'}{\Sigma w'}, \quad \eta = \dfrac{\Sigma w' y'}{\Sigma w'} \\ \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\xi \Sigma w' y' - \Sigma w' x' y'}{\xi \Sigma w' x' - \Sigma w' x'^2}. \end{array} \right.$$

Schliesslich bestimmt man noch

$$\Sigma w' x^2 = \Sigma w' x'^2 - \xi^2 \Sigma w'$$
$$\Sigma w' y^2 = \Sigma w' y'^2 - \eta^2 \Sigma w' - \operatorname{tg}^2\alpha \, \Sigma w' x^2.$$

Natürlich kann man auch die auf der Darstellung von Momenten zweiter Ordnung beruhende Ermittlung von $\operatorname{tg}\alpha$ auf zeichnerischem Wege mit Hilfe von Band I, § 5—7 ausführen.

Nach Festlegung der Achsen A_y, A_x bestimme man die Zähler der für X', X'', X''' gefundenen Ausdrücke (9) wie folgt.

Man erwäge, dass den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$ die Momente

$$(13) \qquad M_m' = 1; \quad M_m'' = \frac{x_m}{r_m}; \quad M_m''' = \frac{y_m}{r_m}$$

entsprechen, und dass sich die mit EF multiplicirten Durchbiegungen δ', δ'', δ''' als die Momente eines einfachen Balkens $A'B'$ (des statisch bestimmten Hauptsystems) deuten lassen, welcher beziehungsweise belastet wird mit den Gewichten:

$$w_m' = \frac{M_m' s_m}{r_m^2}; \quad w_m'' = \frac{M_m'' s_m}{r_m^2}; \quad w_m''' = \frac{M_m''' s_m}{r_m^2} \text{ *), d. h. mit}$$

$$(14) \qquad w_m' = \frac{s_m}{r_m^2}; \quad w_m'' = \frac{x_m s_m}{r_m^2}; \quad w_m''' = \frac{y_m s_m}{r_m^2}.$$

Bezeichnet man also die unter P gemessenen Ordinaten dieser einfachen Momentenlinien mit M_w', M_w'', M_w''' so erhält man: $EF\delta' = M_w'$; $EF\delta'' = M_w''$; $EF\delta''' = M_w'''$ und findet schliesslich für die Einflusslinien der Grössen X', X'', X''' die Gleichungen:

$$(15) \qquad X' = P\frac{M_w'}{\Sigma w'}; \quad X'' = P\frac{M_w''}{\Sigma x_m w_m''}; \quad X''' = P\frac{M_w'''}{\Sigma y_m w_m'''}. \text{ **)}$$

---

*) Vergl. Seite 188, Gleichung (2), in welcher $\frac{F_o}{F_m} = 1$ zu setzen ist.

**) Die Gleichung für $H = X'''$ stimmt mit der im § 7 zur Berechnung des Horizontalschubes eines Zweigelenkbogens erhaltenen Formel überein. Nur ist jetzt y auf eine andere Achse bezogen. Wir machen noch auf die im § 7 für verschiedene Sonderfälle gezeigten Umformungen und Kürzungen der Gewichte w aufmerksam; dieselben sind natürlich auch bei eingespannten Bogenträgern brauchbar.

Aus den Einflusslinien für die Grössen X', X'', X''' kann man jetzt alle übrigen Einflusslinien ableiten und zwar lassen sich hierzu verschiedene Verfahren anwenden.

1. Mit Hilfe der Gleichungen

$$\frac{M_m}{h_m} = \frac{M_{om}}{h_m} - \frac{X'}{h_m} - X'' \frac{x_m}{h_m} - X''' \frac{y_m}{h_m}$$

ermittle man die $(M:h)$-Linien und hieraus nach Seite 213 und 214 die Einflusslinien für die Stabkräfte.

An Stelle von $\frac{X'}{h_m}$ schreibe man $\frac{X'}{d}\,\frac{d}{h_m}$, wo d eine beliebig anzunehmende Strecke bedeutet. Die Multiplikation der $\frac{X'}{d}$, X'', X''' mit $\frac{d}{h_m}$, $\frac{x_m}{h_m}$, $\frac{y_m}{h_m}$ führe man (nach Seite 174 und 175) mit Hilfe von Winkeln aus, deren Tangenten gleich den Multiplikatoren sind.

2. Man bestimme für verschiedene Lagen der Einzellast $P = 1$ die Mittelkraftspolygone $F_1 C F_2$ (Fig. 305) und benutze diese zur Berechnung der Ordinaten $(M:h)$-Linien.

3. Nach Aufzeichnung der Einflusslinien für die Gurtkräfte bestimme man die Einflusslinien für die Spannkräfte in den Füllungslinien nach No. 72.

4. Man nehme die Lasteinheit P der Reihe nach in sämmtlichen Querträgerangriffspunkten an, zeichne für jeden einzelnen dieser Belastungszustände einen Cremona'schen Kräfteplan und bestimme die Einflusslinien der Stabkräfte mit Hilfe dieser Kräftepläne.

113. Die Aufgabe, das Mittelkraftspolygon $F_1 C F_2$ (Fig. 305) zu zeichnen, lässt sich — ausser durch Bestimmung der Werthe $z_o = \frac{X'}{H}$ und $e = \frac{X''}{H} l$ — noch in folgender Weise lösen.

Verbindet man die Gewichte w' und w'' durch Seilpolygone (Fig. 305), deren Polweiten w_I und w_{II} sein mögen*), so erhält man nach Eintragung der Schlusslinien s', s'' die Momente

$$M_w' = w_I \eta'; \quad M_w'' = w_{II} \eta''. \quad \text{(Fig. 305}^{c \text{ u. } e}\text{)}.$$

Die äussersten Seiten des ersten Seilpolygons schneiden sich auf der Achse A_y, da ja diese Gerade die senkrechte Schwerachse der Ge-

*) Zum ersten Seilpolygon haben wir in Fig. 305^d das zugehörige Kräftepolygon theilweise gezeichnet.

wichte w' ist, und man findet:

$$\Sigma w' : w_I = m : k \text{ also } \Sigma w' = w_I \frac{m}{k} \text{ und (nach Gleich. 15)}$$

$$X' = P \frac{\eta' k}{m}.$$

Die äussersten Seiten des zweiten Seilpolygons schneiden auf der Achse A_y die Strecke $v = \frac{\Sigma x w''}{w_{II}}$ ab; sie sind einander parallel, weil die Summe der Gewichte w'' (nämlich $\Sigma w'' = \Sigma x w'$) gleich Null und deshalb die Mittelkraft der w'' unendlich klein und unendlich fern ist. Es ergiebt sich nach (15):

$$X'' = P \frac{\eta''}{v},$$

und, wenn die Lasteinheit P durch eine Strecke von der Länge v dargestellt wird:

$$X'' = \eta''; \quad X' = \frac{vk}{m} \eta' = n \eta',$$

wobei n nach Fig. 294 mittels der parallel zu den äussersten Seiten des ersten Seilpolygons gezogenen Geraden g_1 und g_2 (Fig. 305[e]) bestimmt werden kann.

Zerlegt man nun die Kämpferdrücke K_1, K_2 nach senkrechter Richtung und nach der Richtung der Achse A_x, und bezeichnet man die senkrechten Seitenkräfte mit A und B (Fig. 305[b]), so findet man leicht:

$$A : H = \left(\overline{CD} + \frac{e}{l} a\right) : a, \text{ wo } CD = \frac{Pab}{lH},$$

weshalb

$$A = \frac{Pb}{l} + \frac{He}{l} = \frac{Pb}{l} + X'' = \frac{vb}{l} + \eta''$$

und hieraus folgt, dass das Seilpolygon der Gewichte w'' die Strecke $v = P$, welche seine äussersten Seiten auf der Last P abschneiden in die Theile

$$\eta_A = A \text{ und } \eta_B = B$$

zerlegt. Hat man also den Horizontalschub H mit Hilfe eines die Gewichte w''' verbindenden Seilpolygons durch eine Strecke η''' dargestellt (was möglich ist, weil nach Gleichung 15 die Kraft $X''' = H$ proportional η''' ist), so ist man im Stande, die Kämpferdrücke nach Grösse und Richtung anzugeben, und braucht jetzt nur noch einen Punkt des Linienzuges $F_1 C F_2$ zu bestimmen (Fig. 308).

Besonders einfach gestaltet sich nun die Bestimmung der Schnittpunkte R der Kämpferdrücke mit der Achse A_x. Wir bezeichnen die

Entfernung des Punktes R_1 von der A_y mit ξ und berechnen diese Strecke, indem wir die Summe der Momente der im Gleichgewichte befindlichen Kräfte K_1, K_2, P in Bezug auf F_o gleich Null setzen. Vorher ersetzen wir jedoch P durch die beiden in F_1 und F_2 angreifenden Seitenkräfte $\frac{Pb}{l}$ und $\frac{Pa}{l}$ zerlegen K_1 und K_2 auf die in Fig. 297 angegebene Weise, verschieben die in die Achse A_x fallende Seitenkraft

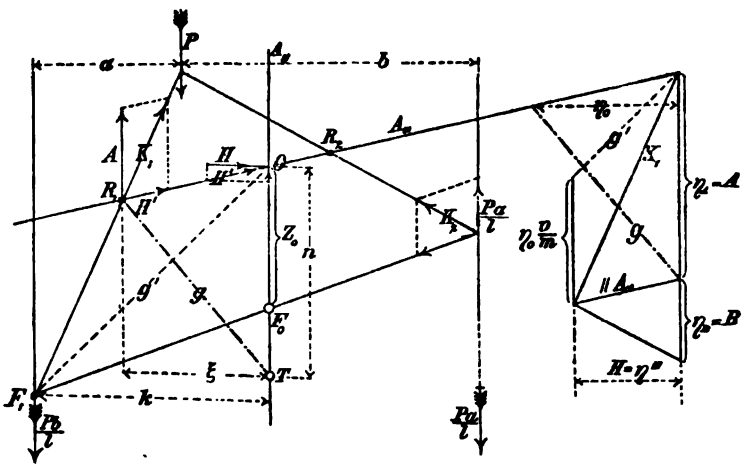


Fig. 308.

von K_1 nach O und zerlegen sie dort nach wagerechter und senkrechter Richtung. Die fragliche Momentengleichung lautet dann:

$$A\xi + Hz_o - \frac{Pb}{l}k = 0, \text{ d. h.}$$

$$\eta_A\xi + n\eta' - v\frac{b}{l}k = 0;$$

sie liefert, wegen $v\frac{k}{m} = n$:

$$\xi = \frac{n}{\eta_A}\left(b\frac{m}{l} - \eta'\right) = \frac{n\eta_o}{\eta_A},$$

wo η_o in Fig. 305 die Strecke bedeutet, welche das Seilpolygon der Gewichte w' und die letzte Seite dieses Polygons auf der Last P abschneiden. Die hieraus sich ergebende zeichnerische Bestimmung des Punktes R_1 zeigt Fig. 308; die von dem im festen Abstande n von O gelegenen Punkte T aus gezogene Gerade TR_1 ist parallel zur Geraden g.

Auch der Punkt F_1 lässt sich schnell festlegen. Man trage zu diesem Zwecke vom unteren Endpunkte von K_1 die Strecke $\eta_0 \frac{v}{m}$ nach oben auf, ziehe die Gerade g' und hierauf $OF_1 \parallel g'$. Der Beweis ist leicht zu finden.

Besonders einfach gestaltet sich die doppelte Bestimmung der Lage von K_2, wenn man die willkürliche Polweite des Seilpolygons *II* so wählt, dass $v = m$ wird (was durch zweimaliges Aufzeichnen dieses Seilpolygons zu bewirken ist). Dann wird $\eta_0 \frac{v}{m} = \eta_0$ und $n = k$.

114. Wir wenden nun das im Vorstehenden entwickelte Verfahren auf einen symmetrischen Bogenträger (Fig. 309a) an und stützen uns hierbei auf die im ersten Bande unseres Buches, Seite 23 u. 24, Fig. 26, gezeigte Darstellung der höheren Momente paralleler Kräfte.

Die durch Rechnung zu bestimmenden Gewichte $w' = \frac{s}{r^2}$ *) werden zunächst als lothrechte Kräfte aufgefasst und in der Reihenfolge w_1', w_2', w_3', ... durch den Seilzug *I* (Pol O_I, Polweite w_I) verbunden. Die Polweite w_I darf beliebig gross angenommen werden. Die Seiten des Seilpolygons *I* schneiden auf der Achse A_y die den Gewichten w'' proportionalen Strecken $\frac{w'x}{w_I}$ ab, welche für die Knotenpunkte der linken Trägerhälfte positiv sind, für diejenigen der rechten negativ. Betrachtet man diese Strecken als senkrechte, an die Stelle der w' tretende Kräfte, verbindet sie durch ein Seilpolygon *II* (Pol O_{II}, beliebige Polweite $= w_{II}$), und misst man senkrecht unter der in Frage kommenden Last P die durch den Seilzug *II* und dessen äusserste Seiten bestimmten Strecken η_A, η_B, v, so erhält man

$$\eta_A : \eta_B : v = A : B : P$$

und für den Kräftemaassstab $P = v$:

$$\eta_A = A; \quad \eta_B = B.$$

Da die x-Achse wagerecht ist, so sind A und B die senkrechten Stützenwiderstände.

Jetzt wird die Achse A_w als wagerechte Schwerachse der Gewichte w' bestimmt. Hierbei empfiehlt es sich, zur Erzielung einer recht deutlichen Zeichnung den Bogen verzerrt aufzutragen.

In Fig. 309b wurden die Höhen verdoppelt, auch sind die Gewichte w' zunächst in der Reihenfolge w_1', w_2', w_3', w_4', w_5', $\frac{1}{2} w_6'$ **) durch einen Seilzug *III* (Pol O_{III}, beliebige Polweite w_{III}) verbunden worden, um eine Durchkreuzung aufeinander folgender Seiten zu vermeiden. Der Schnittpunkt der äussersten Polygonseiten bestimmt die A_w, und auf dieser Achse werden von den Seiten des Seilzuges die den Gewichten w''' proportionalen Strecken $\frac{w' 2y}{w_{III}}$ abgeschnitten, welche positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem sie oberhalb oder unterhalb der A_w liegenden Knotenpunkten entsprechen. Diese

*) Vergl. die Fussnote auf Seite 299.

**) $\frac{1}{2} w_6'$, weil nur die Hälfte des symmetrischen Bogens betrachtet wird.

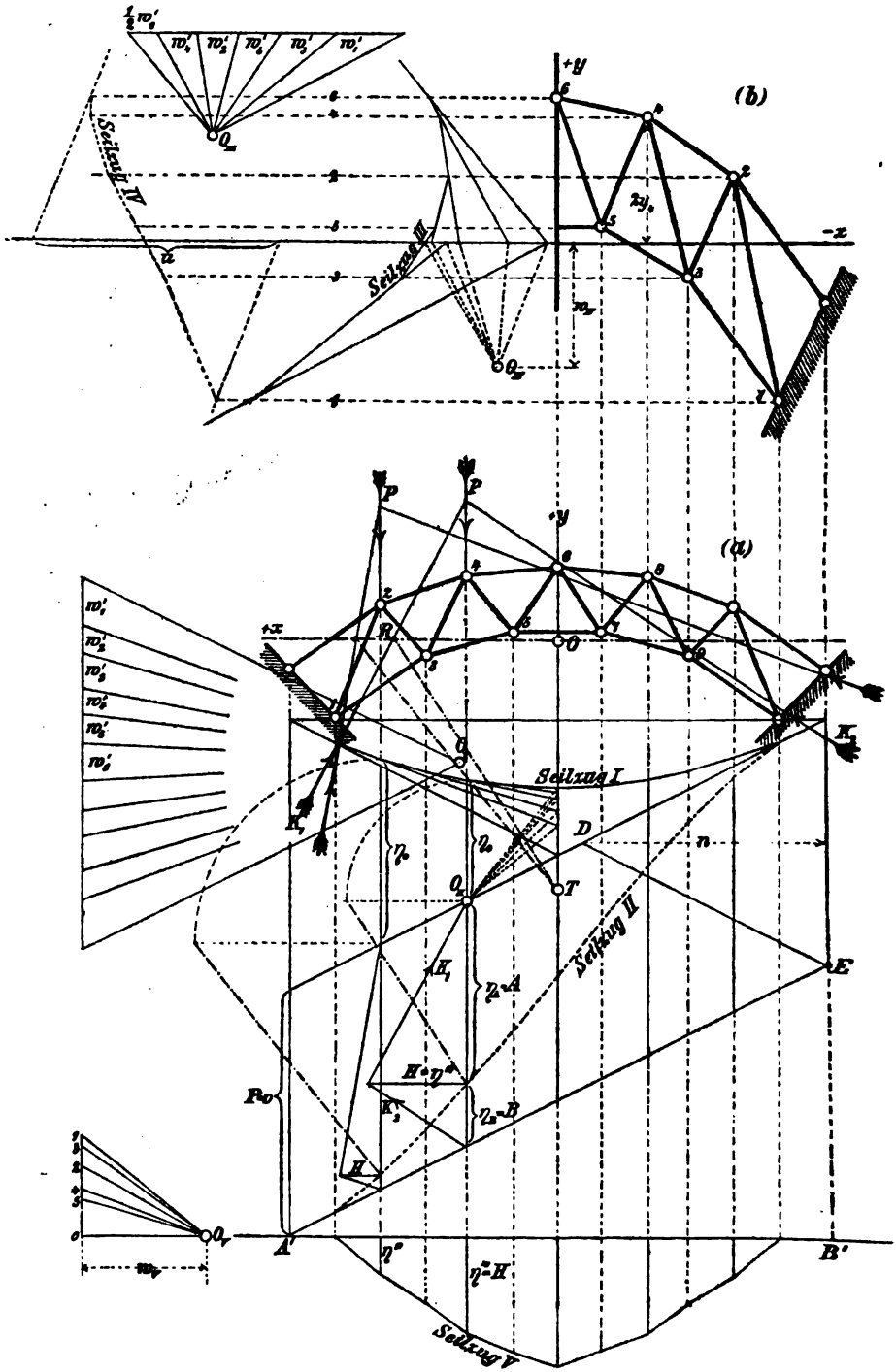

(b)
(a)
Seilzug IV
Seilzug III
Seilzug I
Seilzug II
Seilzug V
+y
-x
+x
P
D
T
E
A'
B'
n

Fig. 309.

Strecken wurden (an Stelle der w') als wagerechte Kräfte aufgefasst und durch einen Seilzug *IV* (Pol O_{IV}, beliebige Polweite w_{IV}) verbunden, dessen äusserste Seiten auf der A_x eine Strecke u abschneiden, für welche die Beziehung gilt:

$$u w_{IV} = \Sigma \frac{w' 2y}{w_{III}} 2y.$$

Hieraus folgt für eine Bogenhälfte $\Sigma w' y^2 = \frac{1}{4} w_{III} w_{IV} u$ und für den ganzen Träger:

$$\Sigma w' y^2 = \tfrac{1}{2} w_{III} w_{IV} u.$$

Um nun die zur Ermittlung von

$$H = X''' = P \frac{M_w'''}{\Sigma w' y^2}$$

dienenden Momente M_w''' zu bestimmen, wurden die Strecken $\frac{2yw'}{w_{III}}$ (an Stelle der w') als senkrechte Kräfte aufgefasst und durch ein Seilpolygon *V* (Pol O_V, Polweite w_V) verbunden, jetzt aber in der Reihenfolge 1, 2, 3, . . .*). Ist η''' die Ordinate dieses Seilzuges, so ist das Biegungsmoment des mit den Gewichten $\frac{2yw'}{w_{III}}$ belasteten Balkens $A'B'$ gleich $w_V \eta'''$, und man erhält daher für einen durch die Gewichte $w''' = w'y$ beanspruchten Balken:

$$M_w''' = \tfrac{1}{2} w_{III} w_V \eta''', \text{ weshalb}$$

$$H = P \frac{w_V \eta'''}{w_{IV} \cdot u} = \frac{v w_V}{w_{IV} u} \eta'''.$$

Wählt man also $w_V = \frac{w_{IV} \cdot u}{v}$ (z. B. $w_{IV} = \frac{1}{2} v$ und $w_V = \frac{1}{2} u$ wie dies in Fig. 309b geschehen ist)**) so findet man:

$$H = \eta''',$$

und ist jetzt im Stande, für jede Einzellast P die Kämpferdrücke K_1 und K_2 zu ermitteln. Um die Lagen dieser Kräfte anzugeben, bestimmt man mit Hilfe der zur ersten Seite des Seilzuges *I* parallelen Geraden *ED* die Strecke n und trägt dieselbe auf der Achse A_y von O aus nach T hin ab. Nun dreht man die vom Seilzug *I* und dessen letzter Seite auf P abgeschnittene Strecke η_0 um 90° nach links, verbindet ihren Endpunkt mit dem Endpunkte der Strecke η_A durch eine (strichpunktirte) Gerade und zieht zu dieser von T aus eine Parallele; dieselbe schneidet die A_x im Durchgangspunkte von K_1.

115. Einfluss einer Temperaturänderung. Zur Berechnung der von einer Temperaturänderung herrührenden Werthe X könnten die Gleichungen (10) und (6) benutzt werden; der folgende Weg verdient jedoch den Vorzug.

---

*) Im zugehörigen Kräfteplan ist die Reihenfolge der Strahlen durch Ziffern angegeben.

**) w_V ist die einzige Polweite, welche nicht willkürlich, sondern durch die vorhergehenden Polweiten bestimmt ist. Der Maassstab, in welchem die w' aufgetragen werden, ist, so lange nur der Einfluss von Lasten in Frage kommt (nicht auch der von Temperaturänderungen) ganz gleichgültig.

Wir denken die Spannkräfte $S''' = \mp 1 \frac{y_m}{r_m}$ durch zwei entgegengesetzt gleiche, nach aussen gerichtete Kräfte von der Grösse 1 sec α (Fig. 310) hervorgerufen, welche mit der Achse A_m (deren Neigungswinkel $= \alpha$ sei) zusammenfallen und deren Angriffspunkte L_1 und L_2 mit den Bogenenden durch starre Stäbe verbunden seien.*) Sodann fassen wir 1 sec α als eine Spannkraft (und zwar als einen *Druck*) auf, der in einem die Knoten L_1 und L_2 verbindenden Stabe auf irgend eine Weise erzeugt wird und wenden auf das nunmehr nur von inneren Kräften beanspruchte und in keinem Punkte gestützte Fachwerk das Gesetz der virtuellen Verschiebungen an, indem wir den Stablängen s die Aenderungen $\omega \cdot s$ zuschreiben, wo ω einen festen Werth vorstellt. Wir erhalten dann die Arbeitsgleichung

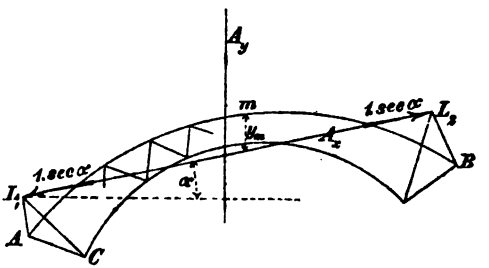


Fig. 310.

$$\Sigma S''' \omega s + \sum_1 S''' \omega s - 1 \sec \alpha \cdot \omega \overline{L_1 L_2} = 0$$

wobei sich das erste Glied auf die Stäbe des Bogenfachwerks bezieht, das zweite auf die hinzugefügten starren Stäbe, mit Ausnahme von $L_1 L_2$, das dritte schliesslich auf den Stab $L_1 L_2$. Wird ω gehoben und werden die Punkte L_1, L_2 so angenommen, dass $\sum_1 S''' s = 0$ wird, so ergiebt sich

$$\Sigma S''' s = \overline{L_1 L_2} \sec \alpha$$

und wir erhalten sehr einfach:

$$(16) \qquad X_i''' = \frac{\varepsilon E F t l''' \sec \alpha}{\Sigma y_m w_m'''},$$

wo l''' die Länge der Strecke $L_1 L_2$ bedeutet.

Zur Bestimmung des Punktes L_1 bezeichnen wir die Längen der Stäbe AL_1, CL_1, AC mit a, b, c, die durch die Kraft 1 sec α in diesen Stäben erzeugten Spannkräfte mit S_a''', S_b''', S_c''' und suchen die Er-

*) Diese Kräfte erzeugen das Angriffsmoment $M_m = 1 \sec \alpha \ (y_m \cos \alpha) = y_m$ und die Stabkraft $S_m''' = + \frac{y_m}{r_m}$. Diese Formel gilt auch für die Füllungsstäbe; an Stelle der Knoten m treten die bekannten Drehpunkte der Ritter'schen Momentengleichungen.

füllung der Gleichung

$$S_a''' a + S_b''' b + S_c''' c = 0$$

herbeizuführen. Geht der erste Füllungsstab des Bogenfachwerks durch den Punkt A, so ergiebt sich der in Fig. 311 dargestellte Kräfteplan, in welchem S_a''' die Spannkraft im ersten Gliede der unteren Gurtung bedeutet. Mit den aus der Figur zu entnehmenden Bezeichnungen der Winkel folgt, wenn AE und AE' so gezogen werden, dass $< L_1 EA = \psi$ und $< L_1 E' A = \beta$ wird:

$$\frac{-S_a'''}{S_b'''} = \frac{\sin(\psi - \gamma)}{\sin(180° - \psi)} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CE}}{c},$$

$$\frac{-S_a'''}{S_b'''} = \frac{\sin\rho}{\sin\beta} = \frac{\overline{L_1 E'}}{\overline{AL_1}} = \frac{\overline{L_1 E'}}{a}$$

und hieraus:

$$S_a''' a + S_b''' (\overline{CE} + \overline{L_1 E'}) + S_c''' c = 0.$$

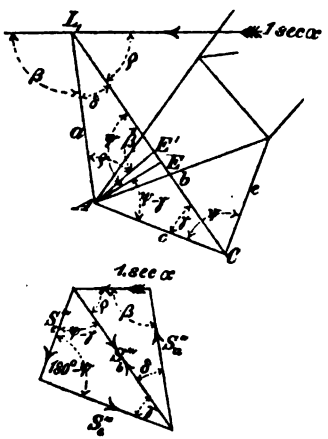


Fig. 311.

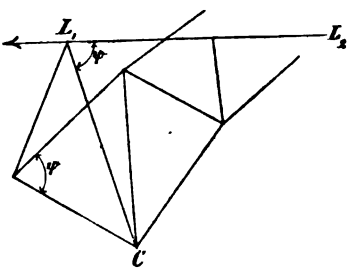


Fig. 312.

Die oben aufgestellte Bedingung wird hiernach erfüllt, sobald $\overline{CE} + \overline{L_1 E'} = b$, d. h. sobald $\beta = \psi$ wird.

Aehnlich folgt: Geht der erste Füllungsstab von C aus (Fig. 312), so muss, damit $aS_a''' + bS_b''' + cS_c''' = 0$ werde, der Winkel $L_2 L_1 C = \psi$ sein.

In derselben Weise wird der Punkt L_2 bestimmt und damit die Länge der Strecke $\overline{L_1 L_2} = l'''$ gefunden. Man vergleiche Fig. 313, in welcher die äussersten Füllungsstäbe durch A bezieh. B gehend angenommen wurden.

Durch eine Reihe ganz ähnlicher Schlussfolgerungen wird für die im Zähler des Ausdruckes für X'' stehende Summe der Werth

$$\Sigma S'' s = l'' \text{ und damit } X_i'' = \frac{\varepsilon E F t l''}{\Sigma x_m w_m''} \tag{17}$$

gefunden, wobei l'' den gegenseitigen Abstand der auf der Achse A_y gelegenen Punkte N_1 und N_2 bedeutet, welche erhalten werden, sobald man von A und B aus Gerade zieht, die mit der Achse A_y die Winkel ψ und ψ' bilden.

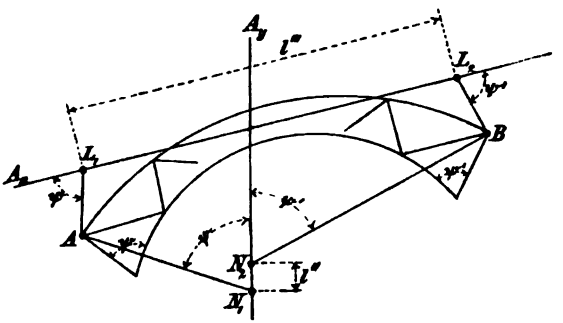


Fig. 313.

Um schliesslich noch die Summe $\Sigma S' s$ in einfacher Weise zu berechnen, denken wir uns die Momente $M' = 1$ und Spannkräfte $S_m' = \mp \frac{1}{r_m}$ durch an den Bogenenden angreifende rechts drehende Kräftepaare hervorgebracht, welche aus zur Achse A_x parallelen Kräften von der Grösse 1 bestehen und deren Arm $= 1$ ist, Fig. 314. Sind E_1,

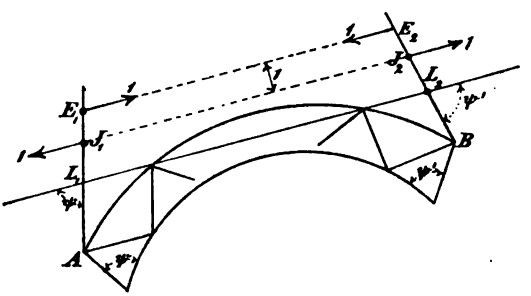


Fig. 314.

E_2, J_1, J_2 die Schnittpunkte dieser Kräfte mit den Geraden AL_1 und BL_2, so folgt aus den vorstehenden Untersuchungen

$$\Sigma S' s = \overline{J_1 J_2} - \overline{E_1 E_2} = \operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \psi'$$

und es ergiebt sich daher:

$$X_t' = \frac{\varepsilon EFt\,(\operatorname{cotg}\psi + \operatorname{cotg}\psi')}{\Sigma w_m'}. \tag{18}$$

Für den in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte symmetrischen Bogen ist $l'' = 0$ also auch $X_t'' = 0$. Ist ausserdem, was ebenfalls in der Regel (zum mindesten annähernd) zutreffen wird, $\psi = \psi' = 90°$ also $\operatorname{cotg}\psi = \operatorname{cotg}\psi' = 0$, so folgt auch $X' = 0$ und (wegen $\alpha = 0$)

$$X_t''' = H_t = \frac{\varepsilon EFtl'''}{\Sigma y_m w_m'''}, \tag{19}$$

worin l''' die gegenseitige wagerechte Entfernung derjenigen Punkte der Kämpfer bedeutet, von denen die äussersten Füllungsstäbe ausgehen.*) In diesem wichtigen Falle erzeugt also die Temperaturänderung zwei in die Achse A_x fallende Kämpferdrücke von der Grösse H_t.

Wird die Gestalt eines leicht ansteigenden Bogens nach Seite 300 aus einer symmetrischen Grundform entwickelt, so ist es ebenfalls zulässig, als Folge der Temperaturänderung einen mit der A_x-Achse zusammenfallenden Kämpferwiderstand anzunehmen. Die Grösse desselben ist (wegen $K_t = H_t \sec\alpha = X_t''' \sec\alpha$)

$$K_t = \frac{\varepsilon EFtl''' \sec\alpha}{\Sigma y_m w_m'''}. \tag{20}$$

Wird der Einfluss der Belastung nach No. 114 mit Hilfe von Seilpolygonen dargestellt, so wird man auch die in den Nennern der Werthe X_t', X_t'', X_t''' auftretenden Summenausdrücke mittels jener Seilzüge berechnen. Man muss dann auf die Einheiten der in Frage kommenden Grössen achten. Für den in Fig. 309 untersuchten Bogen ist z. B.

$$H_t = \frac{\varepsilon EFtl'''}{\Sigma y_m w_m'''} = \frac{\varepsilon EFtl'''}{\Sigma y_m^2 w_m'}$$

und $\Sigma y_m^2 w_m' = \frac{1}{2}\, w_{III}\, w_{IV}\, u$, weshalb

$$H_t = 2\,\frac{\varepsilon EFtl'''}{w_{III}\, w_{IV}\, u}.$$

Nun ist $w_m' = \frac{g_m}{r_m^2}$ der reciproke Werth einer Länge, also $\Sigma y_m^2 w_m'$ eine Länge und man muss deshalb eine der drei Strecken w_{III}, w_{IV}, u (gleichgültig welche) mit dem Maassstabe messen, in welchem die w' aufgetragen worden sind, die andern beiden aber mit dem Längenmaassstabe der Zeichnung.

---

*) Für den Träger in Fig. 306 ist $l''' = \overline{A'B'}$.

b. Zweites Verfahren.

116. Wir entwickeln noch ein zweites Verfahren, welches auch über den Einfluss schräger Lasten Aufschluss giebt und sich eng an die in No. 64, Seite 158, gegebene allgemeine Lösung anlehnt. Zu dem Zwecke ersetzen wir das linke Widerlager durch eine starre Scheibe (Fig. 315ª), und fügen in dem vorläufig beliebig angenommenen Punkte O derselben zwei sich aufhebende Kräfte K_1 hinzu, welche dieselbe Richtung und Grösse haben, wie der linke Kämpferwiderstand K_1. Die eine dieser beiden Kräfte bildet mit dem Kämpferwiderstande K_1 ein Kräftepaar, dessen Moment $K_1 c$ wir mit X_a bezeichnen; die andere zerlegen wir in X_b (senkrecht) und X_c (mit vorläufig willkürlicher Richtung). X_a, X_b, X_c führen wir als die statisch nicht bestimmbaren Grössen ein. Sind dieselben bekannt, so lässt sich K_1 wie folgt finden: Zunächst stellt man Grösse und Richtung von K_1 mittels des Kräfte-

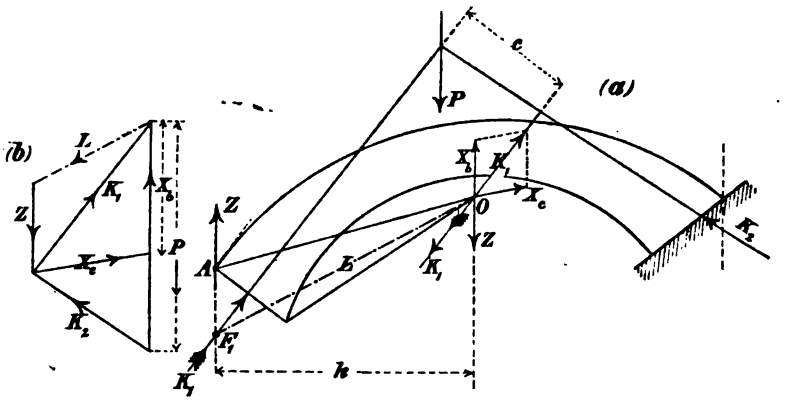


Fig. 315.

zuges X_c X_b in Fig. 315ᵇ fest. Nun bestimmt man die in Fig. 315ª mit Z bezeichneten senkrechten Kräfte, welche ein dem Kräftepaare (K_1, K_1) gleichwerthiges Paar bilden, mittels der Bedingung $Zk = X_a$, bildet hierauf in Fig. 315ᵇ die Mittelkraft L von Z und K_1 und zieht durch O zu L eine Parallele; sie schneidet die Senkrechte durch A im Durchgangspunkte F_1 des Kämpferdruckes K_1.

Bei Aufstellung der Elasticitätsbedingungen legen wir dem Punkte O die Ordnungsziffern b oder c bei, je nachdem wir O als den Angriffspunkt von X_b oder X_c bezeichnen wollen. Zur Berechnung des Einflusses einer in m angreifenden, beliebig gerichteten Last P_m be-

nutzen wir die Gleichungen:

$$(21) \qquad X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}, \quad X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}, \quad X_c = P_m \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}},$$

in denen die δ die in der Einleitung erklärte Bedeutung haben, und deren Gültigkeit voraussetzt, dass der Angriffspunkt von X_b, X_c und die Richtung von X_c nach den auf Seite 158 und 159 (im Beispiel 1) gegebenen Regeln bestimmt werden. (Erzielung von $\delta_{ab} = \delta_{ba} = 0$; $\delta_{ac} = \delta_{ca} = 0$; $\delta_{bc} = \delta_{cb} = 0$).

Wir fassen (Fig. 316) den Stabzug 0—1—2—3—4 ..... 8—9 mit der ruhenden Seite 0—1 ins Auge, und schliessen an diesen den (vorläufig noch nicht gegebenen) Punkt $O \equiv 10$ mittels der starren Stäbe 9—10 und 8—10 an. Das Dreieck 8—9—10 ist dann die das linke Widerlager vertretende Scheibe. Die Stablängen bezeichnen wir mit d_1, d_2, d_3 ... und die in demselben Sinne zu messenden Winkel zwischen den aufeinander folgenden Seiten mit α_1, α_2, α_3 ...

Werden die Formänderungen der Füllungsstäbe vernachlässigt, was meistens erlaubt ist, so sind die Verschiebungen der Knotenpunkte durch die Aenderungen $\Delta\alpha$ der Winkel α vollständig bestimmt. Dabei ist mit den geläufigen Bezeichnungen s_m und r_m:

$$(22) \qquad \Delta\alpha_m = + \frac{\Delta s_m}{r_m} \text{ bezieh. } \Delta\alpha_m = - \frac{\Delta s_m}{r_m}$$

je nachdem α_m ein Dreieckswinkel ist oder nicht.

Dem Angriffsmomente M_m entspricht $S_m = \mp \frac{M_m}{r_m}$ und $\Delta s_m = \mp \frac{M_m s_m}{r_m EF_m}$,

wobei sich das obere Vorzeichen auf die obere Gurtung bezieht, das untere auf die untere Gurtung. Ist α ein Dreieckswinkel, so ist s ein Untergurtstab, anderenfalls ein Obergurtstab, so dass allgemein:

$$(23) \qquad \Delta\alpha_m = + \frac{M_m s_m}{r_m^2 EF_m} \text{ und } EF_c \Delta\alpha_m = \frac{M_m s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m},$$

wo F_c eine beliebig grosse, aber konstante Querschnittsgrösse bedeutet.

Rechnen wir also mit

$$(24) \qquad \Delta\alpha_m = \frac{s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m} M_m$$

so erhalten wir die EF_c-fachen Verschiebungen, eine Vergrösserung, die auf das Ergebniss der Gleichungen 21 ohne Einfluss ist, da in diesen nur Verhältnisse von Verschiebungen vorkommen.

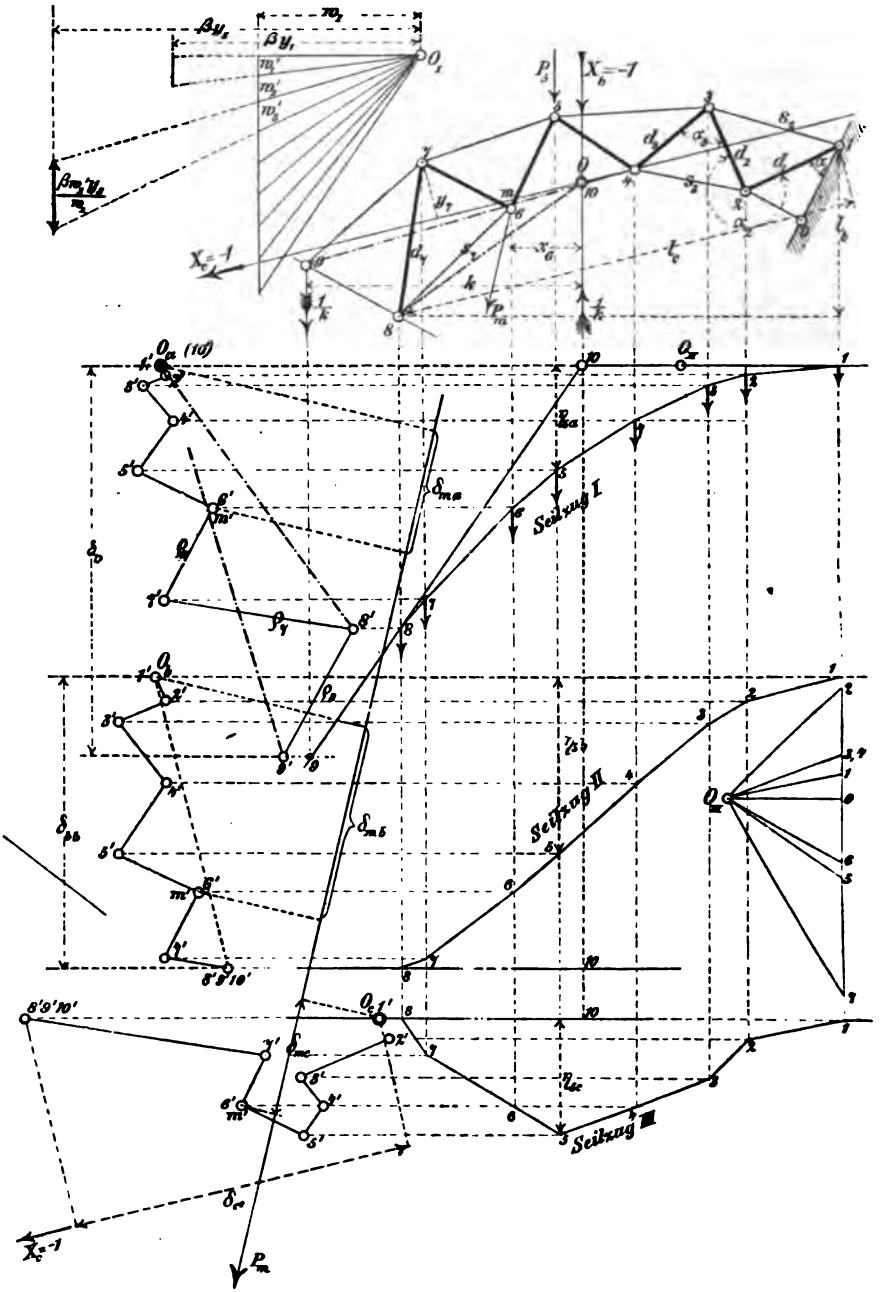


Fig. 316.

Den Zuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ entsprechen die Momente:

$$M_m' = -1, \quad M_m'' = x_m, \quad M_m''' = y_m$$

und in Folge dessen die Winkeländerungen:

$$\Delta\alpha_m' = -\frac{s_m}{r_m^2}\frac{F_c}{F_m}; \quad \Delta\alpha_m'' = x_m\frac{s_m}{r_m^2}\frac{F_c}{F_m}; \quad \Delta\alpha_m''' = \frac{y_m s_m}{r_m^2}\frac{F_c}{F_m},$$

deren absolute Werthe mit den im ersten Verfahren benutzten Gewichten w_m', w_m'', w_m''' übereinstimmen, wobei nur zu beachten ist, dass jetzt y rechtwinklig zu X_c gemessen werden muss.*)

Die Aufzeichnung der Verschiebungspläne geschieht nun in folgender Weise.

I. Verschiebungsplan für den Zustand $X_a = -1$. Man betrachte die Winkeländerungen $-\Delta\alpha_m'$ als lothrechte nach abwärts gerichtete Kräfte und verbinde sie durch einen Seilzug I, dessen erste Seite wagerecht anzunehmen ist und dessen Polweite w_I willkürlich gewählt werden darf. Durch die den Knotenpunkten 1, 2, 3, . . . 9 des Stabzuges entsprechenden Punkte des Seilzuges lege man wagerechte Gerade g_1, g_2, g_3, . . . und zeichne von dem beliebig in g_1 angenommenen Punkte $1'$ aus einen Linienzug $1'\,2'\,3'\,4'\,\ldots\,9'$, dessen Seiten rechtwinklig zu den entsprechenden Seiten des Stabzuges $1-2-3-4\,\ldots\,9$ sind. Die von dem mit $1'$ zusammenfallenden Pole O_a nach den Punkten $2'$, $3'$, $4'$ . . . gezogenen Strahlen stellen dann die Verschiebungen der Knoten 2, 3, 4, . . . nach Grösse und Richtung dar, und man findet daher den einer Einzellast P_m entsprechenden Werth δ_{ma} als Projektion des Strahles $O_a m'$ auf die Richtung von P_m und zwar in einem von der Polweite w_I und den Werthen E, F abhängigen, vorläufig gleichgültigen Maassstabe. Da nun der (die Ziffer 10 tragende) Punkt O in Ruhe bleiben soll, muss $10'$ mit O_a zusammenfallen und es ist mithin die Lage von 10 durch die Bedingungen: $9-10 \perp 9'-10'$, $8-10 \perp 8'-10'$ bestimmt; auch leuchtet ein, dass Punkt 10 in der senkrechten Schwerachse der Gewichte $-\Delta\alpha' = w'$ liegt, wodurch das Zusammenfallen von X_b mit der früher benutzten Achse A_y bewiesen ist.

Ein zweites Verfahren der Aufzeichnung des Linienzuges $1'\,2'\,3'\ldots$ besteht in der Berechnung der Drehungswinkel ψ und Werthe $\rho = \psi d$

*) Es wird sich später zeigen, dass die Richtung von X_c mit der Richtung der Achse A_x in Fig. 305 zusammenfällt. Wäre die wagerechte Projektion von X_c (d. i. H) als statisch nicht bestimmbare Grösse eingeführt worden, so würde die Uebereinstimmung der $\Delta\alpha'''$ mit den früheren w''' eine vollständige sein.

für die einzelnen Stäbe d_1, d_2 ... Man erhält:

$$\psi_1 = \Delta\alpha_1;\ \psi_2 = \psi_1 + \Delta\alpha_2;\ \psi_3 = \psi_2 + \Delta\alpha_3;\ \ldots\ldots$$
$$\rho_1 = d_1\psi_1;\ \rho_2 = d_2\psi_2;\ \rho_3 = d_3\psi_3;\ \ldots\ldots$$

und macht nun:

$$1' - 2' = \rho_1;\ 2' - 3' = \rho_2;\ 3' - 4' = \rho_3;\ \ldots\ldots$$

Ein drittes Verfahren stützt sich auf den Umstand, dass die Strecken ρ nur von den $\Delta\alpha$ und d abhängen, nicht aber von der Gestalt des Stabzuges. Reiht man also die Stablängen d wagerecht aneinander, wie dies die in kleinerem Maassstabe gezeichnete Fig. 317 zeigt, so findet man die Werthe ρ als die Unterschiede aufeinander folgender Ordinaten eines die Gewichte $-\Delta\alpha$ verbindenden Seilpolygons.

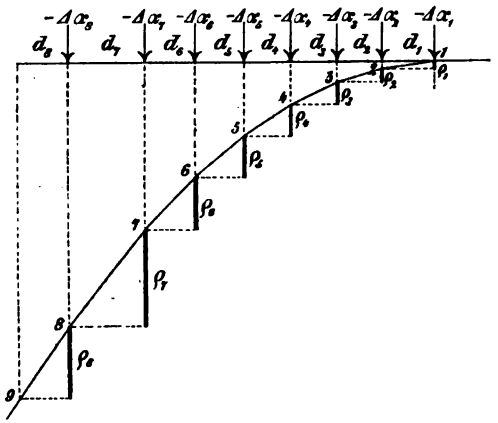


Fig. 317.

Schliesslich könnte man viertens die Punkte $1'$, $2'$, $3'$ ..... mit Hilfe eines Williot'schen Verschiebungsplanes festlegen.

Das erste Verfahren lässt im Stich, sobald der Stabzug lothrechte Stäbe enthält, und es führt zu ungenauen Ergebnissen, falls Stabrichtungen vorkommen, die von der Lothrechten nur wenig abweichen.

Man denke sich z. B. den Stab 7—8 der lothrechten Lage genähert, um einzusehen, dass eine genaue Bestimmung des Punktes $8'$ in Folge des entstehenden schleifenden Schnittes schwierig ist. Man würde dann ρ_7 berechnen oder von dem Seilpolygon in Fig. 317 das Stück 6—7—8 aufzeichnen, welches durch ρ_6 und $\Delta\alpha_7$ bestimmt ist. Besitzen mehrere Stäbe eine solche Lage, so wird man von der Anwendung des ersten Verfahrens ganz absehen. Am übersichtlichsten ist die Bestimmung der ρ nach Fig. 317.

Nach Ermittlung von δ_{ma} findet man den Einfluss von P_m auf X_a mittels der ersten der Gleichungen 21, in der δ_{aa} den Drehungswinkel (ψ) der Scheibe 8—9—10 für den betrachteten Belastungszustand $X_a = -1$ bedeutet. Nun entspricht dem Stabe 9—10 der Werth $\rho_9 = 9' - 10'$ also der Drehungswinkel $\psi_9 = \dfrac{9' - 10'}{9 - 10} = \dfrac{\delta_a}{k}$

und man erhält daher:

$$X_a = P_m \delta_{ma} \frac{k}{\delta_v}$$

und für die durch die Gleichung $Zk = X_a$ bestimmte Kraft Z den Werth:

$$Z = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_v}.$$

Einer in 5 angreifenden lothrechten Last P_5 entspricht:

$$Z = \frac{P_5 \eta_{5a}}{\delta_v}$$

d. i. ein Werth, zu dessen Ermittlung die Aufzeichnung des Seilzuges I genügen würde.

II. Verschiebungsplan für den Zustand $X_b = -1$. Die Gewichte $-\Delta\alpha' = \frac{s_m}{r_m^2} \frac{F_e}{F_m}$ werden durch die Gewichte $-\Delta\alpha'' = -\frac{s_m x_m}{r_m^2} \frac{F_e}{F_m}$ (welche rechts von O positiv also abwärts gerichtet sind) ersetzt und nun wird das vorhin beschriebene Verfahren wiederholt. Der die neuen Gewichte verbindende Seilzug II kann aus dem Seilzuge I in derselben Weise abgeleitet werden wie in Fig. 309. Nur muss die Lage des Poles O_{II} (bei beliebig anzunehmender Polweite w_{II}) so gewählt werden, dass die erste Seite des Seilzuges II wagerecht liegt. Nach Eintragung des vom Pole O_b aus gezeichneten Linienzuges $1'\ 2'\ 3' \ldots 8'\ 9'$ findet man den einer schrägen Last P_m entsprechenden Werth δ_{mb} als Projektion von $O_b m'$ auf die Richtung von P_m und die Verschiebung δ_{bb} des Angriffspunktes $b \equiv 10$ von X_b als Projektion des Strahles $O_b 10'$ auf die Richtung von $X_b = -1$. In Folge dessen findet man den Einfluss der schrägen Last P_m:

$$X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}$$

und den Einfluss einer lothrechten Last P_5:

$$X_b = P_5 \frac{\eta_{5b}}{\delta_{bb}}.$$

Zur Ermittlung des letzteren Werthes würde die Aufzeichnung des Seilzuges II genügen.

Noch sei aus dem Zusammenfallen der Punkte $8'$, $9'$, $10'$ der Schluss gezogen, dass sämmtliche Punkte der Scheibe $8-9-10$ bei Eintreten des Zustandes $X_b = -1$ dieselbe Verschiebung $O_b 8' = O_b 9' = O_b 10'$ erfahren, dass also der Drehungswinkel $\delta_{ab} = 0$ wird — eine Bedingung, an welche die Gültigkeit der Gleichungen (21) bekanntlich gebunden ist.

III. Verschiebungsplan für den Zustand $X_c = -1$. Da die Verschiebung δ_{cb}, welche der Angriffspunkt c von X_c im Sinne von X_c und in Folge von $X_b = -1$ erfährt, gleich Null sein soll, so muss die Richtung von X_c rechtwinklig zum Strahle $O_b 10'$ des soeben gezeichneten Verschiebungsplanes angenommen werden. Ist dies geschehen, so werden die Gewichte $\Delta''' \alpha_m = y_m \frac{s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m} = y_m w_m'$ (absolut genommen) bestimmt oder aber es werden — was meistens bequemer ist — Gewichte ermittelt, welche den Werthen $y_m w_m'$ proportional sind, beispielsweise die in der Figur 316 (im Kräfteplane der w') dargestellten: $\frac{\beta}{w_I} y_m w_m'$, wo β eine beliebige runde Zahl bedeutet. Die algebraische Summe dieser theils positiven theils negativen Gewichte muss gleich Null sein (eine sehr scharfe Zeichenprobe!). Da nämlich die Richtung von X_c durch die Bedingung $\delta_{cb} = 0$ bestimmt wurde, so muss nach dem Maxwellschen Satze auch $\delta_{bc} = 0$ sein, d. h. es muss die Verschiebung des Angriffspunktes b von X_b in der Richtung von X_b und hervorgerufen durch $X_c = -1$ gleich Null sein. Hieraus folgt aber: $\overline{O_c 10'} \perp X_b$, was nur der Fall ist, wenn die äussersten Seiten des Seilzuges *III* zusammenfallen.

Man erhält schliesslich für eine schräge Last P_m und eine senkrechte Last P_5:

$$X_c = P_m \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}} \text{ und } X_c = P_{m5} \frac{\eta_{5c}}{\delta_{cc}},$$

wo δ_{cc} die Projektion von $O_c 10'$ auf die Richtung von X_c bedeutet.

Die gestellte Aufgabe ist somit gelöst; und es möge nur noch daran erinnert werden, dass man die den Linienzug $O_b 2' 3' \ldots 10'$ bezieh. $O_c 2' 3' \ldots 10'$ bestimmenden Strecken ρ auch in der bei Herleitung des Verschiebungsplanes für $X_c = -1$ beschriebenen Weise durch Rechnung oder mit Hilfe eines gestreckten Stabzuges (Fig. 317) oder mittels eines Williotschen Planes ermitteln kann — und dass diese Abänderung des in der Fig. 316 befolgten Verfahrens zuweilen geboten ist.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass ganz besondere Sorgfalt auf die Bestimmung der Lage des Punktes O und der Richtung der Kraft X_c zu verwenden ist. Etwa hierbei begangene Zeichenfehler sind von grossem Einfluss. Will man diesen Theil der Aufgabe durch Rechnung lösen, so beachte man, dass (wegen $\Sigma y w' = 0$) der Punkt O mit dem Schwerpunkte der Gewichte w' und die Kraft X_c mit der früher benutzten Achse A_c zusammenfällt, weshalb die auf Seite 313 abgeleiteten Formeln brauchbar sind; die y dürfen hierbei zunächst lothrecht gemessen werden.

Andererseits liefern die vorstehend entwickelten Verschiebungspläne einen Beitrag zur Lehre vom Schwerpunkte und den Momenten zweiter Ordnung.

Mit Hilfe des Linienzuges $O_s\ 1'\ 2'\ \ldots\ .$ (den man dann um 90° nach links drehen wird) vermag man den Schwerpunkt O einer Gruppe von Punkten zu bestimmen, welche mit den Gewichten w' belastet sind und die Linienzüge $O_b\ 1'\ 2'\ \ldots\ .$, $O_c\ 1'\ 2'\ \ldots\ .$ können zur Ermittlung der Trägheitsmomente $\Sigma w' x^2$ und $\Sigma w' y^2$ benutzt werden. Man findet nämlich:

$$\delta_{bb} = \Sigma \frac{w'x}{w_I} \cdot \frac{x}{w_{II}};\quad \delta_{cc} = \Sigma \frac{w'y\beta}{w_I} \cdot \frac{y}{w_{III}};$$

also für $w_I = w_{II} = w_{III} = 1$ und $\beta = 1$:

$$\delta_{bb} = \Sigma w' x^2;\quad \delta_{cc} = \Sigma w' y^2.$$

IV. Einfluss einer Temperaturänderung. Wir gehen von den Formeln aus:

$$(25) \qquad X_{at} = 1\,\frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}};\quad X_{bt} = 1\,\frac{\delta_{bt}}{\delta_{bb}};\quad X_{ct} = 1\,\frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}}$$

in welchen δ_{at} den von der Temperaturänderung hervorgerufenen Drehungswinkel der Scheibe 8—9—10 bedeutet, während δ_{bt} und δ_{ct} die von der gleichen Ursache herrührenden Verschiebungen des Punktes 10 im Sinne von X_b bezw. X_c sind.

Wir nehmen eine gleichmässige Erwärmung des Trägers an und machen zur Vereinfachung der Rechnung die stets zulässige Annahme, dass sich auch die Strecken 1—0 und 8—9 in demselben Maasse ausdehnen können, wie die Fachwerkstäbe. Es sind dann alle Winkeländerungen $= 0$ und der Stabzug 1—2—3 . . . . . 8 nimmt eine Form an, welche der anfänglichen Gestalt ähnlich ist. Man erhält $\delta_{at} = 0$, ferner, da die Verschiebungen von 10 mit denen des Punktes 8 übereinstimmen:

$$\delta_{bt} = \varepsilon t l_b,\quad \delta_{ct} = \varepsilon t l_c,$$

wo l_b und l_c die Projektionen der Strecke 8—1 auf die Richtungen von X_b und X_c bedeuten. Hiernach ergiebt sich:

$$X_{at} = 0;\quad X_{bt} = \frac{\varepsilon t l_b}{\delta_{bb}};\quad X_{ct} = \frac{\varepsilon t l_c}{\delta_{cc}}.$$

Sollen hierein die in Fig. 316 dargestellten Strecken δ_{bb} und δ_{cc} eingesetzt werden, so ist zu beachten, dass jene Verschiebungspläne die EF_c-fachen Verschiebungen liefern, dass also die Zähler der Ausdrücke für X_{bt}, X_{ct} mit EF_c multiplicirt werden müssen. Weitere Umformungen sind dadurch bedingt, dass die Polweiten der Seilzüge *II, III* (welche letztere die Biegungslinien für $X_b = -1$ und $X_c = -1$ vorstellen) nicht $= 1$ sondern $= w_{II}$ bezieh. w_{III} sind, dass also die entsprechenden Verschiebungen noch mit w_{II} bezieh. w_{III} zu multipliciren sind. Schliesslich wurden die Gewichte $w'' = xw'$ und $w''' = yw'$ durch die Gewichte $\frac{xw'}{w_I}$ und $\frac{\beta y w'}{w_I}$ ersetzt; was eine weitere Multiplication mit w_I bezieh. $\frac{w_I}{\beta}$ zur Folge hat. Man erhält daher:

$$X_{bt} = \frac{\varepsilon E F_c l_b t}{w_I w_{II} \delta_{bb}} \text{ und } X_{ct} = \beta \frac{\varepsilon E F_c l_c t}{w_I w_{III} \delta_{cc}}.$$

Von den in den Nennern erscheinenden drei Strecken (w_I, w_{II}, δ_{bb} bezieh. w_I, w_{III}, δ_{cc}) müssen je zwei mit dem Längenmaassstabe gemessen werden (z. B. w_{II} und δ_{bb} ferner w_{III} und δ_{cc}) und je eine (nämlich beidemale w_I) mit dem Maassstabe, nach welchem die Gewichte w' aufgetragen worden sind.*)

Zeichnet man die Verschiebungspläne nach dem Verfahren von Williot, so fasse man die den Zuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ entprechenden Spannkräfte S_a, S_b, S_c, als Zahlen auf. Die mit EF_c multiplicirten Längenänderungen

$$\Delta s_a = S_a s_a, \quad \Delta s_b = S_b s_b, \quad \Delta s_c = S_c \Delta s_c$$

sind dann Längen, welche in einem geeigneten — vom Maassstabe der Zeichnung unabhängigen — Maassstabe aufgetragen werden, mit dem auch die δ_{bb}, δ_{cc} gemessen werden. Man erhält dann:

$$X_{bt} = \varepsilon E F_c t \frac{l_b}{\delta_{bb}}; \quad X_{ct} = \varepsilon E F_c t \frac{l_c}{\delta_{cc}}.$$

117. Der Kämpferdruck, dessen Zerlegung die Unbekannten X_a, X_b, X_c lieferte, ist die Mittelkraft der Spannkräfte in den drei am Widerlager angreifenden Stäben. Ersetzt man diese drei Stäbe durch drei andere, von irgend einem Schnitte tt getroffene Stäbe, Fig. 318, so gelangt man zu der folgenden Lösung, die sich von der eben beschriebenen nur unwesentlich unterscheidet und deshalb nur einer kurzen Erläuterung bedarf.

Man betrachte zunächst den links vom Schnitte tt gelegenen Theil des Bogenträgers, Fig. 319, ersetze die Spannkräfte in den durchschnittenen Stäben wieder durch ein Kräftepaar X_a und zwei Einzelkräfte X_b und X_c und stelle sich vor, es greifen X_a, X_b und X_c an einer starren Scheibe I an, welche mit den durchschnittenen Stäben durch drei in der Linie tt liegende Gelenke, von denen auch zwei zusammenfallen dürfen, befestigt ist. Diese Scheibe wird sich beim Eintreten des Belastungszustandes $X_a = -1$ um einen leicht zu bestimmenden Pol (I) drehen.

In derselben Weise verfahre man mit dem rechten Trägertheile, Fig. 320, und ermittle den Pol (II) der Scheibe II für den Zustand $X_a = -1$. Nun suche man den in der Verbindungsgeraden der Pole (I) und (II) liegenden Pol ($I\,II$) von I gegen II auf und wähle diesen Punkt zum Angriffspunkte von X_b und X_c; er spielt dieselbe Rolle wie der Punkt O in Fig. 315 und möge bezeichnet werden

*) Vergl. den Schluss von No. 115, Seite 311.

mit b_I als Angriffspunkt der an I angreifenden Kraft X_b,
„ b_{II} „ „ „ „ II „ „ X_b,
„ c_I „ „ „ „ I „ „ X_c,
„ c_{II} „ „ „ „ II „ „ X_c.

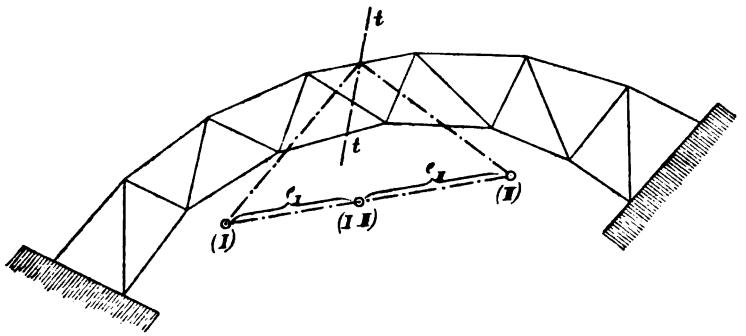


Fig. 318.

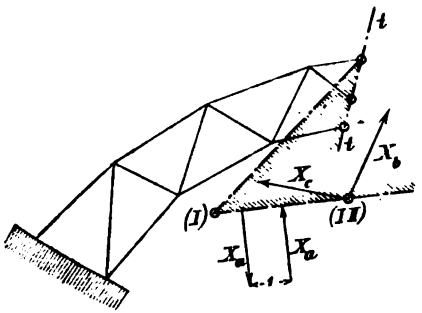


Fig. 319.

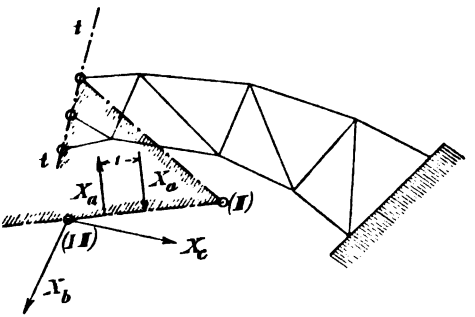


Fig. 320.

Es bedeutet dann, mit den auf Seite 31 und 32 erklärten Begriffen,

δ_{ba} die gegenseitige Verschiebung des Punktepaares $b_I b_{II}$ im Sinne der Belastung $X_b = -1$ und in Folge der Belastung $X_a = -1$,

δ_{ca} desgleichen des Punktepaares $c_I c_{II}$ im Sinne $X_c = -1$ und in Folge von $X_a = -1$,

δ_{cb} desgleichen des Punktepaares $c_I c_{II}$ im Sinne $X_c = -1$ und in Folge von $X_b = -1$.

Da nun der Punkt $(I\,II)$ im Belastungsfalle $X_a = -1$ als gemeinschaftlicher Punkt der beiden Scheiben I und II angesehen werden darf, so ist

$$\delta_{ba} = 0 \text{ und } \delta_{ca} = 0.$$

Soll auch δ_{cb} verschwinden, so muss, nach willkürlicher Annahme der

Richtung von X_b, die Richtung von X_a rechtwinklig zu der Geraden $c_I' c_{II}'$ gewählt werden, wo c_I' und c_{II}' die Endpunkte der Strecken Oc_I' und Oc_{II}' sind, welche die Verschiebungen der Punkte c_I und c_{II} für den Belastungszustand $X_b = -1$ darstellen.

Als Rechen- und Zeichenproben stehen die Bedingungen

$$\delta_{ab} = 0, \quad \delta_{ac} = 0, \quad \delta_{bc} = 0$$

zur Verfügung, welche der Reihe nach aussagen: es müssen die Winkel, um welche sich die Scheiben *I* und *II* in den Belastungsfällen $X_b = -1$ und $X_c = -1$ gegeneinander drehen, gleich Null sein, und es muss die Gerade $b_I' b_{II}'$ mit X_b einen rechten Winkel bilden, wo b_I' und b_{II}' die Endpunkte der Strecken Ob_I' und Ob_{II}' sind, durch welche die Verschiebungen der Punkte b_I und b_{II} für den Belastungszustand $X_a = -1$ dargestellt werden.

Wir heben noch hervor, dass

$$\delta_{aa} = \Sigma \frac{S_a^2 s}{EF} = \Sigma_I \frac{S_a^2 s}{EF} + \Sigma_{II} \frac{S_a^2 s}{EF}$$

den Winkel bedeutet, um den sich die Scheibe *I* gegen die Scheibe *II* dreht. Die Summe Σ_I bezieht sich hierbei auf den Trägertheil links vom Schnitte *tt* (wobei die linken Abschnitte der durch den Schnitt *tt*

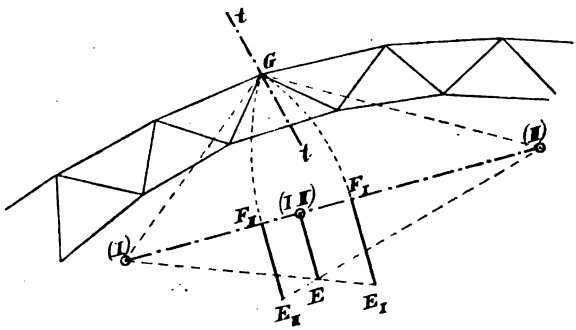


Fig. 321.

getheilten Stäbe mitzurechnen sind) und die Summe Σ_{II} umfasst das Stabwerk rechts von *tt*; die erste Summe ist gleich dem Drehungswinkel der Scheibe *I*, die zweite gleich dem Drehungswinkel von *II*. Das Verhältniss der beiden Strecken e_I und e_{II}, in welche die Strecke $(I)(II)$ durch den Pol $(I\,II)$ zerlegt wird, ist

$$\frac{e_I}{e_{II}} = \frac{\Sigma_I \frac{S_a^2 s}{EF}}{\Sigma_{II} \frac{S_a^2 s}{EF}}.$$

In Fig. 321 ist der Schnitt tt durch einen Knotenpunkt der oberen Gurtung geführt worden. Punkt G erfahre als Punkt der Scheibe I die zum Polstrahle $G(I)$ rechtwinklige Verschiebung δ_I und als Punkt der Scheibe II die zu $G(II)$ rechtwinklige Verschiebung δ_{II}. Macht man dann $(I)F_I = (I)G$ und $(II)F_{II} = (II)G$ und errichtet man auf der Geraden $(I)(II)$ in den Punkten F_I und F_{II} die Lothe $\overline{F_I E_I} = \delta_I$ und $\overline{F_{II} E_{II}} = \delta_{II}$, so bestimmt der Schnittpunkt E der beiden Geraden $(I)E_I$ und $(II)E_{II}$ den Pol $(I\,II)$. Es ist $E(I\,II) \perp (I)(II)$.

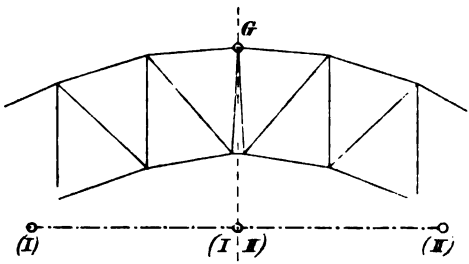


Fig. 322.

Besitzt der Träger eine Symmetrieachse tt, so halbirt der Pol $(I\,II)$ die Strecke $(I)(II)$, Fig. 322. Ist eine Scheitelvertikale vorhanden, so halbire man sie durch einen längs der Achse geführten Schnitt und weise je eine Hälfte derselben jedem der beiden Trägertheile zu. Bezüglich der Einzelheiten dieser Untersuchung verweisen wir auf den zweiten Theil des folgenden Zahlenbeispiels.

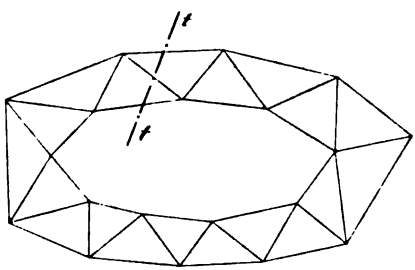


Fig. 323.

Fallen die beiden Kämpfer zusammen, so entsteht der Fachwerkring, Fig. 323, dessen Berechnung mithin durch die vorstehenden Betrachtungen ebenfalls erledigt ist.

c. Zahlenbeispiel. Erster Theil.

118. Aufgabe. Es sollen die Einflusslinien für den in Fig. 324 dargestellten Bogenträger ermittelt werden. Spannweite und Pfeilhöhe der unteren Gurtung sind 60m und 15m, Länge der Scheitelvertikale 1,5m, der Vertikale am Kämpfer 3,95m. Die Knotenpunkte 0, 1, 2, ... beider Gurtungen liegen in Parabeln; ihre auf die Schlusslinie AB der unteren Gurtung bezogenen Ordinaten y'_o und y'_u sowie die Höhen $h_m = y'_{om} - y'_{um}$ sind, auf zwei Decimalstellen abgerundet, in der Tabelle I, Seite 326, zusammengestellt worden. Die Verkehrslast wird nur auf die Knotenpunkte 1, 3, 5, 7, 9, 9′, 7′, ... übertragen, sie sei gleichmässig vertheilt und $p = 2{,}5^t$ f. d. m. Ebenso gross sei die gleichförmig vertheilt angenommene ständige Belastung g.*)

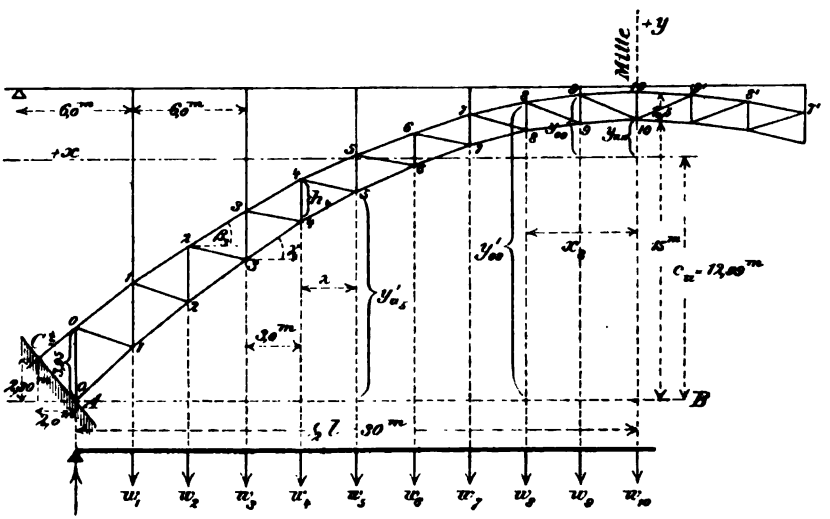


Fig. 324.

119. Die Gewichte w_m sollen zunächst unter der Voraussetzung starrer Füllungsstäbe berechnet werden. Es ist dann (nach Gl. 14 auf Seite 111):

$$w_m = \frac{1}{h_m}\left(-\Delta o_m \sec\beta_m + \Delta u_{m+1}\sec\gamma_{m+1}\right)$$

$$= \frac{1}{h_m}\left(-\frac{O_m o_m}{EF_{om}}\sec\beta_m + \frac{U_{m+1}u_{m+1}}{EF_{u(m+1)}}\sec\gamma_{m+1}\right)$$

und, da $o_m = \lambda\sec\beta_m$, $u_{m+1} = \lambda\sec\gamma_{m+1}$,

$$O_m = -\frac{M^u_m}{h_m}\sec\beta_m,\quad U_{m+1} = +\frac{M^o_m}{h_m}\sec\gamma_{m+1},$$

---

*) Diese Annahme machen wir hier der Einfachheit wegen. Bei einer Bogenbrücke mit grösserer Pfeilhöhe wächst g nach dem Kämpfer hin.

$$(1) \qquad w_m = \frac{1}{h_m^2}\left[M_m^u \frac{\lambda \sec^3 \beta_m}{EF_{om}} + M_m^o \frac{\lambda \sec^3 \gamma_{m+1}}{EF_{u(m+1)}}\right]$$

wo M_m^u das Angriffsmoment für den m^{ten} Knotenpunkt der unteren Gurtung, M_m^o desgl. für den m^{ten} Knotenpunkt der oberen Gurtung bedeutet.

Wegen der grossen Pfeilhöhe wachsen die Gurtquerschnitte F_o und F_u vom Scheitel nach dem Kämpfer ziemlich stark an, und es möge deshalb die für die Rechnung besonders bequeme Annahme gemacht werden,

$$F_{om} = F_o \sec^3 \beta_m, \quad F_{u(m+1)} = F_o \sec^3 \gamma_{m+1}$$

wo F_o den Gurtquerschnitt im Scheitel des Bogens bedeutet. Es geht dann Gleich. (1) über in

$$(2) \qquad w_m = \frac{1}{h_m^2} \frac{\lambda}{EF_o} (M_m^o + M_m^u)$$

und nach Heben des konstanten Faktors $\frac{\lambda}{EF_o}$ in

$$(3) \qquad w_m = \frac{1}{h_m^2} (M_m^o + M_m^u).$$

Bei Ermittlung des Einflusses der Temperaturänderung ist später daran zu denken, dass die auf Grund der Gleich. 3 gewonnenen Verschiebungen noch mit $\frac{\lambda}{EF_o}$ multipliciert werden müssen.

Wir wenden zur Ermittlung der Kämpferdrücke das unter *a* beschriebene Verfahren an, wollen aber die Ordinaten der Seillinien durch Rechnung bestimmen.

120. Zustand $X' = -1$. Es ist $M_m^o = M_m^u = +1$, mithin $w'_m = \frac{2}{h_m^2}$, wofür

$$(4) \qquad w'_m = \frac{1}{h_m^2}$$

gesetzt werden darf. Nach Berechnung der Momente M' eines mit den Gewichten w'_m belasteten Balkens von der Stützweite $l = 60^m$ Fig. 305c erhält man

$$(5) \qquad X' = \frac{M'}{\Sigma w'}.$$

Die Berechnung der M' erfolgt am schnellsten nach dem auf Seite 201 beschriebenen Verfahren mit Hilfe der Querkräfte $Q'_m = Q'_{m+1} + w'_m$ nach der Formel $\frac{M'_m}{\lambda} = \frac{M'_{m-1}}{\lambda} + Q'_m$ und ist in der Tabelle I übersichtlich zusammengestellt worden. X' wurde nur für die Knotenpunkte 1, 3, 5, 7, 9 ausgerechnet, da es im vorliegenden Falle zulässig ist, auch die ständige Belastung ausschliesslich auf diese Knotenpunkte zu vertheilen.

121. Zustand $X'' = -1$. Es ist $M_m^o = M_m^u = 1 \cdot x_m$, mithin $w''_m = \frac{2x_m}{h_m^2}$, wofür

$$(6) \qquad w''_m = \frac{x_m}{h_m^2}$$

gesetzt werden darf. Für die linke Trägerhälfte sind die w'' positiv, für die rechte negativ. Für einen mit den w'' belasteten einfachen Balken von der Stützweite l (Fig. 305e) ergiebt sich im vorliegenden Falle, wegen der symmetrischen Trägerform, in der Mitte das Moment $M'' = 0$. Es darf deshalb die M''-Linie der einen Trägerhälfte auch als Momentenlinie eines Balkens von der

Tabelle I.

m	y'_m	y'_0	h_m	h_m^2	$w'_m = \frac{1}{h_m^2}$	$\frac{x_m}{\lambda}$	$w''_m = \frac{x_m}{h_m^2}$	$x_m^2 : h_m^2$	Q' infolge w'	M' infolge w'	$X' = \frac{M'}{\Sigma w'} = \frac{M'}{2 \cdot 2{,}45}$	Q'' infolge w''	M'' infolge w''	$X'' = \frac{M''}{\Sigma x w''} = \frac{M''}{2 \cdot 47{,}89\,\lambda^2}$	$1\frac{b}{l}$	$A = 1\frac{b}{l} + X''$	$B = 1 - A$
0	0,00	3,95	3,95	15,6	0,06	10	0,60 λ	6,00 λ²									
1	2,85	6,33	3,48	12,1	0,08	9	0,72 „	6,48 „	2,39	2,39 λ	1,46327	+ 4,189 λ²)	4,189 λ²	0,04374	0,950	0,99374	0,00626
2	5,40	8,47	3,07	9,42	0,11	8	0,88 „	7,04 „	2,31	4,70 „		+ 3,469 „	7,658 „				
3	7,65	10,35	2,70	7,29	0,14	7	0,98 „	6,86 „	2,20	6,90 „	4,224	+ 2,589 „	10,247 „	0,107	0,850	0,957	0,043
4	9,60	11,98	2,38	5,66	0,18	6	1,08 „	6,48 „	2,06	8,96 „		+ 1,609 „	11,856 „				
5	11,25	13,36	2,11	4,45	0,22	5	1,10 „	5,50 „	1,88	10,84 „	6,637	+ 0,529 „	12,385 „	0,129	0,750	0,879	0,121
6	12,60	14,49	1,89	3,57	0,28	4	1,12 „	4,48 „	1,66	12,50 „		− 0,571 „	11,814 „				
7	13,65	15,37	1,72	2,96	0,34	3	1,02 „	3,06 „	1,38	13,88 „	8,498	− 1,691 „	10,123 „	0,106	0,650	0,756	0,244
8	14,40	16,00	1,60	2,56	0,39	2	0,78 „	1,56 „	1,04	14,92 „		− 2,711 „	7,412 „				
9	14,85	16,37	1,52	2,81	0,43	1	0,43 „	0,43 „	0,65	15,57 „	9,533	− 3,491 „	3,921 „	0,041	0,550	0,591	0,409
10	15,00	16,50	1,50	2,25	0,22¹)	0	0 „	0 „	0,22	15,79 „		− 3,921 „	0 „				
			Summa		2,45		Summa	47,89 λ²	Balken von der Stützweite l			Balken von der Stützweite $\frac{1}{2}l$				$A_0' = B_0$ $A_1' = B_1$ u. s. w.	

¹) Es ist nur die Hälfte von w'_{10} eingetragen worden.

²) $A'' = \frac{47{,}89\,\lambda^2}{10\,\lambda}$; $Q_1'' = A'' - w''_0 = (4{,}789 - 0{,}60)\,\lambda = 4{,}189\,\lambda$.

Tabelle II.

m	$\frac{1}{h_m^2}$	$y'_u + y'_o$	$(y'_u + y'_o)\frac{1}{h_m^2}$	$y_u = c_u - y'_u$	$y_o = c_u - y'_o$	$w''' = (y_u + y_o)\frac{1}{h_m^2}$	Q''' infolge w'''	M''' infolge w'''	$(y_u^2 + y_o^2)\frac{1}{h_m^2}$	$X''' = \frac{M''' : \lambda}{2 \cdot 58{,}536 : \lambda} = \frac{M'''}{39{,}024\,\lambda}$
0	0,06	3,95	0,2370	− 12,99	− 9,04	− 1,322			15,028	
1	0,08	9,18	0,7344	− 10,14	− 6,66	− 1,344	1,320	1,320 λ	11,774	0,0338 = H_1
2	0,11	13,87	1,5257	− 7,59	− 4,52	− 1,332	2,664	3,984 „	8,584	
3	0,14	18,00	2,5200	− 5,34	− 2,64	− 1,117	3,996	7,980 „	4,968	0,204 = H_3
4	0,18	21,58	3,8844	− 3,39	− 1,01	− 0,792	5,113	13,093 „	2,252	
5	0,22	24,61	5,4142	− 1,74	+ 0,37	− 0,801	5,905	18,998 „	0,696	0,487 = H_5
6	0,28	27,09	7,5852	− 0,39	+ 1,50	+ 0,311	6,206	25,204 „	0,673	
7	0,34	29,02	9,8668	+ 0,66	+ 2,38	+ 1,034	5,895	31,099 „	2,074	0,797 = H_7
8	0,39	30,40	11,8560	+ 1,41	+ 3,01	+ 1,724	4,861	35,960 „	4,309	
9	0,43	31,22	13,4246	+ 1,86	+ 3,38	+ 2,253	3,137	39,097 „	6,400	1,002 = H_9
10	0,22 [1]	30,00 [2]	6,6000	+ 2,01		+ 0,884 [3]	0,884	39,981 „	1,778 [4]	
		Summe =	63,6483					Summe =	58,536	

[1]) 0,22 ist die Hälfte von $\frac{1}{h_{10}^2}$; die andere Hälfte gehört zur rechten Trägerhälfte.

[2]) $2\,y'_{u\,.\,10} = 2 \cdot 15{,}0 = 30{,}0$.

[3]) $2\,y_u \cdot 0{,}22 = 2 \cdot 2{,}01 \cdot 0{,}22 = 0{,}884$.

[4]) $2\,y_u^2 \cdot 0{,}22 = 1{,}778$.

Stützweite $\frac{1}{2}l$ aufgefasst werden. Der Stützenwiderstand A'' ist dann

$$A'' = -\frac{\sum_0^{\frac{1}{2}l} w'' x}{\frac{1}{2}l} = \frac{\sum_0^{\frac{1}{2}l} \frac{x^2}{h_m^2}}{\frac{1}{2}l}.$$

und die Querkraft für das Feld 01

$$Q'' = A'' - w_o''.$$

Aus den Momenten M'' findet man

$$(7) \qquad X'' = \frac{M''}{\sum_0^l w'' x} = \frac{M''}{2\sum_0^{\frac{1}{2}l} \frac{x_m^2}{h_m^2}}.$$

Die Tabelle I enthält die Ausrechnung der Werthe X'' und die aus ihnen folgenden lothrechten Seitenkräfte der Kämpferdrücke für $P = 1$, nämlich (vergl. Seite 303)

$$(8) \qquad A = 1\frac{b}{l} + X'' \text{ und } B = 1 - A.$$

Für die rechte Trägerhälfte erhält man dieselben Werthe X'', nur sind dieselben negativ.

122. Zustand $X''' = -1$. Bezeichnen y_o und y_u die Ordinaten der Gurtknoten in Bezug auf eine mit X''' zusammenfallende x-Achse, so ist $M_m^u = 1 \cdot y_u$ und $M_m^o = 1 \cdot y_o$ und

$$(9) \qquad w_m''' = \frac{1}{h_m^2}(y_u + y_o).$$

Die neue x-Achse muss so bestimmt werden, dass $\Sigma w_m''' = 0$ wird; ihr Abstand c_u von der Schlusslinie AB der unteren Gurtung ist

$$(10) \qquad c_u = \frac{\sum_0^{\frac{1}{2}l} (y_u' + y_o') \frac{1}{h_m^2}}{\sum_0^{\frac{1}{2}l} 2\frac{1}{h_m^2}}.$$

Die Untersuchung des Zustandes $X''' = -1$ ist in Tabelle II durchgeführt worden. Aus der Summe der Glieder der dritten Spalte und der vorhin gefundenen Summe $\sum_0^{\frac{1}{2}l} \frac{1}{h_m^2} = 2{,}45$ ergiebt sich $c_u = \frac{63{,}6488}{2 \cdot 2{,}45} = 12{,}99^m$, und die Summe der auf Grund dieses Werthes berechneten Gewichte w''',

$$\Sigma w''' = -6{,}208 + 6{,}206,$$

weicht nur unwesentlich von Null ab.

Aus den Momenten M''' ergeben sich für den Horizontalschub die Werthe

$$(11) \qquad H = X''' = \frac{M'''}{2\sum_0^{\frac{1}{2}l} (y_u^2 + y_o^2) \frac{1}{h_m^2}} = \frac{M'''}{2 \cdot 58{,}536}$$

$$= \frac{M'''}{\lambda} \cdot \frac{1}{2 \cdot 58.536} = \frac{M'''}{\lambda} \cdot \frac{1}{39{,}024}.$$

$$3{,}0$$

123. Berechnung der Lage der Kämpferdrücke. Um die Kämpferdrücke möglichst genau aufzeichnen zu können, empfiehlt es sich, die Ordinate y_k

der Kämpferdrucklinie und die Schnittpunkte der Kämpferdrücke mit der x-Achse durch Rechnung zu bestimmen. Mit den aus der Fig. 325 ersichtlichen Bezeichnungen findet man

$$(12) \qquad e' = \frac{Hy_k}{A}, \quad e'' = \frac{Hy_k}{B}.$$

Das Angriffsmoment für den Punkt O ist, nach Gleich. (3), Seite 298 (wegen $x_m = 0$ und $y_m = 0$):

$$M_O = \frac{Pa}{l} \cdot \frac{l}{2} - X';$$

andrerseits ist aber auch

$$M_O = B\xi''$$

mithin ergiebt sich (für $P = 1$)

$$(13) \qquad B\xi'' = \frac{a}{2} - X'.$$

Nun ist

$$y_k = (e + \xi'')\frac{B}{H}$$

folglich

$$(14) \qquad Hy_k = Be + \frac{1}{2}a - X',$$

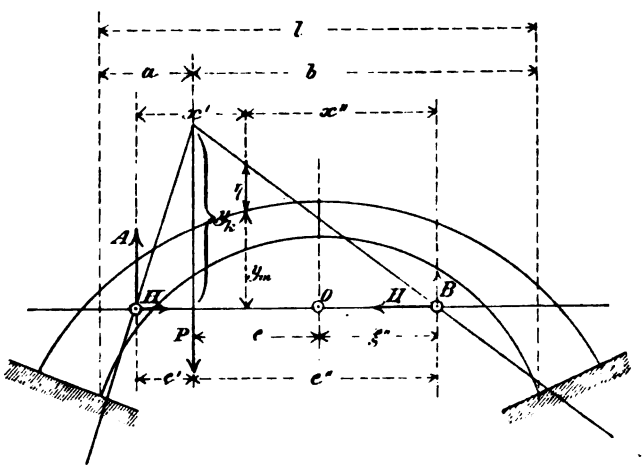


Fig. 325.

und für die Knotenpunkte 1, 3, 5, 7, 9 der Reihe nach

$$\begin{aligned}
Hy_k &= 0{,}00626 \cdot 27 + 1{,}5 - 1{,}46327 = 0{,}20575 \\
&= 0{,}043 \cdot 21 + 4{,}5 - 4{,}224 = 1{,}179 \\
&= 0{,}121 \cdot 15 + 7{,}5 - 6{,}637 = 2{,}678 \\
&= 0{,}244 \cdot 9 + 10{,}5 - 8{,}498 = 4{,}198 \\
&= 0{,}409 \cdot 3 + 13{,}5 - 9{,}533 = 5{,}194.
\end{aligned}$$

Aus diesen Werthen ergeben sich

für $m =$	1	3	5	7	9
die Strecken $y_k =$	6,09^m	5,78^m	5,50^m	5,26^m	5,18^m
$e' =$	0,21^m	1,23^m	3,05^m	5,55^m	8,79^m
$e'' =$	32,87^m	27,42^m	22,13^m	17,20^m	12,70^m.

In Fig. 326 auf Tafel 6 sind die Kämpferdrücke dargestellt worden.

124. Beziehungen zwischen den Spannkräften U, O, D, V und den Momenten M°, Fig. 327. Durch die Angriffsmomente M° für die Knotenpunkte der oberen Gurtung sind die Spannkräfte U ohne weiteres bestimmt; es empfiehlt sich, die Einflusslinien für die wagerechten Seitenkräfte

$$U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} = + \frac{M^\circ_m}{h_m} \tag{15}$$

aufzutragen. Für die obere Gurtung erhält man dann

$$O_m \cos \beta_m = - U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} - H$$

$$O_m \cos \beta_m = - \frac{M^\circ_m}{h_m} - H. \tag{16}$$

Diese Gleichung gilt auch für O_{10}.

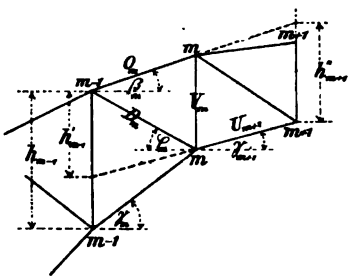


Fig. 327.

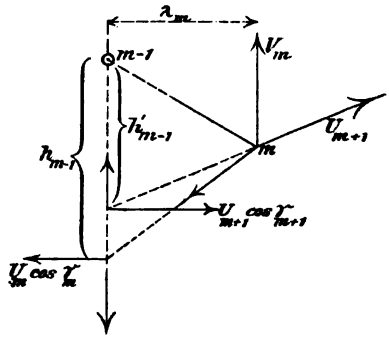


Fig. 328.

Die Spannkräfte D_m sind bestimmt durch

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M^\circ_m}{h_m} - \frac{M^\circ_{m-1}}{h_{m-1}}, \tag{17}$$

und die Spannkräfte V (mit Ausnahme von V_0 und V_{10}) durch

$$V_m \lambda_m = M^\circ_{m-1} - M^\circ_m \frac{h'_{m-1}}{h_m}. \tag{18}$$

Zu dieser Formel, die wir früher nur für senkrechte äussere Kräfte hergeleitet haben, gelangt man am schnellsten durch Betrachtung des Gleichgewichts der am unteren, unbelasteten Knotenpunkte m angreifenden Kräfte. Zerlegt man U_{m+1} und U_m nach Fig. 328 in ihre wagerechten und senkrechten Seitenkräfte und wählt man den oberen Knotenpunkt $m - 1$ zum Drehpunkt, so findet man

$$V_m \lambda_m = U_m \cos \gamma_m \cdot h_{m-1} - U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} h'_{m-1}$$

und aus dieser Gleichung findet man mit Hilfe der Formel 15 sofort die Gleichung 18.*)

Die Berechnung der Strecken h'_{m-1} gestaltet sich besonders einfach, da die Knotenpunkte der unteren Gurtung in einer Parabel vom Pfeile $f = 15{,}0^m$ liegen. Es ist nämlich

$$\operatorname{tg}\gamma_m - \operatorname{tg}\gamma_{m+1} = \text{Konstante} = \frac{8f\lambda}{l^2}$$

mithin

$$h'_{m-1} = h_{m-1} - \lambda\,(\operatorname{tg}\gamma_m - \operatorname{tg}\gamma_{m+1}) = h_{m-1} - \frac{8f\lambda^2}{l^2} = h_{m-1} - \frac{8f}{20^2}$$

$$(19) \qquad h'_{m-1} = h_{m-1} = 0{,}30.$$

Man erhält für

$m = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$h'_{m-1} = 3{,}65$	3,18	2,77	2,40	2,08	1,81	1,59	1,42	$1{,}30^m$
$\frac{h'_{m-1}}{h_m} = 1{,}05$	1,04	1,03	1,01	0,99	0,96	0,92	0,89	0,86

Die Spannkraft in der Scheitelvertikale ergiebt sich, da der obere Knotenpunkt 10 unbelastet ist, ohne weiteres aus O_{10} (Fig. 330), und für die Spannkraft V_0 finden wir durch Untersuchung des Gleichgewichts am oberen, unbe-

*) Greifen die Lasten in den Knotenpunkten der unteren Gurtung an, so betrachte man den Gleichgewichtszustand der am oberen Knotenpunkte m an-

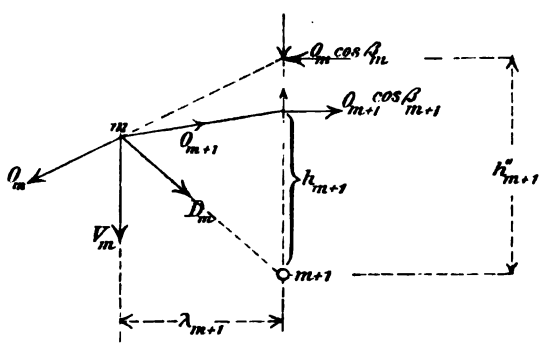


Fig. 329.

greifenden Kräfte. Man findet dann aus der Momentengleichung für den unteren Knotenpunkt $(m+1)$ (Fig. 329)

$$V_m\lambda_{m+1} = O_{m+1}\cos\beta_{m+1}\cdot h_{m+1} - O_m\cos\beta_m h''_{m+1}$$

und, da $O_m\cos\beta_m = -\frac{M^u_m}{h_m}$ ist,

$$(18a) \qquad V_m\lambda_{m+1} = -M^u_{m+1} + M^u_m\,\frac{h''_{m+1}}{h_m}.$$

lasteten Knotenpunkte 0 nach Fig. 331 die Gleichung

$$V_0\lambda_1 + O_0 \cos\beta_0 \cdot k + D_1 \cos\varphi_1 \cdot h_1 = 0$$

$$V_0\lambda_1 = -0{,}095\, O_0 \cos\beta_0 - 3{,}48\, D_1 \cos\varphi_1. \tag{20}$$

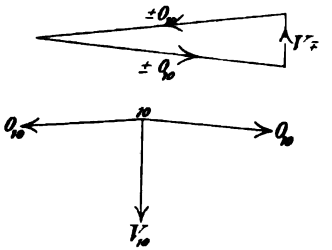


Fig. 330.

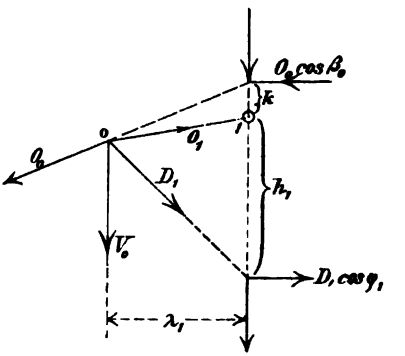


Fig. 331.

125. Einflusslinien für die Momente M^0. Bedeutet η den in senkrechter Richtung gemessenen Abstand eines Knotenpunktes m von dem zu einer Last 1 gehörigen Mittelkraftspolygon (Fig. 325), so ist der Einfluss dieser Last 1 auf das Angriffsmoment M_m nach Seite 298

$$M_m = H\eta;$$

es ist positiv oder negativ, je nachdem m unterhalb oder oberhalb des Mittelkraftspolygons liegt. Auf diese Weise kann man die Einflüsse der in den Knotenpunkten 1, 3, 5 ... angreifenden Lasten 1 auf sämmtliche Angriffsmomente M^0_m schnell ermitteln. Auch die Anwendung der Formeln

$$\text{und} \quad \begin{aligned} M_m &= Bx'' - Hy_m \text{ (für die Knotenpunkte rechts von der Last)} \\ M_m &= Ax' - Hy_m \text{ (für die Knotenpunkte links von der Last)} \end{aligned}$$

führt bei gleichen Feldweiten sehr schnell zum Ziele, weil sich die Werthe Bx'' und Ax' von Knotenpunkt zu Knotenpunkt um die konstanten Beträge $B\lambda$ und $A\lambda$ ändern. Die Ergebnisse der Rechnung sind für alle Momente M^0 in der Tabelle III zusammengestellt worden. Die Tabellen IV, V, VI und VII enthalten die mittels der Formeln 15 bis 20 berechneten Ordinaten der Einflusslinien für die $U\cos\gamma$, $O\cos\beta$, $D\cos\varphi$ und $V\lambda$.

III. Momente M_m^o.

	1	3	5	7	9	9′	7′	5′	3′	1′
M_0^o	— 2,470	— 5,590	— 6,105	— 4,473	— 1,705	+ 0,755	+ 1,887	+ 1,635	+ 0,830	+ 0.154
M_1^o	+ 0,431	— 3,204	— 4,627	— 4,102	— 2,317	— 0,403	+ 0,722	+ 0,839	+ 0,474	+ 0,093
M_2^o	+ 0,340	— 0,770	— 3,082	— 3,540	— 2,688	— 1,320	— 0,252	+ 0,160	+ 0,166	+ 0,039
M_3^o	+ 0,257	+ 1,718	— 1,310	— 2,770	— 2,799	— 1,977	— 1,018	— 0,392	— 0,088	— 0,006
M_4^o	+ 0,184	+ 1.256	+ 0,533	— 1,801	— 2,659	— 2,383	— 1,585	— 0,823	— 0,292	— 0,042
M_5^o	+ 0,118	+ 0,846	+ 2,498	— 0,683	— 2,269	— 2,539	— 1,953	— 1,132	— 0,444	— 0,070
M_6^o	+ 0,061	+ 0,486	+ 1,585	+ 0,734	— 1,628	— 2,444	— 2,122	— 1,320	— 0,546	— 0,089
M_7^o	+ 0,013	+ 0,177	+ 0,793	+ 2,301	— 0,737	— 2,099	— 2,091	— 1,385	— 0,597	— 0,100
M_8^o	— 0,027	— 0,080	+ 0,123	+ 1,067	+ 0,405	— 1,503	— 1,861	— 1,329	— 0,596	— 0,103
M_9^o	— 0,059	— 0,285	— 0,420	+ 0,040	+ 1,807	— 0,647	— 1,424	— 1,146	— 0,543	— 0,096
M_{10}^o	— 0,082	— 0,440	— 0,846	— 0,755	+ 0,450	+ 0,450	— 0,795	— 0,846	— 0,440	— 0,082

IV. $\dfrac{M_m^o}{h_m} = U_{m+1} \cos \gamma_{m+1}$.

	1	3	5	7	9	9′	7′	5′	3′	1′
$M_0^o : h_0$	— 0,625	— 1,415	— 1,546	— 1,132	— 0,432	+ 0,191	+ 0,478	+ 0,414	+ 0,210	+ 0,039
$M_1^o : h_1$	+ 0,124	— 0,921	— 1.330	— 1,179	— 0,666	— 0,116	+ 0,207	+ 0,241	+ 0,136	+ 0,027
$M_2^o : h_2$	+ 0,111	— 0,251	— 0.988	— 1,158	— 0,876	— 0,430	— 0.082	+ 0,052	+ 0.054	+ 0,013
$M_3^o : h_3$	+ 0,095	+ 0,636	— 0,485	— 1,026	— 1.037	— 0,732	— 0,377	— 0,145	— 0,033	— 0,002
$M_4^o : h_4$	+ 0,077	+ 0,528	+ 0,224	— 0,757	— 1,117	— 1,001	— 0.666	— 0,346	— 0,123	— 0,018
$M_5^o : h_5$	+ 0,056	+ 0,401	+ 1,184	— 0,300	— 1,075	— 1,203	— 0,926	— 0,536	— 0,210	— 0,033
$M_6^o : h_6$	+ 0,032	+ 0,257	+ 0,839	+ 0,388	— 0,861	— 1,293	— 1,123	— 0,698	— 0,289	— 0,047
$M_7^o : h_7$	+ 0,008	+ 0,103	+ 0,461	+ 1,338	— 0,428	— 1,220	— 1,216	— 0,805	— 0,347	— 0,058
$M_8^o : h_8$	— 0,017	— 0,050	+ 0,077	+ 0,667	+ 0,253	— 0,939	— 1,163	— 0,881	— 0,373	— 0,064
$M_9^o : h_9$	— 0,039	— 0,187	— 0,276	+ 0,026	+ 1,189	— 0,426	— 0,937	— 0,754	— 0,357	— 0,063
$M_{10}^o : h_{10}$	— 0,055	— 0,293	— 0,564	— 0,530	+ 0,300	+ 0,300	— 0,530	— 0,564	— 0,293	— 0,055

V. $O_m \cos \beta_m = -\frac{M^\circ_m}{h_m} - H.$

Last in	1	3	5	7	9	9′	7′	5′	3′	1′
$O_0 \cos \beta_0$	+0,59	+1.21	+1,06	+0,34	−0,57	−1,19	−1,27	−0,90	−0,41	−0,07
$O_1 \cos \beta_1$	−0.16	+0,72	+0,84	+0,38	−0,34	−0,89	−1,00	−0,73	−0,34	−0,06
$O_2 \cos \beta_2$	−0,14	+0,05	+0,50	+0,36	−0,13	−0,57	−0,72	−0,54	−0,26	−0,05
$O_3 \cos \beta_3$	−0,13	−0,84	−0,00	+0,23	+0,03	−0,27	−0,42	−0,34	−0,17	−0,03
$O_4 \cos \beta_4$	−0,11	−0,73	−0,71	−0,04	+0,12	−0,00	−0,13	−0,14	−0,08	−0,02
$O_5 \cos \beta_5$	−0,09	−0,60	−1,67	−0,50	+0,07	+0,20	+0,13	+0,05	+0,01	−0.00
$O_6 \cos \beta_6$	−0,07	−0,46	−1,33	−1,19	−0,14	+0,29	+0,33	+0,21	+0,08	+0,01
$O_7 \cos \beta_7$	−0,04	−0,31	−0,95	−2,13	0.57	+0,22	+0,42	+0,32	+0,14	+0,02
$O_8 \cos \beta_8$	−0,02	−0,15	−0,56	−1.46	-1,26	−0,06	+0,37	+0,34	+0,17	+0.03
$O_9 \cos \beta_9$	+0,00	−0,02	−0,21	−0,82	−2,19	0,58	+0,14	+0,27	+0,15	+0,03
$O_{10} \cos \beta_{10}$	+0,02	+0,09	+0,08	−0,27	-1,30	1.30	−0,27	+0,08	+0.09	+0,02

VI. $D_m \cos \varphi_m = \frac{M^\circ_m}{h_m} - \frac{M^\circ_{m-1}}{h_{m-1}}.$

Last in	1	3	5	7	9	9′	7′	5′	3′	1′
$D_1 \cos \varphi_1$	+0,75	+0,49	+0,22	−0,05	−0,23	−0,31	−0,27	−0,17	−0,07	−0,01
$D_2 \cos \varphi_2$	−0,01	+0,67	+0,34	+0,03	−0,21	−0,31	−0.29	−0,19	− 0,08	−0,01
$D_3 \cos \varphi_3$	−0,02	+0,89	+0,50	+0,13	− 0,16	− 0,30	−0,30	−0,20	−0,09	−0,01
$D_4 \cos \varphi_4$	− 0,02	− 0,11	+0,71	+0,27	− 0,08	−0,27	− 0,29	−0,20	− 0,09	−0,02
$D_5 \cos \varphi_5$	− 0,02	− 0,13	+0,96	+0,46	+0,04	−0,20	−0,26	−0,19	− 0,09	−0,02
$D_6 \cos \varphi_6$	−0,02	− 0,14	− 0,35	+0,69	+0,21	−0,09	−0,20	−0,16	−0,08	−0,01
$D_7 \cos \varphi_7$	−0,02	−0,15	−0,38	+0,95	+0,43	+0,07	− 0,09	−0,11	−0,06	−0,01
$D_8 \cos \varphi_8$	−0,02	−0,15	− 0,38	−0,67	+0,68	+0,28	+0,05	− 0,03	−0,08	−0,01
$D_9 \cos \varphi_9$	−0,02	−0,14	−0,35	−0,64	+0,94	+0,51	+0,23	+0,08	+0,02	+0.00
$D_{10} \cos \varphi_{10}$	− 0,02	−0,11	−0,29	−0,56	−0,89	+0,73	+0,41	+0,19	+0,06	+0.01

VII. $V_m \lambda$.

Last in	1	3	5	7	9	9′	7′	5′	3′	1′
$V_0 \lambda$	−2,66	−1,83	−0,85	+0,13	+0,87	+1,18	+1,06	+0,69	+0,30	+0,05
$V_1 \lambda$	−2,92	−2,23	−1,25	−0,17	+0,78	+1,18	+1,13	+0,75	+0,33	+0,06
$V_2 \lambda$	+0,08	−2,40	−1,47	−0,42	+0,48	+0,97	+0,98	+0,67	+0,30	+0,05
$V_3 \lambda$	+0,07	−2,54	−1,68	−0,69	+0,19	+0,72	+0,80	+0,56	+0,26	+0,04
$V_4 \lambda$	+0,07	+0,45	−1,85	−0,95	−0,11	+0,43	+0,58	+0.44	+0,21	+0,04
$V_5 \lambda$	+0,07	+0,42	−1,94	−1,17	−0,41	+0,13	+0,35	+0,30	+0,15	+0.03
$V_6 \lambda$	+0,06	+0,38	+0,98	−1,34	−0,71	−0,19	+0,08	+0,13	+0,08	+0,02
$V_7 \lambda$	+0,05	+0,32	+0,85	−1,38	−0,95	−0,51	−0,20	−0,05	−0,00	+0,00
$V_8 \lambda$	+0,04	+0,25	+0,68	+1,35	−1,10	−0,76	−0,43	−0,20	−0.07	−0,01
$V_9 \lambda$	+0,02	+0,16	+0,48	+1,03	−1,15	−0,95	−0,64	−0,34	−0,09	−0,02

126. Einfluss einer Temperaturänderung. Aendert sich die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechende Temperatur um $t°$, so entsteht nach No. 115

$$(21) \qquad H_t = X_t''' = \frac{\varepsilon t l'''}{\sum_o^l \frac{1}{h^2}(y_u^2 + y_o^2)\frac{\lambda}{EF_s}},$$

$$X'' = 0, \; X' \text{ angenähert} = 0.$$

Der im Nenner von X_t''' stehende Faktor $\frac{\lambda}{EF_s}$ ist derselbe, der auf Seite 325 beim Uebergang von Gleich. 2 zur Gleich. 3 gehoben worden war. Für l''' darf $l = 60^m$ gesetzt werden. Es entsteht dann, mit $\varepsilon E = 250$ t/qm für Flusseisen,

$$(22) \qquad H_t = \frac{\varepsilon E \frac{l}{\lambda} F_s t}{\sum_o^l \frac{1}{h^2}(y_u^2 + y_o^2)} = \frac{250 \cdot 20 F_s t}{2 \cdot 58{,}536} = 42{,}7 F_s t,$$

wo F_s den Gurtquerschnitt im Scheitel der Brücke bedeutet.*) In der Regel genügt es, mit $t = \pm 35°$ C. zu rechnen. Dies würde $H_t = \pm 1500 F_s$ liefern. Wir wollen aber, da der Einfluss der Füllungsglieder diesen Werth erheblich verkleinert, nur

$$H_t = \pm 1400 F_s$$

annehmen. Die Berechnung von F_s soll mit Hilfe der auf Seite 185 abgeleiteten Näherungsformeln (4) erfolgen.

Die Summe der positiven Ordinaten der Einflusslinie für $O_{10} \cos \beta_{10}$ ist

$$\sum_+ = 2\,(0{,}02 + 0{,}09 + 0{,}08) = 0{,}38$$

die Summe der negativen Ordinaten

$$\sum_- = 2\,(0{,}27 + 1{,}30) = 3{,}14.$$

Die Knotenlast setzt sich zusammen aus der ständigen Last $2{,}5 \cdot 6{,}0 = 15^t$ und der ebenso grossen Verkehrslast 15^t. Der grösste Druck O_{10} ist, wegen $\sec \beta_{10} = 1{,}00$,

$$_{min}O_{10} = -30 \cdot 3{,}14 + 15 \cdot 0{,}38 = -88{,}5^t; \; _{max}O < _{min}O.$$

Der Einfluss von H_t auf O_{10} ist

$$O_{10} = \frac{H_t y_{u\,10}}{h_{10}} = \pm \frac{1400 \cdot 2{,}01 F_s}{1{,}5} = \pm 1880 F_s.$$

Wird eine Beanspruchung von $\sigma = 950$ kg/qcm $= 9500$ t/qm gestattet, so ergiebt sich F_s aus der Gleichung

$$88{,}5 + 1880 F_s = 9500 F_s.$$

Man erhält $F_s = 0{,}0116$ qm.

Ganz ebenso findet man für $U_{10} \cos \gamma_{10} = U_{10}$ die Werthe

$$\sum_+ = 1{,}22, \; \sum_- = 3{,}04$$

$$_{min}U_{10} = -30 \cdot 3{,}04 + 15 \cdot 1{,}22 - \frac{H_t \cdot y_{o\,9}}{h_9}$$

$$= -73 - \frac{1400 \cdot 3{,}38}{1{,}52} F_s = -73 - 3110 F_s.$$

---

*) Da die Querschnitte der beiden Gurtungen nicht gleich gross ausfallen, so setze man für F_s den Mittelwerth der beiden Gurtquerschnitte.

Aus der Gleichung

$$73 + 8110\, F_s = 9500\, F_s$$

folgt $F_s = 0{,}0114$ qm. Der mittlere Gurtquerschnitt beträgt also im Scheitel rund $F_s = 0{,}012$ qm und es darf daher mit

$$H_t = \pm 1400 \cdot 0{,}012 = 17^t$$

gerechnet werden. Dieser Horizontalschub erzeugt die folgenden Momente $M^o = -H_t \cdot y_o$

für Knotenpunkt 0 1 2 3 4

$M^o = \pm 153{,}68;\ \pm 113.22;\ \pm 76{,}84;\ \pm 44{,}88;\ \pm 17{,}17\ tm$

für 5 6 7 8 9 10

$M^o = +\ 6{,}29;\ \mp\ 25{,}50;\ \mp 40{,}46;\ \mp 51{,}17;\ \mp 57{,}46;\ \mp 59{,}67\ tm$

und aus diesen Momenten ergeben sich mit Hilfe der Formeln 15 bis 19 die in Tabelle VIII zusammengestellten Spannkräfte in Tonnen.

VIII. Einfluss der Temperaturänderung.

m	$\pm U_m \cos\gamma_m$	$\pm O_m \cos\beta_m$	$\pm D_m \cos\varphi_m$	$\pm V_m \lambda$
0		56^t		26^t
1	39^t	50	6^t	35
2	33	42	8	33
3	25	34	8	31
4	17	24	10	27
5	7	14	4	23
6	3	4	10	18
7	13	7	11	12
8	24	15	8	5
9	32	21	6	2
10	38	23	2	

127. Querschnittsberechnung. Es genügt hier, die Berechnung eines Stabquerschnittes zu besprechen. Wir wählen die Diagonale D_6. Die Einflusslinie für $D_6 \cos\varphi_6$ liefert $\overset{+}{\Sigma} = 0{,}90$, $\overset{-}{\Sigma} = 1{,}05$. Es ergiebt sich also einschliesslich des Einflusses der Temperaturänderung

$$_{min}D_6 \cos\varphi_6 = -30 \cdot 1{,}05 + 15 \cdot 0{,}90 - 10 = -28^t,$$
$$_{min}D_6 = -28 \sec\varphi_6 = -28 \cdot 1{,}03 = -29^t.$$

$_{max}D_6$ ist kleiner als $_{min}D_6$. Das erforderliche Trägheitsmoment des Querschnitts ist bei 5-facher Knicksicherheit nach der *Euler*'schen Formel

Fig. 332.

$$J_{min} = 2{,}5\, D d^2 \text{ cm}^4,$$

wo d die Länge der Diagonale in Metern bedeutet. Man erhält

$$J_{min} = 2{,}5 \cdot 29 \cdot 9{,}58 = 695 \text{ cm}^4.$$

Zwei gleichschenklige Winkeleisen von den Abmessungen $12 \cdot 1{,}1$ cm, Fig. 332, besitzen $J_{min} = 2 \cdot 340 = 680$, genügen also. Der Querschnittsinhalt ist $F = 2 \cdot 25{,}4 = 50{,}8$ qcm und die Beanspruchung

$$\sigma = \frac{29}{50{,}8} = 0{,}57 \text{ t/qcm} = 570 \text{ kg/qcm}.$$

Die auf diesem Wege gewonnenen Querschnitte sind in der Tabelle IX zusammengestellt worden unter Beifügung der Werthe

$$\frac{s}{F} = \frac{\text{Stablänge in cm}}{\text{Querschnittsinhalt in qcm}}.$$

Die Stablängen sind für die Gurtungen, Diagonalen und Vertikalen mit o, u, d, h bezeichnet worden.

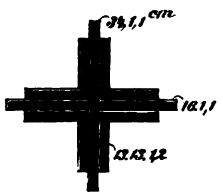


Fig. 333.

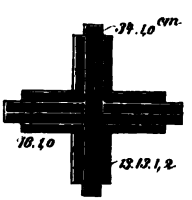


Fig. 334.

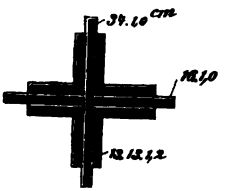


Fig. 335.

IX. Querschnitte.

a) Gurtungen.

		F	o	$\frac{o}{F}$			F	u	$\frac{u}{F}$
O_0	4 Winkeleisen 13 · 1,2	193	259	1,3	U_1	4 Winkeleisen 13 · 1,2	252	414	1,6
O_1	1 Platte 34 · 1,1 2 Platten 16 · 1,1 Fig. 333	193	383	2,0	U_2	2 Platten 34 · 1.0 4 „ 16 · 1,0 Fig. 334	252	394	1,6
O_2	4 Winkeleisen 13 · 1,4	139	369	2,6	U_3	4 Winkeleisen 13 · 1,2	186	375	2,0
O_3	„ „ 13 · 1,2	120	354	3,0	U_4	1 Platte 34 · 1,0 2 Platten 16 · 1,0 Fig. 335	186	358	1,9
O_4	„ „ 13 · 1,2	120	342	2,8					
O_5	„ „ 13 · 1,2	120	330	2,8	U_5	4 Winkeleisen 13 · 1,4	139	342	2,5
O_6	„ „ 13 · 1,2	120	321	2,7	U_6	„ „ 13 · 1,4	139	329	2,4
O_7	„ „ 13 · 1,2	120	312	2,6	U_7	„ „ 13 · 1,4	139	318	2,3
O_8	„ „ 13 · 1,2	120	307	2,6	U_8	„ „ 13 · 1,4	139	309	2,2
O_9	„ „ 13 · 1,4	139	302	2,2	U_9	„ „ 13 · 1,4	139	303	2,2
O_{10}	„ „ 13 · 1,2	120	300	2,5	U_{10}	„ „ 13 · 1,2	120	300	2,5

b) Füllungsstäbe.

		F	d	$\frac{d}{F}$			F	h	$\frac{h}{F}$
					V_0	2 Winkeleisen 15 · 1,4	81	395	4,9
D_1	2 Winkeleisen 12 · 1,1	45	320	6,3	V_1	„ „ 15 · 1,4	81	348	4,3
D_2	„ „ 12 · 1,1	45	314	6,2	V_2	„ „ 13 · 1,2	60	307	5,1
D_3	„ „ 12 · 1,1	45	311	6,1	V_3	„ „ 13 · 1,2	60	270	4,5
D_4	„ „ 12 · 1,1	45	310	6,1	V_4	„ „ 11 · 1,0	42,5	238	5,6
D_5	„ „ 12 · 1,1	45	310	6,1	V_5	„ „ 11 · 1,0	42,5	211	5,0
D_6	„ „ 12 · 1,1	45	310	6,1	V_6	„ „ 9 · 1,1	37,5	189	5,1
D_7	„ „ 13 · 1,2	54	312	5,2	V_7	„ „ 9 · 1,1	37,5	172	4,6
D_8	„ „ 13 · 1,2	54	315	5,2	V_8	„ „ 8 · 1,0	30	160	5,3
D_9	„ „ 13 · 1,2	54	321	5,3	V_9	„ „ 8 · 1,0	30	152	5,0
D_{10}	„ „ 14 · 1,3	63	330	5,7	V_{10}	„ „ 8 · 1,0	30	150	5,0

d. Zahlenbeispiel, zweiter Theil.

128. Im Anschluss an die vorstehende Querschnittsberechnung stellen wir uns jetzt die Aufgabe, die Kämpferdrücke mit Berücksichtigung der Längenänderungen sämmtlicher Stäbe zu berechnen. Als statisch unbestimmte Grössen sollen die auf den Scheitelquerschnitt des Bogens wirkenden X_a, X_b und X_c eingeführt werden, Fig. 336, vergl. auch Fig. 318 bis 320. Da ein symmetrischer Träger vorliegt, so nehmen wir X_b senkrecht und X_c wagerecht an.

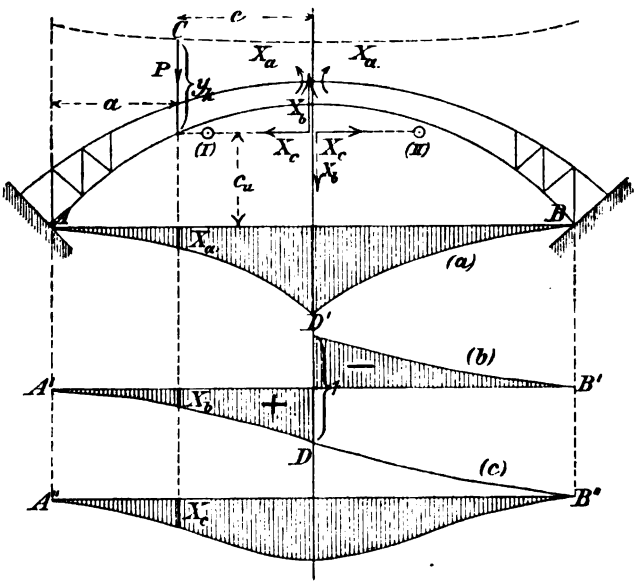


Fig. 336.

Die Gewichte w sind nach der Formel

$$(23)\quad w_m = \frac{1}{h_m}\Big[-\Delta o_m \sec\beta_m + \Delta u_{m+1}\sec\gamma_{m+1} + \Delta d_m \sec\varphi_m - \Delta d_{m+1}\sec\varphi_{m+1} - \Delta h_m \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m} + \Delta h_{m+1}\frac{h_m}{\lambda_{m+1}}\Big]$$

zu berechnen, mit Ausnahme von w_C*) und w_{10}, für welche man die Werthe

$$(24)\qquad w_C = \frac{\Delta h_0}{\lambda_0} \text{ und}$$

$$(25)\qquad \tfrac{1}{2} w_{10} = \frac{1}{h_{10}}\left[-\Delta o_{10}\sec\beta_{10} + \Delta d_{10}\sec\varphi_{10} - \Delta h_{10}\operatorname{tg}\varphi_{10}\right]$$

*) Mit C ist der linke Endpunkt des Gurtstabes O_0 bezeichnet worden, Fig. 337.

erhält. $\frac{1}{2} w_{10}$ ist das auf eine Bogenhälfte entfallende Gewicht des Knotenpunktes 10. Bei der Berechnung von w_0 denke man die Stützpunkte C und A in Fig. 337 durch einen starren Stab verbunden, der die Rolle einer Diagonale spielt. Der für alle Stäbe gleich grosse Elasticitätsmodul E darf $= 1$ gesetzt werden.

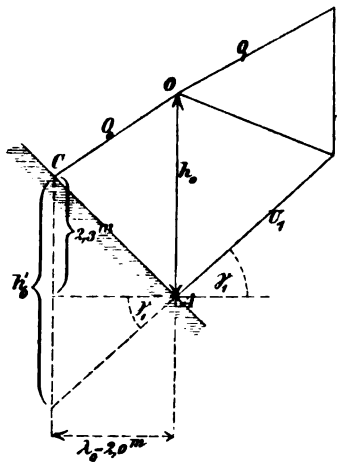


Fig. 337.

129. **Zustand** $X_o = -1$. Die Tabelle X enthält die durch die Momente $M^o = -1$ bestimmten und mit Hilfe der Gleichungen 15 bis 18 auf Seite 330 berechneten Spannkräfte sowie alle zur Berechnung der Gewichte w_o erforderlichen Werthe.

Tabelle X.

	m	O_o	$\frac{o}{F}$	$\Delta o_o = S_o \frac{o}{F}$	$O_o \Delta o_o$	sec β	Δo sec β
Obere Gurtung	0	+ 0,329	1,3	+ 0,43	+ 0.141	1,30	+ 0,56
	1	+ 0,367	2,0	+ 0,73	+ 0,268	1.28	+ 0,93
	2	+ 0,401	2,6	+ 1,04	+ 0.417	1,23	+ 1,28
	3	+ 0,437	3,0	+ 1,81	+ 0,572	1,18	+ 1,55
	4	+ 0,479	2,8	+ 1.34	+ 0.642	1,14	+ 1,53
	5	+ 0.521	2,8	+ 1,46	+ 0,761	1,10	+ 1,61
	6	+ 0,566	2,7	+ 1,53	+ 0,866	1,07	+ 1,64
	7	+ 0,604	2,6	+ 1,57	+ 0.948	1,04	+ 1,63
	8	+ 0,638	2,6	+ 1,66	+ 1,059	1,02	+ 1,69
	9	+ 0.665	2,2	+ 1,46	+ 0,971	1,01	+ 1,47
	10	+ 0,667	2,5	+ 1,67	+ 1,114	1,00	+ 1,67
				Summe:	7,759	Summe:	15,56

		U	$\frac{u}{F}$	$\Delta u = \frac{Uu}{F}$	$U\Delta u$	sec γ	$\Delta u \sec \gamma$
Untere Gurtung	1	— 0.349	1,6	— 0,56	+ 0,195	1,38	— 0,77
	2	— 0,376	1,6	— 0,60	+ 0,226	1,31	— 0,79
	3	— 0,407	2,0	— 0,81	+ 0,330	1,25	— 1,01
	4	— 0,440	1,9	— 0,84	+ 0,370	1,19	— 1,00
	5	— 0,479	2,5	— 1,20	+ 0,575	1,14	— 1,37
	6	— 0,521	2,4	— 1,25	+ 0,651	1,10	— 1,38
	7	— 0,561	2,3	— 1,29	+ 0,724	1,06	— 1,37
	8	— 0,598	2,2	— 1,32	+ 0,789	1,03	— 1,36
	9	— 0,631	2,2	— 1,39	+ 0,877	1,01	— 1,40
	10	— 0,658	2,5	— 1,65	+ 1,086	1,00	— 1,65
				Summe:	5,823		

		D	$\frac{d}{F}$	$\Delta d = D\frac{d}{F}$	$D\Delta d$	sec φ	$\Delta d \sec \varphi$
Diagonalen	1	— 0,037	6,8	— 0,23	+ 0,009	1,07	— 0.25
	2	— 0,040	6,2	— 0,25	+ 0,010	1,05	— 0,26
	3	— 0,046	6,1	— 0,28	+ 0,013	1,04	— 0,29
	4	— 0,051	6,1	— 0,31	+ 0,016	1,03	— 0,32
	5	— 0,055	6,1	— 0,34	+ 0,019	1.03	— 0,35
	6	— 0,057	6,1	— 0,35	+ 0,020	1,03	— 0,36
	7	— 0,054	5,2	— 0,28	+ 0,015	1,04	— 0,29
	8	— 0,046	5,2	— 0,24	+ 0,011	1,05	— 0,25
	9	— 0,035	5.3	— 0,19	+ 0,007	1,07	— 0,20
	10	— 0,010	4,7	— 0,05	+ 0,000	1,10	— 0,05
				Summe:	+ 0,120		

		V_m	$\frac{h_m}{F}$	$\Delta h_m = \frac{V_m h_m}{F}$	$V_m \Delta h_m$	$\frac{h'_{m-1}}{\lambda}$	$\Delta h_m \frac{h'_{m-1}}{\lambda}$	$\frac{h_{m-1}}{\lambda}$	$\Delta h_m \cdot \frac{h_{m-1}}{\lambda}$
Vertikalen	0	+ 0,035	4,9	+ 0,17	+ 0,006	2,10*)	+ 0,36		
	1	+ 0,016	4,3	+ 0,07	+ 0,001	1,22	+ 0,08	1,32	+ 0,09
	2	+ 0,012	5,1	+ 0,06	+ 0,001	1,06	+ 0,06	1,16	+ 0,07
	3	+ 0,009	4,5	+ 0,04	+ 0,000	0,92	+ 0,04	1,02	+ 0,04
	4	+ 0,003	5,6	+ 0,02	+ 0,000	0,80	+ 0,01	0,90	+ 0,02
	5	— 0,005	5,0	— 0,02	+ 0,000	0,69	— 0,02	0,79	— 0,02
	6	— 0,014	5,1	— 0,07	+ 0,001	0,60	— 0,04	0,70	— 0,05
	7	— 0,025	4,6	— 0,12	+ 0,003	0,53	— 0,06	0,63	— 0,07
	8	— 0,038	5,3	— 0,20	+ 0,008	0,47	— 0,09	0,57	— 0,11
	9	— 0,048	5.0	— 0,24	+ 0,012	0,43	— 0,10	0,53	— 0,13
	10	— 0,058	2,5**)	— 0,14	+ 0.008			0,51	— 0,13
				Summe:	+ 0,040				

*) $\frac{h'_0}{\lambda_0} = \frac{2,30}{2,0} + \operatorname{tg}\gamma_1 = 1,15 + 0,95 = 2,10.$

**) Es ist nur die halbe Scheitelvertikale in Rechnung gestellt worden.

Die Gewichte w_a für den Zustand $X_a = -1$ sind nun

$$w_{Ca} = \frac{0{,}17}{2{,}00} = +0{,}08 \text{ (nach Gleich. 24)}$$

$$w_{0a} = \frac{1}{3.95}(-0{,}56 - 0{,}77 - 0{,}00 + 0{,}25 - 0{,}36 + 0.09) = -0.34$$

$$w_{1a} = \frac{1}{3.48}(-0{,}93 - 0{,}79 - 0{,}25 + 0{,}26 - 0{,}08 + 0{,}07) = -0.49$$

$$w_{2a} = \frac{1}{3.07}(-1{,}28 - 1.01 - 0{,}26 + 0{,}29 - 0{,}06 + 0{,}04) = -0.74$$

$$w_{3a} = \frac{1}{2.70}(-1{,}55 - 1{,}00 - 0{,}29 + 0{,}32 - 0{,}04 + 0{,}02) = -0{,}94$$

$$w_{4a} = \frac{1}{2.38}(-1{,}58 - 1.37 - 0.32 + 0.35 - 0{,}01 - 0{,}02) = -1.22$$

$$w_{5a} = \frac{1}{2{,}11}(-1{,}61 - 1{,}38 - 0{,}35 + 0{,}36 + 0{,}02 - 0{,}05) = -1{,}43$$

$$w_{6a} = \frac{1}{1.89}(-1.64 - 1{,}37 - 0{,}36 + 0{,}29 + 0{,}04 - 0.07) = -1.65$$

$$w_{7a} = \frac{1}{1.72}(-1{,}63 - 1.36 - 0.29 + 0{,}25 + 0{,}06 - 0{,}11) = -1{,}79$$

$$w_{8a} = \frac{1}{1.60}(-1.69 - 1{,}40 - 0{,}25 + 0{,}20 + 0{,}09 - 0{,}13) = -1.99$$

$$w_{9a} = \frac{1}{1.52}(-1{,}47 - 1{,}65 - 0{,}20 + 0{,}05 + 0{,}10 - 0{,}18) = -2{,}17.$$

Die Biegungslinie für den Zustand $X_a = -1$ lässt sich als die Momentenlinie eines Freiträgers CG deuten, dessen Einspannungsstelle dem Scheitelquerschnitt des Bogens entspricht, Fig. 338,*) und der mit den Gewichten $-w_a$ belastet ist. Nach Berechnung der Querkräfte:

$Q_0 = -0.08$	$Q_4 = 2{,}43$	$Q_8 = 8{,}52$
$Q_1 = -0{,}08 + 0{,}34 = 0{,}26$	$Q_5 = 3{,}65$	$Q_9 = 10{,}51$
$Q_2 = 0{,}26 + 0{,}49 = 0{,}75$	$Q_6 = 5{,}08$	$Q_{10} = 12.68$
$Q_3 = 0{,}75 + 0.74 = 1{,}49$	$Q_7 = 6{,}73$	

findet man $M_0 = -0{,}08 \cdot 2.0$ also $\frac{M_0}{\lambda} = -0{,}08 \cdot \frac{1}{8} = -0.05$

$M_1 : \lambda = -0{,}05 + 0{,}26 = 0{,}21$	$M_5 : \lambda = 8.53$	$M_8 : \lambda = 28{,}86$
$M_2 : \lambda = 0{,}21 + 0.75 = 0.96$	$M_6 : \lambda = 13.61$	$M_9 : \lambda = 39{,}37$
$M_3 : \lambda = 0{,}96 + 1.49 = 2{,}45$	$M_7 : \lambda = 20.34$	$M_{10} : \lambda = 52{,}05.$
$M_4 : \lambda = 2{,}45 + 2{,}43 = 4{,}88$		

Nun ist $\delta_{aa} = \Sigma S_a^2 \frac{s}{EF} = \Sigma S_a \Delta s_a$

$$= \Sigma O \Delta o + \Sigma U \Delta u + \Sigma D \Delta d + \Sigma V \Delta v$$
$$= 2\,[7{,}759 + 5{,}823 + 0{,}120 + 0{,}040] = 2 \cdot 13.74$$

und man erhält daher aus den die Durchbiegungen δ_{ma} (für $E = 1$) vorstellenden Momenten M:

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} = 1 \cdot \frac{M_m}{2 \cdot 13{,}74} = \frac{\frac{M_m}{\lambda}}{\frac{2 \cdot 13{,}74}{3.0}} = \frac{M_m : \lambda}{9{,}16}.$$

*) Vergl. auch Seite 122, Fig. 108.

Den in den Knotenpunkten 1, 3, 5, 7, 9 angreifenden Lasten entspricht also der Reihe nach

$$X_{a.1} = \frac{0{,}21}{9{,}16} = 0{,}02293 \qquad X_{a.7} = \frac{20{,}34}{9{,}16} = 2{,}225$$

$$X_{a.3} = \frac{2{,}45}{9{,}16} = 0{,}267 \qquad X_{a.9} = \frac{39{,}37}{9{,}16} = 4{,}298.$$

$$X_{a.5} = \frac{8{,}53}{9{,}16} = 0{,}931$$

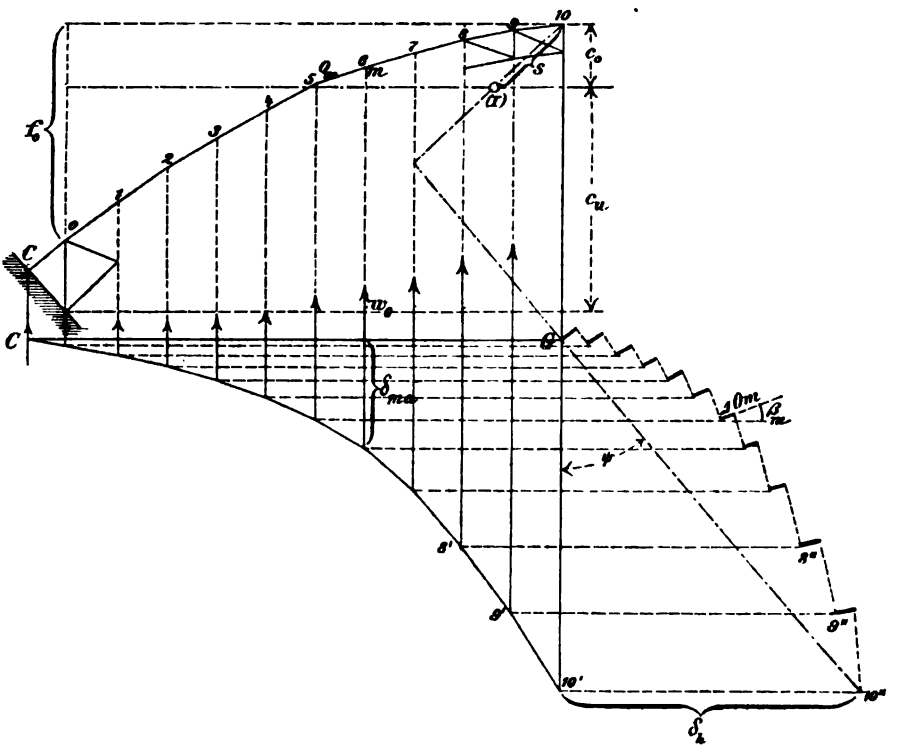


Fig. 338.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung des Poles (I), um den sich eine nach Seite 321, Fig. 319 an die Scheitelvertikale angeschlossene starre Scheibe *I* dreht, und ermitteln zunächst die wagerechte Verschiebung δ_h des oberen Knotenpunktes 10 nach dem in Nr. 51, Seite 129, beschriebenen Verfahren. Aus der, einen Sonderfall der Fig. 116, Seite 130, bildenden (nur als Skizze anzusehenden) Figur 338 folgt die einfache, leicht zu beweisende Gleichung

$$\delta_h = \sum_0^{10} \Delta o_m \sec \beta_m + \sum_0^{9} \delta_{ma} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m-1}) + \delta_{10\,a} \operatorname{tg} \beta_{10}.$$

Da nun die Knotenpunkte 0, 1, 2, ... 10 der oberen Gurtung in einer Parabel

von der Pfeilhöhe $f_o = 12{,}55$ und der Spannweite $l = 60^m = 20\,\lambda$ liegen, und da ferner die Feldweite konstant ist, so ergiebt sich

$$\operatorname{tg}\beta_m - \operatorname{tg}\beta_{m-1} = 2\operatorname{tg}\beta_{10} = \frac{8 f_o \lambda}{l^2} = \frac{8 \cdot 12{,}55}{20^2 \lambda} = \frac{0{,}2510}{\lambda}$$

und

$$\delta_h = 15{,}56 + \left(\sum_0^9 \delta_{ma} + \tfrac{1}{2}\delta_{10\,a}\right)\frac{0{,}2510}{\lambda} = 15{,}56 + \left(\sum_0^9 \frac{M_m}{\lambda} + \frac{M_{10}}{2\lambda}\right)0{,}2510$$

wo M_m die vorhin berechneten Momente in Folge der Gewichte w_a sind.

Es ergiebt sich (für $E = 1$)

$$\delta_h = 15{,}56 + (119{,}16 + 26{,}02)\,0{,}2510 = 52{,}00.$$

Bezeichnet man den Abstand des Poles *(I)* vom Knotenpunkte 10 mit s und beachtet man, dass sich die Scheibe I in Folge von $X_a = -1$ um den Winkel $\frac{1}{2}\delta_{aa}$ dreht, so findet man für die Verschiebung des Punktes 10 den Werth $\frac{1}{2}\delta_{aa}s$. Da nun andrerseits die Verschiebung des Punktes 10 durch die Strecke

$$\overline{G\,10''} = \frac{\delta_h}{\sin\psi}$$

dargestellt wird, so ergiebt sich die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\delta_{aa}s = \frac{\delta_h}{\sin\psi}$$

und man findet daher

$$c_o = s\sin\psi = \frac{\delta_h}{0{,}5\,\delta_{aa}} = \frac{52.00}{13{,}74} = 3{,}78^m$$

$$c_u = 16{,}5 - 3{,}78 = 12{,}72^m$$

während sich vorhin $c_u = 12{,}99^m$ ergab. Die Lage der Kraft X_o ist nunmehr bekannt, Fig. 336.

130. Eine zweite Bestimmungsweise von c_u ergiebt sich aus der Bedingung

$$\delta_{ae} = \Sigma\frac{S_a S_e s}{EF} = 0,$$

wo S_e die Spannkräfte in Folge von $X_e = -1$ bedeuten. Fügt man zu der Kraft $X_e = -1$ in beliebiger Höhe (z. B. in der Höhe 10^m, Fig. 339) zwei sich aufhebende Kräfte 1 hinzu und bezeichnet man die Spannkräfte in Folge der durch einen gefiederten Pfeil dargestellten Kraft 1 mit S', und den Hebelarm des ausser dieser Kraft noch angreifenden Kräftepaares mit e, so ist

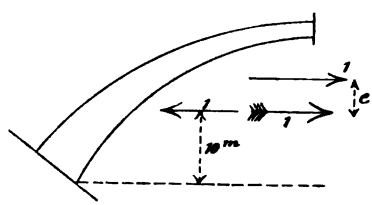


Fig. 339.

$$S_e = S' + S_a \cdot e$$

und man erhält

$$\Sigma\frac{S' S_a s}{EF} + e\,\Sigma\frac{S_a^2 s}{EF} = 0$$

woraus (wegen $\delta_{aa} = 2 \cdot 13.74$)

$$e = -\frac{\sum_0^l S'\Delta s_a}{\delta_{aa}} = -\frac{\sum_0^{\frac{1}{2}l} S'\Delta s_a}{13{,}74}.$$

In der Tabelle XI sind die Spannkräfte S'*), die aus Tabelle X übernommenen Längenänderungen Δs_a in Folge $X_a = -1$ und die Produkte $S' \Delta s_a$ zusammengestellt worden. Man erhält

$$e = \frac{14{,}7572 + 20{,}6132 + 1.6929 + 0{,}2690}{13.74} = 2.72^{m}$$

also, wie vorhin, $c_u = 10{,}0 + 2.72 = 12.72^{m}$.

Tabelle XI.

Gurtungen.

	O'	Δo_a	$O' \Delta o_a$		U'	Δu_a	$U' \Delta u_a$
O_0	+ 3,29	+ 0,43	+ 1,4147				
O_1	+ 2,63	+ 0,73	+ 1,9199	U_1	— 2,11	— 0,56	+ 1,1816
O_2	+ 1,84	+ 1,04	+ 1,9136	U_2	— 1,38	— 0,60	+ 0,8280
O_3	+ 1,03	+ 1.31	+ 1,3493	U_3	— 0,62	— 0,81	+ 0.5022
O_4	+ 0,19	+ 1.34	+ 0,2546	U_4	+ 0,15	— 0,84	— 0.1260
O_5	— 0,65	+ 1,46	— 0,9490	U_5	+ 0,95	— 1,20	— 1.1400
O_6	— 1,47	+ 1,53	— 2,2491	U_6	+ 1,75	— 1,25	— 2.1875
O_7	— 2,21	+ 1,57	— 3,4697	U_7	+ 2,52	— 1.29	— 3,2508
O_8	— 2,81	+ 1,66	— 4,6646	U_8	+ 3,22	— 1,32	— 4,2504
O_9	— 3.23	+ 1,46	— 4,7158	U_9	+ 3,77	— 1,89	— 5.2403
O_{10}	— 3,33	+ 1.67	— 5,5611	U_{10}	+ 4,20	— 1.65	— 6,9300
		Summe:	— 14,7572			Summe:	— 20,6132

Füllungsstäbe.

	D'	Δd_a	$D' \Delta d_a$		V'	Δh_a	$V' \Delta h_a$
				V_0	— 0,634	+ 0.17	— 0,1078
D_1	+ 0,510	— 0,23	— 0,1173	V_1	— 0,732	+ 0.07	— 0,0512
D_2	+ 0,584	— 0,25	— 0,1460	V_2	— 0,698	+ 0.06	— 0,0416
D_3	+ 0.653	— 0,28	— 0,1828	V_3	— 0,630	+ 0,04	— 0,0252
D_4	+ 0,723	— 0,31	— 0,2241	V_4	— 0,545	+ 0,02	— 0,0109
D_5	+ 0,783	— 0,34	— 0,2662	V_5	— 0,449	— 0,02	+ 0,0090
D_6	+ 0,807	— 0,35	— 0,2825	V_6	— 0,357	— 0,07	+ 0,0250
D_7	+ 0,776	— 0,28	— 0,2173	V_7	— 0,150	— 0,12	+ 0,0180
D_8	+ 0,659	— 0.24	— 0,1582	V_8	— 0,010	— 0.20	— 0,0020
D_9	+ 0,479	— 0,19	— 0,0910	V_9	+ 0,174	— 0,24	— 0,0418
D_{10}	+ 0,149	— 0.05	— 0,0075	V_{10}	+ 0,289	— 0,14	— 0,0405
		Summe:	— 1,6929			Summe:	— 0,2690

131. Für den Zustand $X_b = -\frac{1}{\lambda}$, den wir an Stelle des Zustandes $X_b = -1$ untersuchen wollen, ergeben sich die Momente $M^\circ = -\frac{x}{\lambda}$ und — für

*) Die Berechnung der S' erfolgte wieder mit Hilfe der Formeln 15 bis 20 auf Seite 330.

die linke Bogenhälfte — die in der Tabelle XII angegebenen Spannkräfte S_b und Längenänderungen Δs_b.

Tabelle XII.

		O_b	$\frac{o}{F}$	$\Delta o_b = \frac{Oo}{F}$	$O_b \cdot \Delta o_b$	sec β	Δo_b sec β
Obere Gurtung	0	+ 3,29	1,3	+ 4,28	14,081	1.30	+ 5,56
	1	+ 3.31	2,0	+ 6,62	21,912	1,28	+ 8.47
	2	+ 3,21	2,6	+ 8,35	26,803	1,23	+ 10.27
	3	+ 3,06	3,0	+ 9,18	28,091	1,18	+ 10.83
	4	+ 2.87	2,8	+ 8,04	23,075	1,14	+ 9,17
	5	+ 2,61	2,8	+ 7.31	19,079	1,10	+ 8,04
	6	+ 2,26	2,7	+ 6,10	13,786	1,07	+ 6,53
	7	+ 1,81	2,6	+ 4,71	8,525	1,04	+ 4,90
	8	+ 1,28	2.6	+ 3,33	4,262	1,02	+ 3,40
	9	+ 0.66	2.2	+ 1,45	0,957	1,01	+ 1.46
				Summe:	160,571		

		U_b	$\frac{u}{F}$	$\Delta u_b = \frac{Uu}{F}$	$U_b \cdot \Delta u_b$	sec γ	Δu_b sec γ
Untere Gurtung	1	— 3,49	1,6	— 5,58	19,474	1,38	— 7,70
	2	— 3,39	1,6	— 5.42	18,374	1,31	— 7,10
	3	— 3,26	2.0	— 6.5?	21,255	1,25	— 8,15
	4	— 3,09	1.9	— 5,87	18,138	1,19	— 6,99
	5	— 2,87	2.5	— 7,18	20,607	1,14	— 8,19
	6	— 2,61	2.4	— 6,26	16,339	1,10	— 6,89
	7	— 2,24	2,3	— 5,15	11,536	1,06	— 5,46
	8	— 1,80	2.2	— 3,96	7,128	1,03	— 4.08
	9	— 1,26	2.2	— 2,77	3,490	1.01	— 2,80
	10	— 0,66	2,5	— 1,65	1.089	1,00	— 1,65
				Summe:	137,430		

		D_b	$\frac{d}{F}$	$\Delta d_b = \frac{Dd}{F}$	$D_b \cdot \Delta d_b$	sec φ	Δd_b sec φ
Diagonalen	1	— 0,058	6.3	— 0.37	0,021	1,07	— 0.40
	2	— 0,021	6,2	— 0.13	0,003	1.05	— 0.14
	3	+ 0,011	6.1	+ 0,07	0,008	1,04	+ 0,07
	4	+ 0,074	6,1	+ 0,45	0,033	1.03	+ 0,46
	5	+ 0,156	6,1	+ 0,95	0.148	1.03	+ 0.98
	6	+ 0,261	6,1	+ 1,59	0,415	1.03	+ 1,64
	7	+ 0,387	5,2	+ 2.01	0,779	1,04	+ 2.09
	8	+ 0,519	5,2	+ 2.70	1,401	1.05	+ 2,84
	9	+ 0.634	5.3	+ 3.36	2,130	1.07	+ 3,60
	10	+ 0,724	4.7	+ 3.40	2.462	1.10	+ 3,74
				Summe:	7.400		

Vertikalen	V	$\frac{h_m}{F}$	$\Delta h_m = \frac{V h}{F}$	$V \cdot \Delta h$	$\frac{h'_{m-1}}{\lambda}$	$\frac{h'_{m-1}}{\lambda} \Delta h_m$	$\frac{h_{m-1}}{\lambda}$	$\frac{h_{m-1}}{\lambda} \Delta h_m$
0	— 0,017	4,9	— 0,08	0,001	2,10	— 0,17		
1	— 0,183	4,3	— 0,79	0,145	1,22	— 0,96	1,32	— 1,04
2	— 0,227	5,1	— 1,16	0,263	1,06	— 1,23	1,16	— 1,35
3	— 0,263	4,5	— 1,18	0,310	0,92	— 1,09	1,02	— 1,20
4	— 0,313	5,6	— 1,75	0,548	0,80	— 1,40	0,90	— 1,58
5	— 0,350	5,0	— 1,75	0,613	0,69	— 1,21	0,79	— 1,38
6	— 0,387	5,1	— 1,97	0,762	0,60	— 1,18	0,70	— 1,38
7	— 0,413	4,6	— 1,90	0,785	0,53	— 1,00	0,63	— 1,20
8	— 0,407	5,3	— 2,16	0,879	0,47	— 1,02	0,57	— 1,23
9	— 0,380	5,0	— 1,90	0,722	0,43	— 0,82	0,53	— 1,01
			Summe:	5,028				

Für die Gewichte w_b erhält man die Werthe:

$$w_{cb} = -\frac{0,08}{2} = -0,04$$

$$w_{0b} = \frac{1}{3,95}(-5,56 - 7,70 - 0,00 + 0,40 + 0,17 - 1,04) = -3,48$$

$$w_{1b} = \frac{1}{3,48}(-8,47 - 7,10 - 0,40 + 0,14 + 0,96 - 1,35) = -4,66$$

$$w_{2b} = \frac{1}{3,07}(-10,27 - 8,15 - 0,14 - 0,07 + 1,23 - 1,20) = -6,06$$

$$w_{3b} = \frac{1}{2,70}(-10,88 - 6,99 + 0,07 - 0,46 + 1,09 - 1,58) = -6,93$$

$$w_{4b} = \frac{1}{2,38}(-9,17 - 8,19 + 0,46 - 0,98 + 1,40 - 1,38) = -7,50$$

$$w_{5b} = \frac{1}{2,11}(-8,04 - 6,89 + 0,98 - 1,64 + 1,21 - 1,38) = -7,47$$

$$w_{6b} = \frac{1}{1,89}(-6,53 - 5,46 + 1,64 - 2,09 + 1,18 - 1,20) = -6,59$$

$$w_{7b} = \frac{1}{1,72}(-4,90 - 4,08 + 2,09 - 2,84 + 1,00 - 1,23) = -5,79$$

$$w_{8b} = \frac{1}{1,60}(-3,40 - 2,80 + 2,84 - 3,60 + 1,02 - 1,01) = -4,84$$

$$w_{9b} = \frac{1}{1,52}(-1,46 - 1,65 + 3,60 - 3,74 + 0,82) = -1,60.$$

Die Momente M_m eines mit den Gewichten w_b belasteten Freiträgers sind für $\lambda = 1$ (in derselben Weise berechnet wie auf Seite 341)

$M_0 = 0,03$	$M_4 = 47,14$	$M_8 = 203,20$
$M_1 = 3,55$	$M_5 = 75,81$	$M_9 = 256,06$
$M_2 = 11,73$	$M_6 = 111,95$	$M_{10} = 310,52.$
$M_3 = 25,97$	$M_7 = 154,68$	

Da nun X_b proportional M_m ist und für eine mit dem Scheitel zusammenfallende Last 1 den Werth $X_b = 0,5$ annehmen muss, so entsprechen den in den Knotenpunkten 1, 3, 5, 7, 9 angreifenden Lasten 1 der Reihe nach die Werthe

$$X_{b1} = \frac{3{,}55}{2 \cdot 310{,}52} = 0{,}00572 \qquad X_{b5} = 0{,}122$$
$$X_{b3} = \frac{25{,}97}{2 \cdot 310{,}52} = 0{,}042 \qquad X_{b7} = 0{,}249$$
$$X_{b9} = 0{,}412.$$

Andrerseits muss auch sein

$$X_b = \frac{M_m}{\Sigma S_b^2 \frac{s}{EF}} = \frac{M_m}{\Sigma S_b \Delta s_b}$$

wo nach Tabelle XII

$$\Sigma S_b \Delta s_b = 2\,(160{,}571 + 187{,}430 + 7{,}400 + 5{,}028) = 2 \cdot 310{,}43.$$

Dieser Werth stimmt mit $2 \cdot M_{10}$ in befriedigender Weise überein. Noch sei hervorgehoben, dass für alle links vom Scheitel gelegenen Lasten

$$B = X_b \text{ und } A = 1 - X_b \text{ ist.}$$

182. Zustand $X_e = -1$. Tabelle XIII enthält die Spannkräfte S_e in Folge der in der Höhe $c_m = 12{,}72^m$ angreifenden Belastung $X_e = -1$ sowie die zugehörigen Δs_e.

Tabelle XIII.

		O	$\frac{o}{F}$	$\Delta o = \frac{Oo}{F}$	$O \cdot \Delta o$	sec β	Δo sec β
Obere Gurtung	0	+ 4,19	1,8	+ 5,45	22,836	1,30	+ 7,08
	1	+ 3,63	2,0	+ 7,26	26,354	1,28	+ 9,29
	2	+ 2,93	2,6	+ 7,62	22,327	1,23	+ 9,37
	3	+ 2,22	3,0	+ 6,66	14,785	1,18	+ 7,86
	4	+ 1,50	2,8	+ 4,20	6,300	1,14	+ 4,79
	5	+ 0,77	2,8	+ 2,16	1,663	1,10	+ 2,38
	6	+ 0,07	2,7	+ 0,19	0,013	1,07	+ 0,20
	7	− 0,57	2,6	− 1,48	0,844	1,04	− 1,54
	8	− 1,07	2,6	− 2,78	2,975	1,02	− 2,84
	9	− 1,42	2,2	− 3,12	4,430	1,01	− 3,15
	10	− 1,52	2,5	− 3,80	5,776	1,00	− 3,80
				Summe:	108,303		

		U	$\frac{u}{F}$	$\Delta u = \frac{Uu}{F}$	$U \Delta u$	sec γ	Δu sec γ
Untere Gurtung	1	− 3,07	1,6	− 4,91	15,074	1,38	− 6,78
	2	− 2,41	1,6	− 3,86	9,303	1,31	− 5,06
	3	− 1,73	2,0	− 3,46	5,986	1,25	− 4,32
	4	− 1,04	1,9	− 1,98	2,059	1,19	− 2,36
	5	− 0,35	2,5	− 0,88	0,308	1,14	− 1,00
	6	+ 0,33	2,4	+ 0,79	0,261	1,10	+ 0,87
	7	+ 1,09	2,3	+ 2,51	2,736	1,06	+ 2,66
	8	+ 1,59	2,2	+ 3,50	5,565	1,03	+ 3,60
	9	+ 2,07	2,2	+ 4,55	9,419	1,01	+ 4,60
	10	+ 2,40	2,5	+ 6,00	14,400	1,00	+ 6,00
				Summe:	65,111		

		D	$\frac{d}{F}$	$\Delta d = \frac{Dd}{F}$	$D\Delta d$	$\sec\varphi$	$\Delta d \sec\varphi$
Diagonalen	1	+ 0,418	6,3	+ 2,60	1,074	1,07	+ 2,78
	2	+ 0,474	6,2	+ 2,94	1,394	1,05	+ 3.09
	3	+ 0.527	6,1	+ 3.21	1.692	1,04	+ 3.34
	4	+ 0,584	6,1	+ 3.56	2,079	1,03	+ 3,67
	5	+ 0,633	6,1	+ 3,86	2.443	1,03	+ 3.98
	6	+ 0,652	6.1	+ 3,98	2,595	1,03	+ 4.10
	7	+ 0,635	5,2	+ 3,30	2,096	1,04	+ 3.43
	8	+ 0,528	5.2	+ 2,75	1,452	1.05	+ 2.89
	9	+ 0.376	5.3	+ 1,96	0,737	1,07	+ 2.10
	10	+ 0.021	4.7	+ 0.10	0,002	1.10	+ 0.10
				Summe:	15,564		

		V	$\frac{h}{F}$	$\Delta h = \frac{Vh}{F}$	$V\Delta h$	$\frac{2c}{\lambda}$	$\frac{2c}{\lambda}\Delta h_m$	$\frac{h_{m-1}}{\lambda}$	$\frac{h_{m-1}}{\lambda}\Delta h_m$
Vertikalen	0	— 0,550	4.9	— 2,70	1.318	2,10	— 5,67		
	1	— 0,687	4.3	— 2,95	2.027	1,22	— 3,60	1,32	— 3.89
	2	— 0,657	5,1	— 3.35	2.201	1,06	— 3,55	1.16	— 3.89
	3	— 0.603	4.5	— 2,71	1.634	0,92	— 2,49	1.02	— 2.76
	4	— 0.541	5.6	— 3,03	1,639	0,80	— 2,42	0,90	— 2.73
	5	— 0,458	5,0	— 2.29	1.049	0.69	— 1,58	0,79	— 1.81
	6	— 0,353	5,1	— 1.80	0,635	0,60	— 1,08	0,70	— 1.26
	7	— 0,223	4,6	— 1,03	0,230	0.53	— 0,56	0,63	— 0,65
	8	— 0.090	5.3	— 0.48	0,043	0,47	— 0,23	0.57	— 0.27
	9	+ 0.047	5.0	+ 0,24	0,011	0.43	+ 0,10	0.53	+ 0.13
	10	+ 0,132	2.5	+ 0.33	0,044			0.51	+ 0.17
				Summe:	10.831				

Für die Gewichte w_c erhält man die Werthe:

$$w_{cc} = -\frac{2.70}{2,0} = -1,85$$

$$w_{0c} = \frac{1}{3.95}[-7,08 - 6,78 + 0,00 - 2,60 + 5,67 - 3.89] = -3.72$$

$$w_{1c} = \frac{1}{3,48}[-9,29 - 5,06 + 2.60 - 2,94 + 3,60 - 8,89] = -4.30$$

$$w_{2c} = \frac{1}{3.07}[-9,37 - 4,32 + 2.94 - 3,21 + 3.55 - 2.76] = -4.29$$

$$w_{3c} = \frac{1}{2,70}[-7,86 - 2,86 + 3,21 - 3,56 + 2,49 - 2.73] = -4,00$$

$$w_{4c} = \frac{1}{2.38}[-4,79 - 1,00 + 3.56 - 3.86 + 2.42 - 1,81] = -2,80$$

$$w_{5c} = \frac{1}{2,11}[-2,38 + 0,87 + 3,86 - 3,98 + 1,58 - 1.26] = -0.62$$

$$w_{6c} = \frac{1}{1.89}[-0,20 + 2.66 + 3,98 - 3,30 + 1,08 - 0,65] = +1,89$$

$$w_{7c} = \frac{1}{1,72}[+1,54 + 3,60 + 3,30 - 2,75 + 0,56 - 0.27] = +3.48$$

$$w_{8c} = \frac{1}{1{,}60}[+2{,}84 + 4{,}60 + 2{,}75 - 1{,}96 + 0{,}23 + 0{,}13] = +5{,}37$$

$$w_{9c} = \frac{1}{1{,}52}[+3{,}15 + 6{,}00 + 1{,}96 - 0{,}10 - 0{,}10 + 0{,}17] = +7{,}34$$

$$\tfrac{1}{2} w_{10c} = \frac{1}{1{,}50}[+3{,}80 + 0{,}10 - 0{,}33 \cdot 0{,}46^*)] = +\frac{3{,}75}{1{,}50} = +2{,}500.$$

Das Gewicht $\frac{1}{2} w_{10c}$ hat keinen Einfluss auf die Momente M des mit den Gewichten w belasteten Freiträgers; es wurde aber berechnet um die Probe

$$\sum_0^9 w_c + w_{Cc} + \tfrac{1}{2} w_{10c} = +20{,}58 - 20{,}58 = 0$$

ausführen zu können. Aus den Momenten

$M_0 = 0{,}90\,\lambda$	$M_4 = 46{,}66\,\lambda$	$M_8 = 121{,}10\,\lambda$
$M_1 = 5{,}97\,\lambda$	$M_5 = 66{,}62\,\lambda$	$M_9 = 130{,}94\,\lambda$
$M_2 = 15{,}34\,\lambda$	$M_6 = 87{,}20\,\lambda$	$M_{10} = 133{,}44\,\lambda$
$M_3 = 29{,}00\,\lambda$	$M_7 = 105{,}89\,\lambda$	

ergeben sich die Werthe

$$X_c = \frac{M}{\Sigma S_c^2 \frac{s}{EF}} = \frac{M}{\Sigma S_c \Delta s_c}$$

wo nach Tabelle XIII

$$\Sigma S_c \Delta s_c = 2\,(108{,}303 + 65{,}111 + 15{,}564 + 10{,}831) = 2 \cdot 199{,}809.$$

Für die Knotenpunkte 0, 1, 3, 5, 7, 9 erhält man

$X_{c1} = 0{,}0448$	$X_{c7} = 0{,}795$
$X_{c3} = 0{,}218$	$X_{c9} = 0{,}983$
$X_{c5} = 0{,}500$	

133. Die Gleichung der Kämpferdrucklinie ergiebt sich aus der Gleichgewichtsbedingung (Fig. 336)

$$X_c y_k = X_b e + X_a.$$

Man findet für die Knotenpunkte 1, 3, 5, 7, 9 der Reihe nach

$X_c y_k = 0{,}1773$	$y_k = 3{,}96^m$
$X_c y_k = 1{,}149$	$y_k = 5{,}27^m$
$X_c y_k = 2{,}761$	$y_k = 5{,}52^m$
$X_c y_k = 4{,}466$	$y_k = 5{,}62^m$
$X_c y_k = 5{,}534$	$y_k = 5{,}63^m$.

Bezogen auf die Schlusslinie AB der unteren Gurtung, erhält man die Ordinaten ($y'_k = y_k + c_u$):

$$y'_k = 16{,}68^m;\ 17{,}99^m;\ 18{,}24^m;\ 18{,}34^m;\ 18{,}35^m$$

dieselben weichen von den früher erhaltenen Ordinaten

$$y'_k = 19{,}08^m;\ 18{,}77^m;\ 18{,}49^m;\ 18{,}25^m;\ 18{,}17^m$$

nur in der Nähe des Kämpfers wesentlich ab.

134. Einfluss der Temperaturänderung. Aendert sich die dem spannungslosen Anfangszustande des Bogens entsprechende Temperatur überall um

---

*) $0{,}46 = \operatorname{tg} \varphi_{10} = \frac{1{,}37}{3{,}0}$.

denselben Betrag t, so entsteht ein Kämpferdruck X_{ot}, der sehr annähernd in der Höhe $c_u = 12{,}72^m$ über der Schlusslinie AB der unteren Gurtung liegt und den Werth

$$X_{ot} = \frac{\varepsilon E t l'''}{\frac{\Sigma S_c^2 \frac{s}{EF}}{}} = \frac{\varepsilon E t l'''}{2 \cdot 199{,}809} = \frac{25 \cdot t l'''}{400} \text{ kg}$$

besitzt, wo (nach Fig. 312 auf Seite 309)

$$l''' = l + 2\, c_u \cos\psi = 6000 + 2 \cdot 1272 \cdot 0.026 = 6066 \text{ cm}$$

ist.*) Mit $t = \pm 35°$ Cels. ergiebt sich

$$X_{ot} = \frac{25 \cdot 35 \cdot 6066}{400} = 13300 \text{ kg}.$$

Früher erhielten wir $X_{ot} = 17000$ kg, ein Werth der erst bei $t = 35 \frac{17000}{13300} = 45°$ Cels. entstehen wird. Man vergl. die auf Seite 204 an die Berechnung des Horizontalschubes H_t der Douro-Brücke bei Porto geknüpfte Bemerkung.

e. Näherungsformeln zur Berechnung der Kämpferdrücke.

135. Formel für X_a. Um zu einfachen, geschlossenen Formeln für die Unbekannten X_a, X_b und X_c zu gelangen, ersetzen wir die Einzelgewichte w_a, w_b, w_c durch stetige Belastungen.

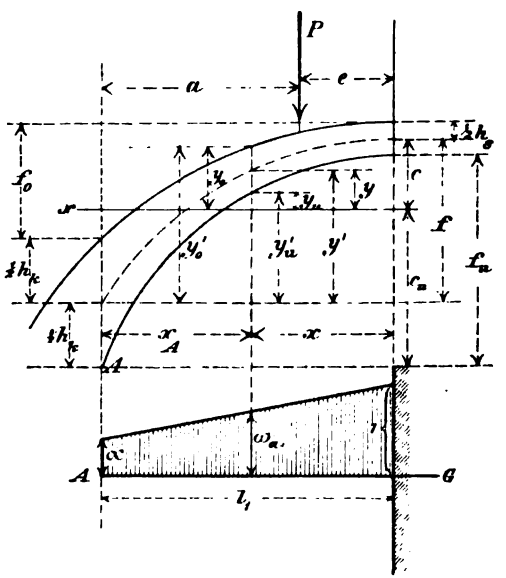


Fig. 340.

*) Wir haben die Werthe $\frac{s}{F}$ (Seite 337) in $\frac{1}{\text{cm}}$ ausgedrückt. Man erkennt, dass man genügend genau $l''' = l'$ setzen darf.

An Stelle der w_a nehmen wir die in Fig. 840 dargestellte trapezförmige Belastungsfläche an, deren Höhe am Kämpfer $= \alpha$, und im Scheitel $= 1$ sein möge. Im Abstande x_A von A ist die Belastungshöhe

$$\omega_a = \alpha + (1 - \alpha)\frac{x_A}{l_1}.$$

Der Freiträger AG wird dann an der Stelle x_A durch das Moment

$$M = \frac{\alpha x_A^2}{2} + (1 - \alpha)\frac{x_A^3}{6 l_1}$$

beansprucht, wo $l_1 = \frac{1}{2} l$ ist. Der Inhalt der Belastungsfläche ist, für beide Bogenhälften,

$$\mathfrak{F} = (1 + \alpha) l_1$$

und man erhält daher (für $x_A = a \leqq l_1$)

$$X_a = \frac{M}{(1 + \alpha) l_1}$$

$$(2) \qquad X_a = \frac{l_1}{6(1 + \alpha)}\left[3\alpha\frac{a^2}{l_1^2} + (1 - \alpha)\frac{a^3}{l_1^3}\right].$$

Für den vorhin untersuchten Bogenträger ergab sich am Kämpfer $w_a = 0{,}34$, in der Nähe des Scheitels $w_a = 2{,}17$. Das Verhältniss dieser beiden Werthe ist

$$\alpha = \frac{0{,}34}{2{,}17} = 0{,}16^*)$$

und es folgt daher (mit $l_1 = 30^m$)

$$X_a = \frac{a^2}{l_1^2}\left(2{,}069 + 3{,}621\,\frac{a}{l_1}\right).$$

Dies giebt für

$\frac{a}{l_1} = 0{,}1$	$X_a = 0{,}02431\ tm$
$= 0{,}3$	$= 0{,}284$
$= 0{,}5$	$= 0{,}970$
$= 0{,}7$	$= 2{,}256$
$= 0{,}9$	$= 4{,}316,$

d. s. Werthe, die mit den früher gefundenen befriedigend übereinstimmen. Jedenfalls wird die Formel bei einer vorläufigen Querschnittsberechnung recht gute Dienste leisten; es kommt dann nur darauf an, das *Verhältniss* α der Gewichte w_a für die Knotenpunkte am Kämpfer und im Scheitel von vornherein zu schätzen.

136. Formel für X_b. Wir nehmen die Belastungshöhe an der Stelle x gleich

$$\omega_b = \omega_a x = \omega_a (l_1 - x_A)$$
$$= \left[\alpha + (1 - \alpha)\frac{x_A}{l_1}\right](l_1 - x_A)$$

---

*) Da die Querschnittsabmessungen bei einem neu zu entwerfenden Bogen nicht bekannt sind, so muss man α zunächst schätzen. Man nehme etwa

$$\alpha = \frac{h_a^2}{h_b^2}\sqrt{1 + \frac{l_1}{f}},$$

wo h_a und h_b die Werthe von h im Scheitel und am Kämpfer bedeuten. Im vorliegenden Falle liefert diese Formel zufällig ebenfalls $\alpha = 0{,}16$.

an, und erhalten M durch zweimalige Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2M}{dx_A^2} = \left[\alpha + (1-\alpha)\frac{x_A}{l_1}\right](l_1 - x_A).$$

Die Integrations-Konstanten werden mit Hilfe der Bedingungen bestimmt:

$x_A = 0$ muss liefern $\frac{dM}{dx_A} = 0$

$x_A = 0$ „ „ $M = 0$.

Es ergiebt sich

$$M = \alpha l_1 \frac{x_A^2}{2} + (1-2\alpha)\frac{x_A^3}{6} - (1-\alpha)\frac{x_A^4}{12 l_1}.$$

Da nun X_b proportional M ist und für $x_A = l_1$ den Werth 0,5 annehmen muss, so folgt für $x_A = a \leq l_1$

$$\frac{X_b}{0,5} = \frac{\alpha l_1 \frac{a^2}{2} + (1-2\alpha)\frac{a^3}{6} - (1-\alpha)\frac{a^4}{12 l_1}}{\alpha l_1 \frac{l_1^2}{2} + (1-2\alpha)\frac{l_1^3}{6} - (1-\alpha)\frac{l_1^3}{12}}$$

und schliesslich

$$(3) \qquad X_b = \frac{1}{3\alpha + 1}\frac{a^2}{l_1^2}\left[3\alpha + (1-2\alpha)\frac{a}{l_1} - 0,5(1-\alpha)\frac{a^2}{l_1^2}\right].$$

Lasten, welche rechts vom Scheitel liegen, rufen negative Werthe X_b hervor. Vergl. Fig. 336; die Linie $A'DD'B'$ ist die Einflusslinie für X_b. Verschiebt man den Zweig $D'B'$ um die Strecke 1 nach unten, so entsteht die stetige Kurve $A'DB''$, und diese ist die Einflusslinie für den senkrechten, rechtsseitigen Stützenwiderstand B.

Für $\alpha = 0,16$ ergiebt sich:

$$X_b = \frac{a^2}{l_1^2}\left[0,324 + \frac{a}{l_1}\left(0,460 - 0,284\frac{a}{l_1}\right)\right]$$

und für

$\frac{a}{l_1} = 0,1$	$X_b = 0,00367$
$= 0,3$	$= 0,0393$
$= 0,5$	$= 0,121$
$= 0,7$	$= 0,248$
$= 0,9$	$= 0,411$,

welche Werthe mit den früher gefundenen ebenfalls befriedigend übereinstimmen.

137. Formel für c. Die mit der Kraft X_c zusammenfallende x-Achse habe vom Mittelpunkte der Scheitelvertikale den Abstand c. Es ist

$$f - c = \frac{\int_0^{l_1}(y'_o\omega_a + y'_u\omega_a)\,dx_A}{\int_0^{l_1}(\omega_a + \omega_a)\,dx_A}$$

wo, mit den in die Figur 340 eingetragenen Bezeichnungen,

$$\frac{y'_o + y'_u}{2} = y' = f - f\frac{x^2}{l_1^2}$$

ist. Es ergiebt sich also

$$f-c=\frac{\int_0^{l_1}\omega_a y'\,dx_A}{\int_0^{l_1}\omega_a\,dx_A}=\frac{\int_0^{l_1}\omega_a y'\,dx_A}{0{,}5\,(1+\alpha)l_1}=\frac{5+3\alpha}{6\,(1+\alpha)}\,f$$

und

$$(4)\qquad c=\frac{1+3\alpha}{6\,(1+\alpha)}\,f.$$

Für unser Beispiel ist $f_o=12{,}55^m$, $f_u=15{,}00^m$, $f=\frac{1}{2}\,(f_o+f_u)=13{,}775^m$ und $\alpha=0{,}16$, mithin

$$c=2{,}93^m \text{ und } c_u=12{,}82^m,$$

während wir auf Seite 328 und 343 die Werthe $c_u=12{,}99^m$ und $c_u=12{,}72^m$ fanden.

138. Formel für X_c. Ist M das Angriffsmoment an der Stelle X des Freiträgers AG in Folge einer dem Gesetze

$$\omega_c=\omega_a\,(y_o+y_u)=2\,\omega_a y=2\left[1-(1-\alpha)\frac{x}{l_1}\right]\left(c-f\frac{x^2}{l_1^2}\right)$$

folgenden stetigen Belastung, so ist

$$X_c=\frac{M}{2\int_0^{l_1}(y_o^2+y_u^2)\,\omega_a\,dx}.$$

Integrirt man die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\frac{d^2M}{dx^2}=-\left[1-(1-\alpha)\frac{x}{l_1}\right]\left(c-f\frac{x^2}{l_1^2}\right)$$

und bestimmt man die beiden Integrationskonstanten mit Hilfe der Bedingungen:

$$x=0 \text{ muss liefern } \frac{dM}{dx}=0$$
$$x=l_1 \quad ,, \quad ,, \quad M=0$$

so erhält man

$$\frac{1}{2}M=c\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{l_1^2}\right)-\frac{1-\alpha}{6}\left(1-\frac{x^3}{l_1^3}\right)\right]l_1^2$$
$$-f\left[\frac{1}{12}\left(1-\frac{x^4}{l_1^4}\right)-\frac{1-\alpha}{20}\left(1-\frac{x^5}{l_1^5}\right)\right]l_1^2.$$

Da nun

$$y_o=c+\frac{h_o}{2}-f_o\frac{x^2}{l_1^2}$$
$$y_u=c-\frac{h_u}{2}-f_u\frac{x^2}{l_1^2}$$

ist, so folgt

$$y_o^2+y_u^2=k_1^2-k_2^2\frac{x^2}{l_1^2}+k_3^2\frac{x^4}{l_1^4},$$

wo

$$k_1^2=2\,c^2+\tfrac{1}{2}\,h_o^2$$
$$k_2^2=2\,c\,(f_o+f_u)-h_o\,(h_1-h_o)$$
$$k_3^2=f_o^2+f_u^2.$$

Es ergiebt sich dann

$$\int_0^{l_1}(y_o^2+y_u^2)\,\omega_a\,dx=\frac{k_1^2 l_2}{2}\,(1+\alpha)-\frac{k_2^2 l_1}{4}\left(\frac{1}{3}+\alpha\right)+\frac{k_3^2 l_1}{6}\left(\frac{1}{5}+\alpha\right)$$

und für eine bei $x = e$ gelegene Last 1:

$$(5)\qquad X_c = \frac{l_1 c_o}{k^2}\left[1 - \frac{e^2}{l_1^2} - \frac{1-\alpha}{3}\left(1 - \frac{e^3}{l_1^3}\right)\right] - \frac{f l_1}{2k^2}\left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{e^4}{l_1^4}\right) - \frac{1-\alpha}{5}\left(1 - \frac{e^5}{l_1^5}\right)\right]$$

wo

$$k^2 = k_1^2(1+\alpha) - \frac{1}{6}k_2^2(1+3\alpha) + \frac{1}{15}k_3^2(1+5\alpha).$$

Drückt man c, f_o und f_u durch f, h_o und h_k aus, so erhält man

$$(6)\quad k^2 = \frac{f^2}{90}\cdot\frac{7+42\alpha+15\alpha^2}{1+\alpha} + \frac{h_o^2}{30}(11+5\alpha) + \frac{h_o h_k}{30}(3+5\alpha) + \frac{h_k^2}{30}(1+5\alpha)$$

und gelangt schliesslich zu der Formel (für $x \geqq 0$):

$$(7)\qquad X_c = \gamma_1 - \frac{e^2}{l_1^2}\left\{\gamma_2 - \frac{e}{l_1}\left[\gamma_3 + \frac{e}{l_1}\left(\gamma_4 - \gamma_5\frac{e}{l_1}\right)\right]\right\}$$

wo

$$(7^a)\qquad \begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{2(2+10\alpha+3\alpha^2)}{\beta} \\ \gamma_2 = \dfrac{15(1+3\alpha)}{\beta} \\ \gamma_3 = \dfrac{5(1-\alpha)(1+3\alpha)}{\beta} \\ \gamma_4 = \dfrac{15(1+\alpha)}{\beta} \\ \gamma_5 = \dfrac{9(1-\alpha^2)}{\beta} \end{cases}$$

$$\beta = \frac{f}{l_1}(7+42\alpha+15\alpha^2) + \frac{3(1+\alpha)}{f l_1}[h_o^2(11+5\alpha) + h_o h_k(3+5\alpha) + h_k^2(1+5\alpha)].$$

Für unser Zahlenbeispiel ist

$$f = 13{,}775^m,\ l_1 = 30^m,\ h_o = 1{,}5^m,\ h_k = 3{,}95^m,\ \alpha = 0{,}16;$$

man findet $\beta = 7{,}12577$ und

$$X_c = 1{,}032 - \frac{e^2}{l_1^2}\left\{3.115 - \frac{e}{l_1}\left[0{,}872 + \frac{e}{l_1}\left(2{,}442 - 1{,}231\frac{e}{l_1}\right)\right]\right\}.$$

Es ergeben sich daher die folgenden Ordinaten der X_c-Linie und der Kämpferdrucklinie:

$\frac{e}{l_1}$	X_c	y_k*)	$y'_k = c_u + y_k = 12{,}82^m + y_k$
0,9	0,0198	6,23^m	19,05^m
0,7	0.184	6,03	18,85
0,5	0,476	5,85	18,67
0,3	0,792	5,67	18,49
0,1	1,002	5,54	18,36

*) Nach der auf Seite 349 abgeleiteten Formel

$$y_k = \frac{X_b e + X_a}{X_c}.$$

139. Die Formel für X_{ct} in Folge einer Temperaturänderung lautet

$$X_{ct} = \frac{\varepsilon t l}{2\int_0^{l_1} (y_o^2 + y_u^2)\,\omega_a \frac{dx}{EF_s h_s^2}};$$

denn es ist zu beachten, dass der Werth $\omega_a = 1$ im Scheitel mit $1 : EF_s h_s^2$ multiplicirt werden muss. Man erhält

$$(8) \qquad X_{ct} = 2\,\varepsilon E t \frac{h_s^2}{k^2} F_s.$$

Zwischen k und β besteht die Beziehung

$$(9) \qquad k^2 = \frac{\beta l_1 f}{90(1+\alpha)}.$$

Für unser Zahlenbeispiel ($\alpha = 0{,}16$, $f = 13.8$, $h_s^2 = 2{,}25$, $t = 35°$, $\varepsilon E = 25$, $F_s = 120$ qcm) ergiebt sich $k^2 = \frac{7.13 \cdot 30 \cdot 13.8}{90 \cdot 1{,}16} = 28{,}3$ und

$$X_{ct} = 16700 \text{ kg}.$$

Dieser Werth darf natürlich nur mit der in Nr. 126 unter Vernachlässigung der Längenänderungen der Füllungsstäbe gefundenen Zahl $X_{ct} = 17000$ kg verglichen werden.

140. Für den Sonderfall $\alpha = 1.0$ erhält man nach einer einfachen Zwischenrechnung für eine Last $P = 1$:

$$(10) \qquad X_a = \frac{1}{4}\frac{a^2}{l_1}$$

$$(11) \qquad X_b = \frac{1}{4}\frac{a^2}{l_1^2}\left(3 - \frac{a}{l_1}\right)$$

$$(12) \qquad X_c y_k = X_b e + X_a = \frac{a^2 b^2}{4 l_1^3}.$$

Die Strecken z_A und z_B, welche die x-Achse und die Kämpferdrücke K_1 und K_2 auf den Senkrechten durch A und B abschneiden, Fig. 341, sind durch die Gleichungen bestimmt

$$X_c z_B = X_b l_1 - X_a = \frac{a^2 b}{4 l_1^2}$$

$$X_c z_A = 1 \cdot a - X_b l_1 - X_a = \frac{b^2 a}{4 l_1^2}.$$

und man findet daher

$$(13) \qquad \frac{z_B}{y_k} = \frac{l_1}{b} \text{ und } \frac{z_A}{y_k} = \frac{l_1}{a}.$$

Ist also die Kämpferdrucklinie bekannt, so kann man die Schnittpunkte F_1 und F_2 der Kämpferdrücke K_1 und K_2 mit den Senkrechten durch A und B wie folgt bestimmen. Man verbindet den Punkt C der Kämpferdrucklinie mit den Punkten J_1 und J_2, in denen die x-Achse die Senkrechten durch A und B trifft durch Gerade und zieht $OF_1 \parallel CJ_1$ und $OF_2 \parallel CJ_2$. Dieses einfache Gesetz ist nur an die Annahme eines konstanten Werthes ω_a gebunden; es ist also nicht nothwendig, dass die Mittellinie des Bogens parabolisch ist.

Liegt P sehr nahe an A, so ist die Ermittlung des Punktes F_1 unbequem. Man bestimmt dann die Richtung von K_1 zweckmässiger durch Berechnung des Schnittpunktes L_1 von K_1 mit der x-Achse. Man findet

$$(14) \qquad d_A = \frac{l_1 a}{l_1 + a}; \quad d_B = \frac{l_1 b}{l_1 + b}.$$

Die weiteren Entwicklungen setzen einen Parabelbogen voraus. Für diesen ist

$$(15) \qquad c = \frac{f}{3},$$

ferner nach Gleich. 5

$$X_c = \frac{l_1}{k^2}\left\{\frac{f}{3}\left(1 - \frac{e^2}{l_1^2}\right) - \frac{f}{6}\left(1 - \frac{e^4}{l_1^4}\right)\right\} = \frac{f l_1}{6 k^2}\left(1 - \frac{e^2}{l_1^2}\right)^2$$
$$= \frac{f l_1}{6 k^2}\left(1 - \frac{e}{l_1}\right)^2\left(1 + \frac{e}{l_1}\right)^2$$

und nach Gleich. 6

$$k^2 = \frac{16}{45} f^2 + \frac{1}{15}(8 h_s^2 + 4 h_s h_k + 3 h_k^2).$$

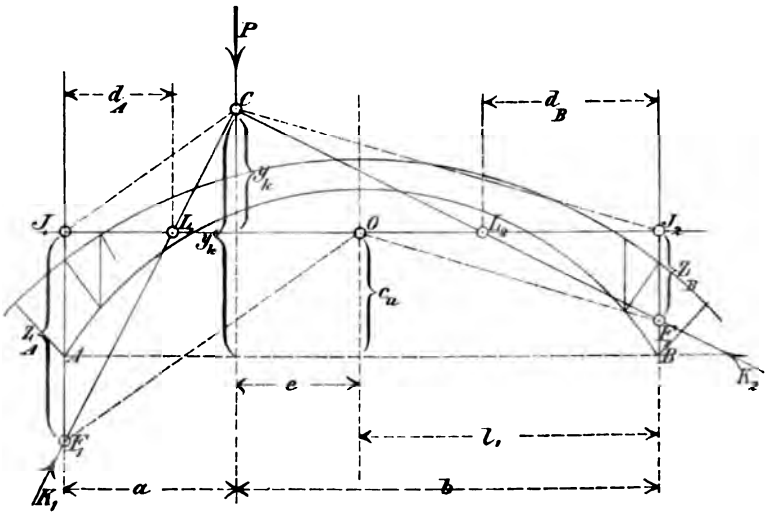


Fig. 341.

Führt man die Strecken

$$a = l_1 - e \text{ und } b = l_1 + e$$

ein, so findet man schliesslich

$$(16) \qquad X_c = \frac{15}{32}\frac{a^2 b^2}{f l_1^3}\nu$$

wo

$$(17) \qquad \nu = \frac{1}{1 + \frac{3}{16}\frac{8 h_s^2 + 4 h_s h_k + 3 h_k^2}{f^2}}.$$

Für y_k erhält man den konstanten Werth

$$(18) \qquad y_k = \frac{8 f}{15 \nu}.$$

Beim Parabelbogen ist also für $\alpha = 1$ die Kämpferdrucklinie eine wagerechte Gerade.

Der Horizontalschub in Folge einer Temperaturänderung ist (nach Gleich. 8 mit dem oben für k^2 angegebenen Werthe)

$$X_{ct} = \frac{45}{8} \varepsilon E t \frac{h_s^2}{f^2} \nu F_s$$

wofür man auch rund

$$X_{ct} = 6 \varepsilon E t F_s \frac{h_s^2}{f^2} \nu \qquad (19)$$

setzen darf.

Für unser Zahlenbeispiel ergiebt sich mit $\alpha = 1$

$$\nu = 0{,}92,\ c = 4{,}59^m,\ c_u = 11{,}16^m,\ y_k = 7{,}99^m,\ y'_k = 19{,}15^m$$

ferner für

$a : l$	X_a	X_b	X_c
$= 0{,}1$	0,075	0,007	0,034
0,3	0,675	0,061	0,244
0,5	1,875	0,156	0,528
0,7	3,675	0,282	0,778
0,9	6,075	0,425	0,920

$$X_{ct} = 6 \cdot 25 \cdot 35 \cdot 120 \frac{1{,}5^2}{13{,}8^2} 0{,}92 = 6850 \text{ kg}.$$

Die Werthe c, c_u, X_a und X_{ct} weichen von den früher gewonnenen erheblich ab, während die von den senkrechten Lasten herrührenden, auf Tafel 6, Fig. 342, dargestellten Kämpferdrücke mit den früher ermittelten befriedigend übereinstimmen. Diese Uebereinstimmung herrscht aber nur bezüglich der Grösse dieser Kräfte, die Unterschiede der Lagen sind so wesentliche, dass die Annahme $\alpha = 1{,}0$ höchstens für eine ganz rohe Ueberschlagrechnung brauchbar ist. Ein gutes Bild von der Zulässigkeit der verschiedenen Näherungsverfahren liefert die folgende Untersuchung.

141. Vergleichung der auf verschiedenen Wegen gefundenen Werthe $_{min}O_{10}$ und $_{min}U_1$. Die nächstfolgende Tabelle enthält die Ordinaten der Einflusslinie für das Moment M_0^o bezogen auf den oberen Knotenpunkt 0 und zwar:

I nach dem im ersten Theile unseres Zahlenbeispiels durchgeführten Verfahren $\left(w' = \frac{l}{h_m^2}\right)$,

II auf Grund der im zweiten Theile durchgeführten genaueren, die Längenänderungen sämmtlicher Stäbe berücksichtigenden Untersuchung*)

III auf Grund der für $\alpha = 0{,}16$ berechneten Werthe X_a, X_b, X_c,

IV auf Grund der Annahme $\alpha = 1$.

*) Die Ordinaten sind für eine links vom Scheitel gelegene Last $P = 1$ mittels der Formel $M_0^o = X_a + X_b l_1 + X_c (c_u - y'_o) - P x_A$ berechnet worden. Liegt P rechts vom Scheitel, so wird X_b negativ und das Glied $P x_A$ fällt fort.

M_0^s-Linie.

Last 1 in	I		II		III		IV	
1	— 2,470		— 2,413		— 2,789		— 2,470	
3	— 5,590		— 5,561		— 5,905		— 4,736	
5	— 6,105		— 6,024		— 6,178		— 4,638	
7	— 4,473		— 4,333		— 4,279		— 3,256	
9	— 1,705		— 1,721		— 1,466		— 1,542	
9′		+ 0,755		+ 0,559		+ 0,874	— 0,042	
7′		+ 1,887		+ 1,727		+ 1,841		+ 0,824
5′		+ 1,635		+ 1,656		+ 1,562		+ 1,002
3′		+ 0,830		+ 0,919		+ 0,737		+ 0,604
1′		+ 0,150		+ 0,244		+ 0,189		+ 0,110
Summe	— 20,343	+ 5,257	— 20,052	+ 5,105	— 20,617	+ 5,203	— 16,684	+ 2,540
$X_{ct} =$	17,0^t		13,3^t		16,7^t		6,8^t	
$c_u - y_{oo}$	12.99 — 3,95 = 9,04^m		8,77^m		8,87^m		7,21^m	

Die ständige Belastung eines Knotenpunktes beträgt 15^t, die bewegliche ebenfalls 15^t. Da nun

$$U_1 = \frac{M_0^s \sec \gamma_1}{h_0} = \frac{M_0^s \, 1{,}38}{3{,}95} = 0{,}35\, M_0^s$$

ist, so ergiebt sich der Einfluss der Belastung:

I $\quad {}_{min}U_1 = 0{,}35\,[-20{,}343 \cdot 30 + 5{,}257 \cdot 15] = -186^t$

II $\quad {}_{min}U_1 = 0{,}35\,[-20{,}052 \cdot 30 + 5{,}105 \cdot 15] = -183^t$

III $\quad {}_{min}U_1 = 0{,}35\,[-20{,}617 \cdot 30 + 5{,}203 \cdot 15] = -189^t$

IV $\quad {}_{min}U_1 = 0{,}35\,[-16{,}684 \cdot 30 + 2{,}540 \cdot 15] = -163^t$

und der Einfluss der Temperaturänderung

I $\quad U_1 = \pm 0{,}35 \cdot 17{,}0 \cdot 9{,}04 = \pm 54^t$

II $\quad U_1 = \pm 0{,}35 \cdot 13{,}3 \cdot 8{,}77 = \pm 41^t$

III $\quad U_1 = + 0{,}35 \cdot 16{,}7 \cdot 8.87 = \pm 52^t$

IV $\quad U_1 = \pm 0{,}35 \cdot \ 6{,}8 \cdot 7{,}21 = \pm 17^t.$

Im ganzen entsteht also

im Falle	I	II	III	IV
${}_{min}U_1 =$	-240^t	-224^t	-241^t	-180^t.

Für die Spannkraft ${}_{min}O_{10}$ erhält man mittels der in der Tabelle angegebenen Ordinaten der Einflusslinie (wegen $\cos \beta_{10} = 1{,}0$)

O_{10}-Linie.

Last in	I		II		III		IV	
1	+ 0,02		+ 0,05		+ 0.01		+ 0,04	
3	+ 0,09		+ 0,15		+ 0,08		+ 0,17	
5	+ 0,08		+ 0,14		+ 0.04		+ 0,10	
7		— 0.27		— 0.28		— 0,35		— 0,46
9		— 1,30		— 1,37		— 1,42		— 1,70
Summe	+ 0,19	— 1,57	+ 0,34	— 1,65	+ 0,13	— 1,77	+ 0,31	— 2,16
X_{ct}	17.0^t		13,3^t		16,7^t		6,8^t	
y_{10}^u	2,01		2,28		2,18		3,84	
h_{10}	1,5		1,5		1,5		1,5	

in Folge der Belastung

$$\begin{aligned} &\text{I} && {}_{min}O_{10} = 2\,[-1{,}57 \cdot 30 + 0{,}19 \cdot 15] = -88{,}5^t \\ &\text{II} && {}_{min}O_{10} = 2\,[-1.65 \cdot 30 + 0.34 \cdot 15] = -88{,}8^t \\ &\text{III} && {}_{min}O_{10} = 2\,[-1.77 \cdot 30 + 0{,}13 \cdot 15] = -102{,}3^t \\ &\text{IV} && {}_{min}O_{10} = 2\,[-2{,}16 \cdot 30 + 0{,}31 \cdot 15] = -120{,}3^t \end{aligned}$$

und in Folge einer Temperaturänderung

$$\text{I}\quad {}_{min}O_{10} = \pm\frac{17{,}0 \cdot 2{,}01}{1{,}5} = \pm 22{,}8^t \qquad \text{III}\quad {}_{min}O_{10} = \pm\frac{16{,}7 \cdot 2{,}18}{1{,}5} = \pm 24{,}3^t$$

$$\text{II}\quad {}_{min}O_{10} = \pm\frac{13{,}3 \cdot 2{,}28}{1{,}5} = \pm 20{,}2^t \qquad \text{IV}\quad {}_{min}O_{10} = \pm\frac{6{,}8 \cdot 3{,}84}{1{,}5} = \pm 17{,}4^t.$$

Es ergiebt sich also im ganzen

im Falle	I	II	III	IV
${}_{min}O_1 =$	-111^t	-109^t	-127^t	-138^t.

Die Uebereinstimmung der nach I und III berechneten Werthe mit den nach II (d. i. unter Berücksichtigung der Längenänderungen sämmtlicher Stäbe) gefundenen kann als befriedigend bezeichnet werden, denn man darf nicht ausseracht lassen, dass der ohnehin auf einer ziemlich rohen Schätzung beruhende Einfluss der Temperaturänderung eine grosse Rolle spielt. Dagegen müssen die Abweichungen der Ergebnisse II und IV als zu gross bezeichnet werden, so dass die Annahme $\alpha = 1$ nicht zu empfehlen ist.

Schliesslich werde noch hervorgehoben, dass sich der Bogen mit eingespannten Kämpfern nur bei verhältnissmässig grosser Pfeilhöhe zur Ausführung empfiehlt, weil geringe Pfeilhöhen stets beträchtliche Spannungen durch Temperaturänderungen im Gefolge haben.

§ 12.

Durchgehender Balken mit drei Stützpunkten.

142. Die Einflusslinie für den Widerstand C der Mittelstütze, mit deren Aufzeichnung die Untersuchung des Trägers zweckmässig begonnen wird, erhält man nach No. 56, Seite 141, indem man für den Zustand $C = -1$ die Biegungslinie der zur Aufnahme der Lasten bestimmten Gurtung zeichnet und ihre Ordinaten (η) durch die demselben Zustande entsprechende Senkung (c) des Stützpunktes C, welcher auch der anderen, unbelasteten Gurtung angehören kann, dividirt. In Fig. 343 ist die fragliche Biegungslinie als Seilpolygon von Gewichten w aufgefasst worden. Dreieck $A'B'C'$ stellt die Momentenfläche des mit $C = -1$ belasteten einfachen Balkens vor; y_m sei das Moment an der Stelle m. Dann ergiebt sich mit der stets zulässigen Vernachlässigung der Formänderungen der Füllungsstäbe: $w_m = \dfrac{y_m s_m}{r_m^2 E F_m}$, wofür bei konstantem E

$$w_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2}\,\frac{F_c}{F_m}$$

gesetzt werden möge, unter F_c eine beliebige Querschnittsfläche verstanden. Diese Abänderung der w ist auf das Ergebniss

$$C = P \overset{\eta}{\underset{c}{}},$$

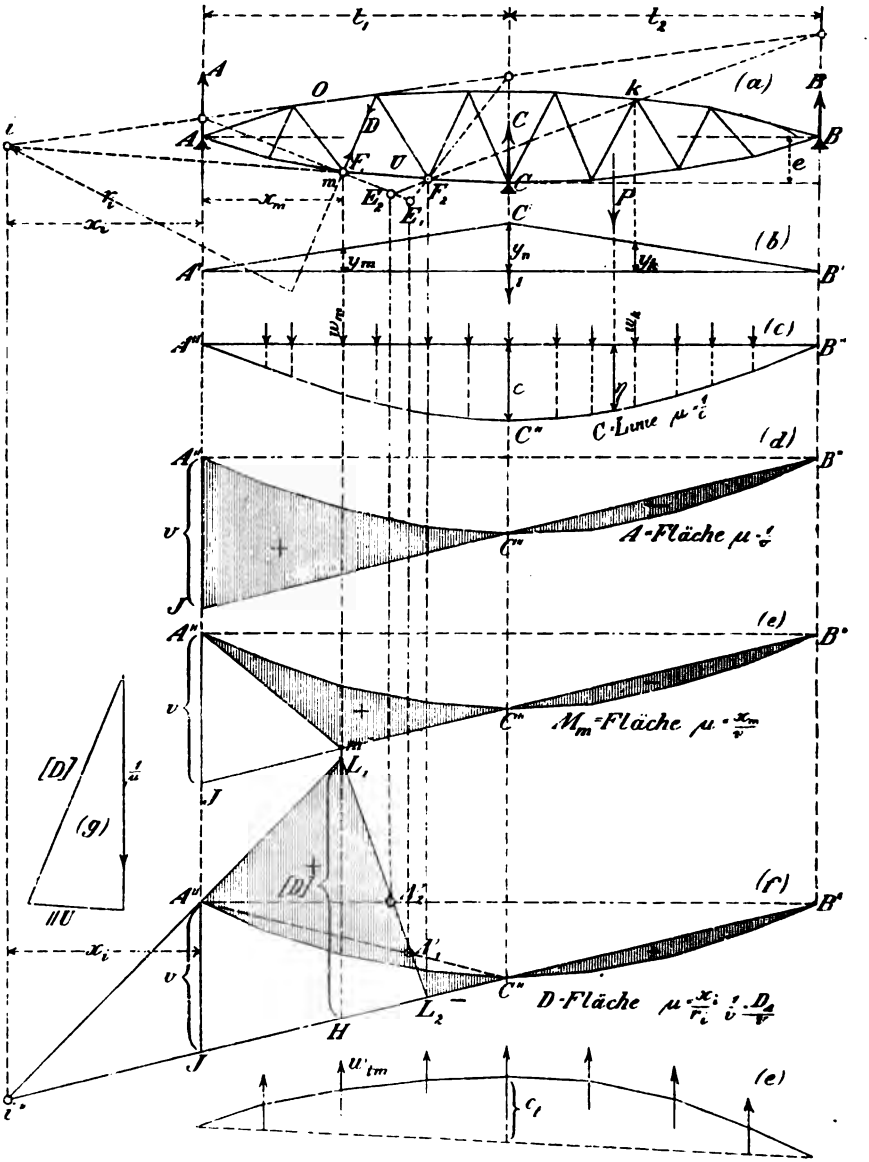


Fig. 343.

welches nur von dem Verhältniss $\eta : c$ abhängig ist, ohne Einfluss und aus demselben Grunde leuchtet ein, dass sowohl die Höhe des Momentendreiecks $A'B'C'$ als auch die Polweite des Seilzuges willkürlich gewählt werden dürfen. Aus der C-Linie lassen sich nun mit Leichtigkeit alle übrigen Einflusslinien ableiten.

Anmerkung. Die Gewichte w erscheinen in derselben Form wie beim Zweigelenkbogen, § 7; die früher für gewisse Arten des Fachwerks gezeigten Umformungen der w lassen sich natürlich auch hier verwerthen. Es empfiehlt sich in der Regel, $F_c : F_m = 1$ anzunehmen. Für Paralleliträger mit gleichlangen Feldern setze man $w_m = y_m$.

Noch sei hervorgehoben, dass wir es in Fig. 343c, des kleinen Maassstabes wegen unterliessen, den Seilzug durch ein einbeschriebenes Polygon, dessen Ecken den Querträgern entsprechen, zu ersetzen.

143. Die Einflussfläche für den Widerstand A der linken Stütze (Fig. 343d) wird als Unterschied des Dreiecks $B''JA''$, dessen Seite $B''J$ durch C'' geht, und der C-Fläche erhalten; ihr Multiplikator ist $\mu = \frac{1}{v}$, wo $v = \overline{A''J}$. Wäre nämlich der Balken nur in A und B gestützt, so bestände die A-Fläche aus einem Dreiecke $A''JB''$ von der Höhe $\overline{A''J} = 1$, und von diesem Dreieck muss nun der Einfluss von C so in Abzug gebracht werden, dass einer im Stützpunkte C angreifenden Last die Ordinate $A = 0$ entspricht. Der Multiplikator $\frac{1}{v}$ ist erforderlich, weil $\overline{A''J} = v$ ist, statt $\overline{A''J} = 1$.

144. Die M_m-Fläche (Fig. 343e) erhält man, indem man auf der Geraden $B''C''$ senkrecht unter m den Punkt m'' bestimmt und die Gerade $A''m''$ zieht. Wäre $\overline{A''J} = x_m$, so wäre das Dreieck $A''m''B''$ die M_m-Fläche des einfachen Balkens AB und Dreieck $A''m''C''$ die M_m-Fläche des einfachen Balkens AC. Da $\overline{A''J} = v$ ist, muss der Multiplikator $\mu = x_m : v$ eingeführt werden. Zu demselben Ergebniss führt die Ueberlegung, dass rechts von m gelegene Lasten das Moment $M_m = Ax_m$ hervorrufen, weshalb sich rechts von m die M_m-Fläche von der A-Fläche nur durch den Multiplikator unterscheidet. Durch die Momente M_m sind die Gurtkräfte gegeben.

145. Die D-Fläche in Figur 343f ergiebt sich aus ähnlichen Ueberlegungen wie sie in No. 143 und 144 angestellt worden sind. Der auf die $A''B''$ als Nullachse bezogene Linienzug $A''L_1L_2B''$ lässt sich als die D-Linie des einfachen Balkens AB auffassen, und der auf die Nullachse $A''C''$ bezogene Linienzug $A''L_1L_2C''$ als D-Linie des einfachen Balkens $A''C''$. Die Geraden $A''L_1$ und $B''L_2$ müssen sich daher senkrecht unter dem Schnittpunkte i der Gurtstäbe O und U

treffen, und die Punkte N_1, N_2 in denen $L_1 L_2$ von den Geraden $A''B''$ und $A''C''$ geschnitten wird, müssen senkrecht unter den Belastungsscheiden E_1 und E_2 liegen, welche man erhält, wenn man D als Füllungsstab eines einfachen Balkens AC, oder eines einfachen Balkens AD ansieht. Damit ist der Punkt L_1 auf dreifache Weise bestimmt. Treten nur rechts von r Lasten auf, so greift links von dem durch die Stäbe O, D, U geführten Schnitt nur die äussere Kraft A an und die Momentengleichung in Bezug auf Punkt i lautet:

$$-Dr_i - Ax_i = 0;$$

sie liefert: $D = -A\frac{x_i}{r_i}$ und führt zu den in der Figur 343f angegebenen Vorzeichen der D-Fläche. Auch lehrt sie, dass der Multiplikator

$$\mu = \frac{x_i}{vr_i} = \frac{D_A}{v}$$

ist, wo D_A der absolute Werth der durch $A = 1$ im fraglichen Füllungsstabe erzeugten Spannkraft bedeutet.

Eine vierte, besonders einfache Bestimmungsweise des Punktes L_1 ergiebt sich schliesslich aus dem früher bewiesenen Gesetze, dass die Strecke $L_1 H$ im Falle $\mu = 1$ gleich der durch Zerlegung von $P = 1$ nach den Richtungen von U und D gewonnenen Seitenkraft $[D]$ sein muss*), bei Auftreten eines Multiplikators μ also gleich der Seitenkraft einer Last $\frac{1}{\mu}$ (Fig. 343e).

146. Die Einflussfläche für die Querkraft Q im Felde $F_1 F_2$ zeigt Fig. 344; ihre Aufzeichnung empfiehlt sich bei Untersuchung von Parallelträgern; da hier die Spannkräfte in den Füllungsstäben durch die Querkräfte Q bestimmt sind. Nach Eintragung der Geraden $B''J$ wird $A''L_1 \parallel B''L_2$ gezogen. Der Multiplikator ist $= 1 : v$. Der Beweis wird wie in No. 145 geführt.

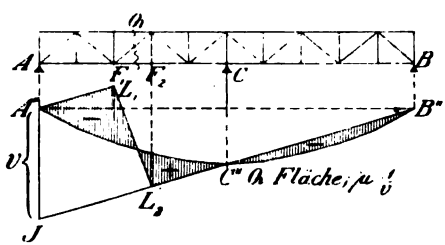


Fig. 344.

Den Kräftemaassstab wird man in Figur 343 und 344 zweckmässig so wählen, dass die Lasteinheit durch eine Strecke von der Länge v dargestellt

*) Vergl. Band I, Seite 240, Fig. 226. Bei obenliegender Fahrbahn erfolgt die Zerlegung nach den Richtungen O und D.

wird. Dann wird der Multiplikator der A-Fläche und Q-Fläche $= 1$, der M_m-Fläche $= x_m$ und der D-Fläche $= D_A$.

147. Gehört der Stützpunkt C nicht der belasteten Gurtung an, so ist C'' kein Punkt der dem Seilzuge $A''C''B''$ einbeschriebenen C-Linie. Die Gerade $B''J$ geht aber nach wie vor durch den Punkt C'', und c bedeutet auch hier den Abstand des Punktes C'' von der Schlusslinie $A''B''$. Vergl. Fig. 345, welche einen Theil der A-Fläche darstellt.

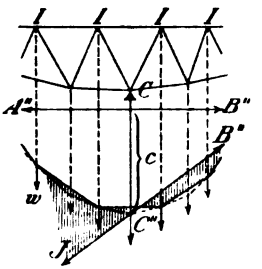


Fig. 345.

148. Der Einfluss einer Temperaturänderung auf den Stützenwiderstand C ist ganz allgemein:

$$C_t = 1 \frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}},$$

wo δ_{ct} und δ_{cc} die Senkungen bedeuten, welche der Knotenpunkt C des einfachen Balkens AB in Folge einer Erwärmung bezieh. in Folge der Belastung $C = -1$ erfährt. Wird eine gleichmässige Erhöhung der Aufstellungstemperatur vorausgesetzt und der Abstand des Punktes C von der Wagerechten AB mit e bezeichnet, so ergiebt sich $\delta_{ct} = \varepsilon t e$. Für δ_{cc} ist der Werth

$$\delta_{cc} = c \frac{1}{EF_c} w_P \cdot \frac{l_1 l_2}{y_m (l_1 + l_2)}$$

einzuführen, unter w_P die Polweite des Seilzuges $A''C''B''$ verstanden. Es muss nämlich die Ordinate c des für den Zustand $C = -1$ gezeichneten Seilpolygons multiplicirt werden: mit $1 : EF_c$, weil die EF_c-fachen Gewichte w benutzt worden sind, mit w_P, weil die Polweite nicht $= 1$ gewählt worden ist und mit $-\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} : y_m$, weil die Höhe des Momentendreiecks $A'C'B'$ für den Zustand $C = -1$ gleich $\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$ statt $= y_m$ ist. Infolgedessen ergiebt sich der Stützenwiderstand

$$(1) \qquad C_t = \frac{\varepsilon E F_c e y_m (l_1 + l_2)}{c l_1 l_2 w_P} t,$$

dessen Einfluss auf die Stabkräfte am besten mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes untersucht wird. In der vorstehenden Formel ist w_P als *Zahl* aufzufassen, welche mit dem Maassstabe gemessen wird, nach welchem die *Zahlen* $w = \frac{ys}{r^2}$ aufgetragen worden sind. Die Strecken e, y_m, l_1, l_2, c messe man mit dem Längenmaassstabe der Zeichnung.

In der Regel wird beim durchgehenden Balken der Einfluss einer Temperaturänderung gar nicht berücksichtigt und für unwesentlich erachtet. Dies letztere trifft aber nur bei gleichförmiger Erwärmung zu, und es möge daher noch der wichtige Fall betrachtet werden, dass die obere Gurtung in Folge Sonnenbestrahlung eine um Δt höhere Temperatur annimmt als die untere. Man rechnet dann genügend genau, wenn man den Füllungsstäben und der unteren Gurtung den Werth $t = 0$ zuschreibt und die Längenänderungen der Obergurtstäbe (zunächst für $\varepsilon = 1$) nach der Formel $\Delta s = s \Delta t$ bestimmt. Nun ermittle man die Gewichte $w_t = -\frac{\Delta s}{r} = -\frac{s \Delta t}{r}$ der unteren Knotenpunkte, verbinde dieselben durch ein Seilpolygon (Polweite $= w_{tP}$) und messe unter C die Ordinate c_t (Fig. 318e). Man findet dann $\delta_{ct} = -\varepsilon w_{tP} c_t$ und

$$(2) \qquad C_t = -\frac{\varepsilon E F_o c_t y_n (l_1 + l_2)}{c l_1 l_2} \frac{w_{tP}}{w_P} \Delta t$$

w_{tP} ist eine Zahl, welche mit dem Maassstabe gemessen werden muss, nach welchem die Zahlen w_t aufgetragen worden sind.*) Ist die obere Gurtung um Δt kälter als die untere, so entsteht ein positives C_t.

Es möge noch für die in Fig. 346 dargestellte Trägerform eine Näherungsformel für C_t aufgestellt werden. Dazu gehen wir von dem Ausdrucke

$$(3) \qquad C_t = \frac{\Sigma S' \varepsilon t s}{\Sigma S'^2 \frac{s}{EF}},$$

aus, wo S' die durch die Belastung $C = -1$ in den Stäben des einfachen Balkens AB hervorgerufenen Spannkräfte bedeuten. Wir berücksichtigen nur die Längenänderungen der Gurtstäbe, und erhalten für diese Stäbe die Werthe

$$S' = +\frac{l_2 x}{(l_1 + l_2) h} \quad \text{(linke Seitenöffnung)}$$

$$S' = \mp\frac{l_1 x}{(l_1 + l_2) h} \quad \text{(rechte Seitenöffnung)}.$$

Die oberen Vorzeichen gelten für die obere, die unteren für die untere Gurtung. Es ergiebt sich also, bei unendlich kleiner Feldweite

$$\Sigma S'^2 \frac{s}{EF} = \frac{2}{(l_1 + l_2)^2} \left[l_2^2 \int_0^{l_1} \frac{x^2 dx}{h^2 EF} + l_1^2 \int_0^{l_2} \frac{x^2 dx}{h^2 EF} \right].$$

Diesen Ausdruck schreiben wir in der Form

$$\Sigma S'^2 \frac{s}{EF} = \frac{2}{EF_o h_o^2 (l_1 + l_2)^2} \left(l_2^2 \int_0^{l_1} x^2 \omega \, dx + l_1^2 \int_0^{l_2} x^2 \omega \, dx \right).$$

---

*) In der Regel empfiehlt es sich, für die verhältnissmässig grossen Gewichte w_t einen anderen Maassstab zu wählen wie für die Gewichte w.

wo F_s und h_s die Werthe von F und h über der Mittelstütze bedeuten, während

$$\omega = \frac{h_s^2 F_s}{h^2 F}$$

ist. Die Querschnittsinhalte F mögen sich mit x so ändern, dass ω eine lineare Funktion ist, welche an den Trägerenden die Werthe α_1 bezw. α_2 annimmt.*) Dann ist

$$\int_0^l x^2 \omega \, dx = \frac{l^3}{4} + \frac{\alpha l^3}{12}$$

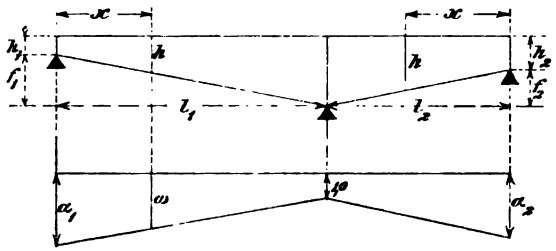


Fig. 346.

und man erhält

$$\Sigma \frac{S'^2 s}{EF} = \frac{l_1^2 l_2^2 [l_1 (3 + \alpha_1) + l_2 (3 + \alpha_2)]}{6 E F_s h_s^2 (l_1 + l_2)^2}.$$

Weiter ergiebt sich, für die um Δt erwärmte obere Gurtung

$$\Sigma S' \varepsilon \Delta t s = -\frac{\varepsilon \Delta t}{l_1 + l_2} \left[l_2 \int_0^{l_1} \frac{x \, dx}{h} + l_1 \int_0^{l_2} \frac{x \, dx}{h} \right].$$

Da nun

$$\int_0^{l_1} \frac{x \, dx}{h} = \int_0^{l_1} \frac{x \, dx}{h_1 + f_1 \frac{x}{l_1}} = \frac{l_1^2}{f_1} \left(1 - \frac{\ln \frac{h_s}{h_1}}{\frac{h_s}{h_1} - 1} \right)$$

so gelangt man schliesslich zu der Formel

$$(4) \qquad C_t = -6 \varepsilon E F_s \Delta t \frac{h_s (l_1 + l_2)}{l_1 l_2} \frac{l_1 \psi_1 + l_2 \psi_2}{l_1 (3 + \alpha_1) + l_2 (3 + \alpha_2)},$$

wo (mit den abkürzenden Bezeichnungen $\frac{h_s}{h_1} = \tau_1$ und $\frac{h_s}{h_2} = \tau_2$)

$$(5) \qquad \begin{cases} \psi_1 = \dfrac{\tau_1}{\tau_1 - 1} \left(1 - \dfrac{\ln \tau_1}{\tau_1 - 1} \right) \\ \psi_2 = \dfrac{\tau_2}{\tau_2 - 1} \left(1 - \dfrac{\ln \tau_2}{\tau_2 - 1} \right) \end{cases}$$

$$(6) \qquad \alpha_1 = \frac{F_s}{F_1} \frac{h_s^2}{h_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{F_s h_s^2}{F_2 h_2^2}.$$

*) Es ist dies dieselbe einfache Annahme, die in No. 135 bei der Berechnung des Bogens mit eingespannten Kämpfern gemacht wurde.

Das Biegungsmoment, welches C_t über der Mittelstütze erzeugt, ist

$$M = - C_t \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2},$$

es ruft in der oberen oder unteren Gurtung die Spannkraft

$$S = \mp \frac{M}{h_s}$$

und die Spannung

$$\sigma = \pm \frac{M}{h_s F_s}$$

hervor. Man erhält also über der Stütze die Beanspruchung

$$(7) \qquad \sigma = \pm 6 \varepsilon E \Delta t \frac{l_1 \psi_1 + l_2 \psi_2}{l_1 (3 + \alpha_1) + l_2 (3 + \alpha_2)}.$$

Der Stützenwiderstand ist, absolut genommen,

$$(8) \qquad C_t = \sigma F_s \frac{h_s (l_1 + l_2)}{l_1 l_2}.$$

Ist $l_1 = l_2 = l$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$
so ergiebt sich

$$(9) \qquad \sigma = 6 \varepsilon E \Delta t \frac{\psi}{3 + \alpha}$$

$$(10) \qquad C_t = 2 \sigma F_s \frac{h_s}{l}.$$

Für

$\tau =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\psi =$	0.500	0,614	0,676	0.717	0.747	0.770	0.788	0,803	0,816	0.830

erhält man

Für $h_1 = 0$ also für $\tau = \infty$ wird $\psi = 1$.

Es sei z. B. $l_1 = l_2 = 30^m$, $h_s = 4{,}5^m$, $h_1 = h_2 = 2{,}25^m$, also $h_s : h_1 = 2$ und $\psi = 0{,}614$; ferner $F_1 = 100$ qcm und $F_s = 300$ qcm, mithin $\alpha = 3 \cdot 2^2 = 12$. Dann ergiebt sich für $\Delta t = 20°$ und für Flusseisen

$$\sigma = 6 \cdot 25 \cdot 20 \frac{0{,}614}{3 + 12} = \text{rd. } 120 \text{ kg/qcm}$$

ferner

$$C_t = - 2 \cdot 120 \cdot 300 \frac{4{,}5}{30} = - 10800 \text{ kg}.$$

Die vorstehenden Formeln gelten auch für den Fall einer geneigten oberen Gurtung, weil $\sec \beta$ so wenig von 1 abweicht, dass man $\Delta t \sec \beta$ konstant annehmen darf.

Wir erinnern wieder daran, dass der vorstehenden Rechnung die ungünstige Voraussetzung starrer Füllungsstäbe zu Grunde liegt. Dafür ist der durch Formel (1) gegebene Einfluss einer gleichmässigen Erwärmung vernachlässigt worden. Will man nach Berechnung sämmtlicher Stabquerschnitte C_t genauer bestimmen (was immer zu empfehlen ist) so benutze man die Formel (1). Dass dies nicht ganz überflüssig ist, haben wir in dem im § 11 durchgeführten Zahlenbeispiele gesehen.

149. Bei der Drehbrücke „Neuhof" über den Reiherstieg bei Hamburg-Neuhof hat die Maschinenbaugesellschaft Nürnberg die in der Figur 347 darge-

stellte eigenartige Anordnung der Füllungstäbe gewählt. Es mögen die Formeln für die Gewichte w mit Berücksichtigung der Längenänderungen der Füllungsstäbe aufgestellt werden. Zu beachten ist zunächst, dass im Belastungsfalle $C = -1$ sämmtliche Vertikalen spannungslos sind, dass also die Gewichte w_m und

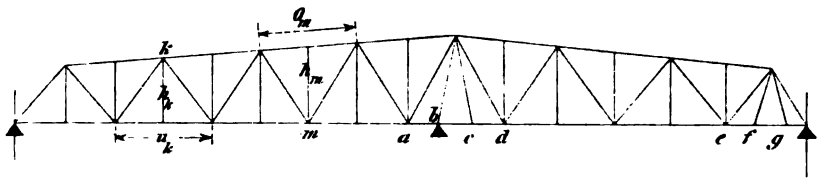


Fig. 347.

w^k der dem gewöhnlichen Strebensystem angehörigen Knotenpunkte m und k nach den auf Seite 105 abgeleiten Formeln

$$w_m = \frac{-\Delta o_m \sec \beta_m + \Delta d_m \sec \varphi_m + \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m}$$

$$w_k = \frac{+\Delta u_k - \Delta d_k \sec \varphi_k - \Delta d_{k+1} \sec \varphi_{k+1}}{h_k}$$

zu berechnen sind.

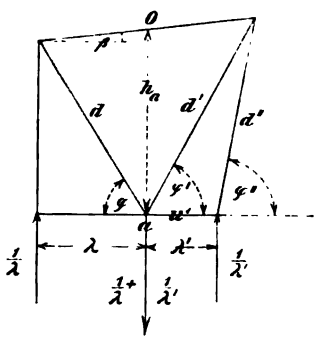


Fig. 348.

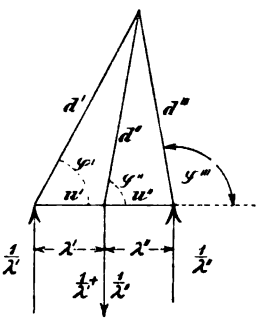


Fig. 349.

Um w_a für den Knotenpunkt a zu finden, berechne man für den in Fig. 348 dargestellten Belastungsfall die Stabkräfte μ; man findet

für den Stab o den Werth $\mu = -\frac{\sec \beta}{h_a}$

„ „ „ d „ „ $\mu = +\frac{\sec \varphi}{h_a}$

„ „ „ u' „ „ $\mu = -\frac{\operatorname{cotg} \varphi''}{\lambda'}$

„ „ „ d'' „ „ $\mu = -\frac{1}{\lambda' \sin \varphi''}$

„ „ „ d' „ „ $\mu = +\left(\frac{1}{h_a} + \frac{\operatorname{cotg} \varphi''}{\lambda'}\right) \sec \varphi'$

und hierauf, mittels der auf Seite 105 abgeleiteten Formel

$$w = \Sigma \mu \Delta s,$$

$$w_a = \frac{-\Delta o \sec\beta + \Delta d \sec\varphi + \Delta d' \sec\varphi'}{h_a} + \frac{\operatorname{cotg}\varphi''}{\lambda'} (\Delta d' \sec\varphi' - \Delta d'' \sec\varphi'' - \Delta u').$$

In derselben Weise werden die Gewichte w_d und w_e berechnet.

Nun bestimmt man für den in Fig. 349 angegebenen Belastungszustand

für den Stab u' den Werth $\mu = +\frac{\operatorname{cotg}\varphi'}{\lambda'}$

„ „ „ u'' „ „ $\mu = +\frac{\operatorname{cotg}\varphi'''}{\lambda''}$

„ „ „ d' „ „ $\mu = -\frac{\operatorname{cotg}\varphi'}{\lambda'} \sec\varphi'$

„ „ „ d''' „ „ $\mu = -\frac{\operatorname{cotg}\varphi'''}{\lambda''} \sec\varphi'''$

„ „ „ d'' „ „ $\mu = \left(+\frac{\operatorname{cotg}\varphi'}{\lambda'} - \frac{\operatorname{cotg}\varphi'''}{\lambda''}\right) \sec\varphi''$

und findet schliesslich

$$w_b = \frac{\operatorname{cotg}\varphi'}{\lambda'} (\Delta u' + \Delta d'' \sec\varphi'' - \Delta d' \sec\varphi') + \frac{\operatorname{cotg}\varphi'''}{\lambda''} (\Delta u'' - \Delta d'' \sec\varphi'' - \Delta d''' \sec\varphi''').$$

In derselben Weise berechnet man w_c, w_f und w_g.

Die vorstehende Entwicklung zeigt, dass die Berechnung der Gewichte w für Ausnahmefälle nicht die geringsten Schwierigkeiten bereitet. Man denke aber auch daran, dass für solche Fälle noch das sehr allgemeine *Williot*sche Verfahren zur Verfügung steht. Im vorliegenden Falle giebt der Verfasser allerdings der Verwendung der Gewichte w den Vorzug, weil nach Berechnung der für beide Verfahren erforderlichen Längenänderungen Δo, Δu und Δd die Ausrechnung der Werthe w so wenig Zeit in Anspruch nimmt, dass die grössere Einfachheit und Genauigkeit der Seillinie, gegenüber dem zeichnerisch viel umständlicheren und mit grösseren Fehlern behafteten Verfahren von *Williot*, die geringe rechnerische Mehrarbeit wieder ausgleicht. Auch lassen sich die Seillinien stets schnell durch Rechnung bestimmen.

§ 13.

Durchgehender Balken mit vier Stützpunkten.

150. Die Widerstände der Endstützen. Als statisch nicht bestimmbare Grössen führen wir die Widerstände $X_a = A$ und $X_b = B$ der Endstützen ein, weisen den Angriffspunkten derselben die Ordnungsziffern a und b zu und erhalten mit den auf Seite 146 erklärten allgemeinen Bezeichnungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \delta_a = P_m \delta_{ma} - A\delta_{aa} - B\delta_{ab} + \delta_{at} \\ \delta_b = P_m \delta_{mb} - A\delta_{ba} - B\delta_{bb} + \delta_b \end{cases}$$

wo δ_a, δ_b die lothrechten Verschiebungen sind, welche die Punkte a und b in Folge der Nachgiebigkeit der Widerlager gegen die durch die beiden mittleren Stützpunkte bestimmte Gerade erfahren; sie werden in der Regel gleich Null gesetzt.

Das statisch bestimmte Hauptsystem (Zustand $A = 0$, $B = 0$) ist ein Balken mit über die Stützen C_1', C_2' ragenden Enden; seine Biegungslinien, gezeichnet für die Zustände $A = -1$, $B = -1$, liefern die Verschiebungen δ_{aa}, δ_{ab}, δ_{ba}, $\delta_{a\beta}$, $\delta_{b\beta}$, $\delta_{\beta\beta}$.

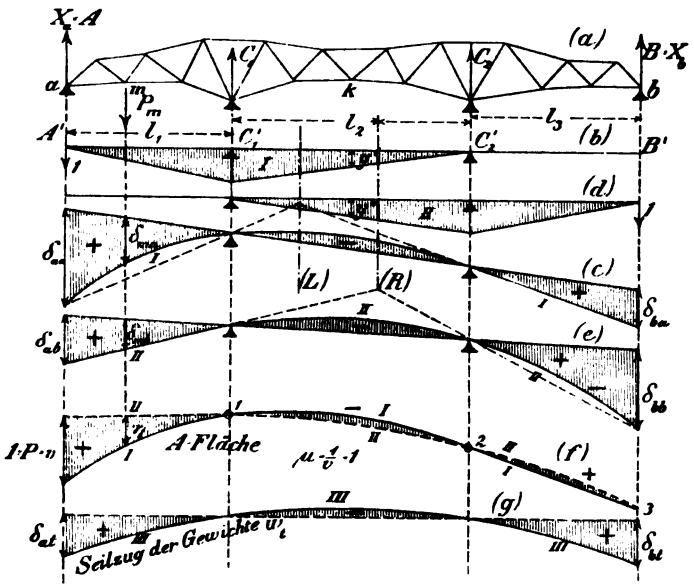


Fig. 350.

Die Momentenfläche des Zustandes $A = -1$ besteht aus einem Dreieck I (Fig. 350b) von der Höhe $-l_1$, mit dessen Hilfe die w-Kräfte genau so berechnet werden, wie im vorigen Paragraphen. Beispielsweise ist bei Vernachlässigung der Formänderungen der Füllungsstäbe das Gewicht des Knotens k: $w_k' = -\frac{y_k' s_k}{r_k^2} \cdot \frac{F_o}{F_k}$. Die Gewichte w' sind negativ; es entspricht ihnen also ein nach oben gebrochener Seilzug I*), dessen rechte Endseite als Biegungslinie des spannungslosen Trägertheiles $C_2'B'$ — der nur eine Drehung aber keine Formver-

*) In Fig. 350 zeichneten wir der Einfachheit wegen Seilkurven. Auch haben wir die Höhen der Momentendreiecke in kleinerem Maassstabe aufgetragen.

änderung erfährt — aufzufassen ist. Nach Eintragung der durch die Stützpunkte $C_1' C_2'$ bestimmten Schlusslinie ergiebt sich die in Fig. 321^c schraffirte Fläche als Biegungslinie für den Zustand $A = -1$; sie liefert die Verschiebungen δ_{ma}, δ_{aa}, δ_{ba}.

Ganz in derselben Weise wird die Biegungsfläche für den Zustand $B = -1$ erhalten und damit δ_{bb}, δ_{mb}, δ_{ab}, gewonnen (wobei die Zeichenprobe $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ zu beachten ist), so dass jetzt alle Werthe gegeben sind, durch welche der Einfluss einer Last P_m bestimmt ist. Dieser ergiebt sich aus den Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} 0 = P_m \delta_{ma} - A\delta_{aa} - B\delta_{ab} \\ 0 = P_m \delta_{mb} - A\delta_{ba} - B\delta_{bb} \end{cases}$$

und zwar erhält man A und B als lineare Funktionen der Veränderlichen δ_{ma}, δ_{mb}. Beispielsweise wird

$$(3) \qquad A = K_a \delta_{ma} + K_b \delta_{mb}$$

wo K_a und K_b feste, von der Lage der Last P unabhängige Werthe sind, und dafür darf man auch schreiben: $A = K_a (\delta_{ma} + K' \delta_{mb})$ wo K' einen neuen Festwerth bedeutet. Da nun nach diesem Gesetze A proportional der um $K'\delta_{mb}$ vermehrten Ordinate δ_{ma} ist, da ferner einer im Stützpunkte C_1 oder C_2 angreifenden Last P der Werth $A = 0$ entspricht, und da endlich die im Stützpunkte A wirksame Last P den Gegendruck $A = P$ hervorruft, so ergiebt sich die folgende einfache Darstellungsweise der A-Fläche (Fig. 350^f).

Man zeichne den Seilzug II der Gewichte $w'' = \frac{y'' s}{r^2} \frac{F_o}{F}$ mit beliebiger Polweite und führe hierauf das die Gewichte $w' = \frac{y' s}{r^2} \frac{F_o}{F}$ verbindende Seilpolygon I durch die Punkte 1, 2 und 3, in denen das Polygon II die Senkrechten durch die Stützen C_1, C_2, B schneidet. Die von beiden Seilzügen eingeschlossene Fläche ist die gesuchte A-Fläche. Mit den aus Fig. 350^f ersichtlichen Bezeichnungen η und v erhält man:

$$(4) \qquad A = \frac{\eta}{v} \cdot P$$

und, wenn die Lasteinheit P durch eine Strecke von der Länge v dargestellt wird, was hier vorausgesetzt werden möge, $A = \eta$.

Das Seilpolygon I lässt sich sehr schnell zeichnen, weil die rechte äusserste Seite durch die Punkte 2 und 3 festgelegt ist. Bringt man diese Seite mit der Mittelkraft der zwischen den Stützpunkten C_1 und C_2 liegenden Gewichte w' zum Schnitt, so bestimmt dieser Schnittpunkt und der Punkt 1 die Lage der durch 1 gehenden Seite des Polygons I.

151. Temperaturänderungen. Um noch die wichtige Aufgabe des Einflusses der ungleichen Erwärmung der beiden Gurtungen zu lösen, zeichnen wir das Seilpolygon (*III*) (Fig. 350) der Gewichte $w_t = \frac{s\Delta t}{r}$, wo s die Stablängen der um Δt stärker erwärmten Gurtung bedeuten, bestimmen die Strecken δ_{at} und δ_{bt} und lösen die Gleichungen auf:

$$A_t\delta_{aa} + B_t\delta_{ab} = \varepsilon\delta_{at}w_{III}$$
$$A_t\delta_{ba} + B_t\delta_{bb} = \varepsilon\delta_{bt}w_{III},$$

wo w_{III} die Polweite des Seilpolygons *III* bedeutet. Die Multiplikation mit dem Ausdehnungskoefficienten ε ist erforderlich, weil w_t nicht gleich $\frac{\Delta s}{r} = \frac{\varepsilon s\Delta t}{r}$ sondern $= \frac{s\Delta t}{r}$ gesetzt worden ist.

Man erhält

$$B_t = \varepsilon w_{III}\,\frac{\delta_{aa}\delta_{bt} - \delta_{ba}\delta_{at}}{\delta_{aa}\delta_{bb} - \delta_{ba}\delta_{ab}}$$

$$= \varepsilon w_{III}\,\frac{\delta_{bt} - \delta_{at}\dfrac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}}}{\delta_{bb}\left[1 - \dfrac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}}\,\dfrac{\delta_{ab}}{\delta_{bb}}\right]}.$$

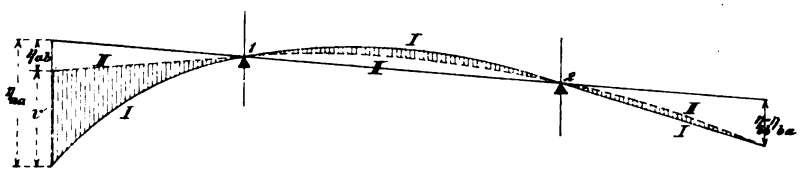


Fig. 351.

Bestimmt man nun mittels der durch die Punkte 1 und 2 der Seilpolygone *I* und *II* gelegten Geraden die Strecken η_{aa}, η_{ab} und $\eta_{ba} = \eta_{bb}$, Fig. 351, so findet man, da ja *I* und *II* in einem gewissen, hier gleichgültigen Maassstabe die Biegungslinien für die Belastungszustände $A = -1$ und $B = -1$ vorstellen,

$$\frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}} = \frac{\eta_{ba}}{\eta_{aa}} \text{ und } \frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}}\cdot\frac{\delta_{ab}}{\delta_{bb}} = \frac{\eta_{ba}}{\eta_{aa}}\cdot\frac{\eta_{ab}}{\eta_{bb}} = \frac{\eta_{ab}}{\eta_{aa}}.$$

Da nun weiter

$$\delta_{bb} = \frac{w_{II}\cdot\eta_{bb}}{EF_c}$$

ist, wo w_{II} die Polweite des Seilpolygons bedeutet, so erhält man schliesslich den einfachen Ausdruck

$$B_t = \varepsilon E F_c \frac{w_{III}}{w_{II}} \frac{\delta_{bt}\eta_{aa} - \delta_{at}\eta_{ba}}{\eta_{bb}(\eta_{aa} - \eta_{ab})}$$

und auf dieselbe Weise findet man

$$A_t = \varepsilon E F_c \frac{w_{III}}{w_I} \frac{\delta_{at}\eta_{bb} - \delta_{bt}\eta_{ab}}{\eta_{bb}(\eta_{aa} - \eta_{ab})}.$$

w_I, w_{II}, w_{III} sind Zahlen, welche mit dem Maassstabe gemessen werden, in welchem die entsprechenden Gewichte w', w'', w_t aufgetragen worden sind.

152. Untersuchung einer Seitenöffnung. Aus der Einflusslinie für A, welche zweckmässig auf eine wagerechte Nulllinie ($JC_1''C_2''B''$

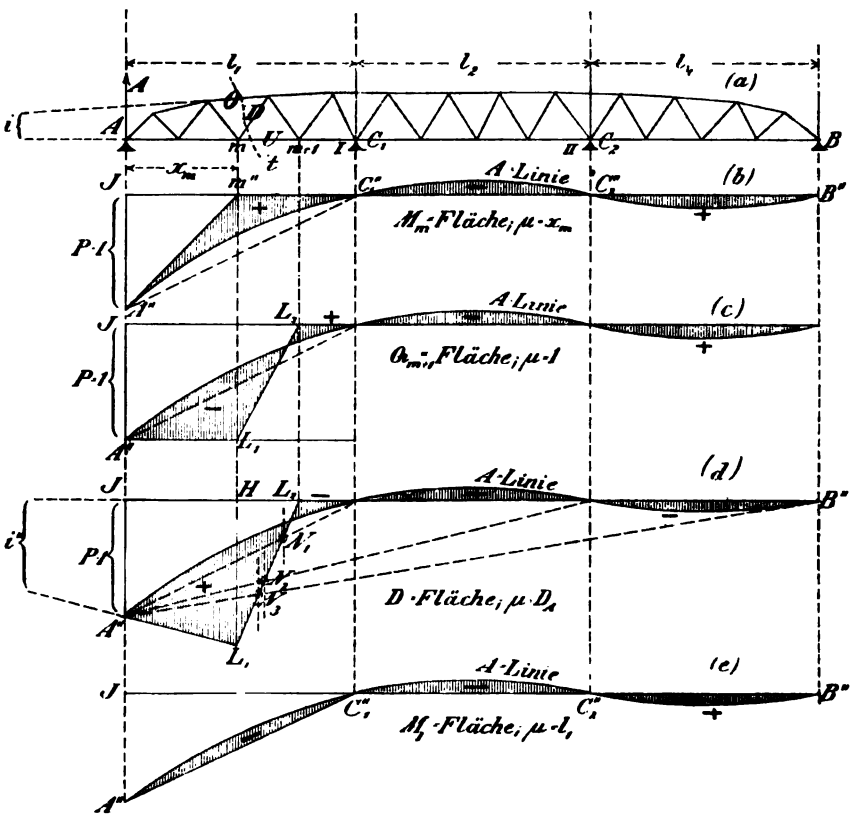


Fig. 352.

in Fig. 352) bezogen wird, lassen sich nun alle zur Berechnung der ersten Oeffnung erforderlichen Einflussflächen auf dieselbe Weise ableiten wie dies im § 12 für den Träger mit drei Stützen geschehen

ist. Die Figuren 352[b, c, d] sind ohne weiteres verständlich, wenn beachtet wird, dass der Einfluss der rechts vom Schnitte tt gelegenen Lasten auf das Moment M_m, die Querkraft Q_{m+1} und die Spannkraft D proportional dem Stützenwiderstande A ist, weil dann links von tt nur die äussere Kraft A angreift, und dass alle Einflussflächen in die einem einfachen Balken AC_1 entsprechenden übergehen müssen, sobald die gebrochene A-Linie durch die Gerade $A''C_1''$ (d. i. die A-Linie des einfachen Balkens AC_1) ersetzt wird.

Um die *M_m-Fläche* zu erhalten, bestimme man m'' senkrecht unter m und ziehe die Gerade $A''m''$. Multiplikator $= x_m$.

Die *Q-Fläche* für das $(m+1)^{te}$ Feld entsteht nach Ziehen der wagerechten Geraden $A''L_1$ durch Eintragung der Geraden L_2L_1. Multiplikator $= 1$.

Der Punkt L_1 der *D-Fläche* ist in Fig. 352[d] auf vierfache Weise bestimmt worden, nämlich mittels der Bedingung, dass der Schnittpunkt i'' von L_1A'' und $B''J$ senkrecht unter dem Treffpunkte i der Gurtstäbe O und U liegen muss, sodann mit Hilfe der den einfachen Balken AC_1, AC_2, AB entsprechenden Nullpunkte N_1, N_2, N_3.*) Das einfachste aber ist, die Strecke HL_1 mit Hilfe von $[D]$, vergl. Fig. 348 *f* u. *g*, zu ermitteln.

In Fig. 350[e] wurde noch mittels der A-Linie die Einflussfläche für das Moment M_{C_1} (*Stützenmoment*), welches wir in der Folge kürzer mit M_I bezeichnen wollen, bestimmt; der Multiplikator ist $= l_1$; und in derselben Weise liesse sich mit Hilfe der B-Linie die Einflussfläche für das Stützenmoment $M_{C_2} = M_{II}$ herleiten.

Zwischen den Momenten M_I und M_{II} besteht eine für die folgenden Untersuchungen wichtige Beziehung. Bringt man nämlich nur eine rechts von C_2 und im Abstande ξ von C_2 angreifende Last auf (Fig. 353), so entspricht dieser nach Fig. 350[c] der Werth $\delta_{ma} = \frac{\xi\delta_{ba}}{l_3}$ und die erste der Gleich. (1) geht (wegen $\delta_{ab} = \delta_{ba}$) mit $\delta_a = 0$, $\delta_{at} = 0$ über in:

$$0 = P\delta_{ba}\frac{\xi}{l_3} - A\delta_{aa} - B\delta_{ba};$$

sie lässt sich mit Hilfe der Gleichungen

$$Al_1 = M_I \text{ und } Bl_3 - P\xi = M_{II}$$

umformen in

$$\frac{M_{II}}{M_I} = -\frac{l_3}{l_1}\frac{\delta_{aa}}{\delta_{ba}}$$

und führt zu dem wichtigen Gesetze:

---

*) Die Hilfslinien wurden in Fig. 352 fortgelassen. Vergl. dafür Fig. 343 *a* u. *f*.

*Wird nur eine Aussenöffnung belastet, so nimmt das Verhältniss $M_{II} : M_I$ einen von der Grösse und Lage der Lasten unabhängigen Werth an.**)

Die Momentenlinie der Oeffnung l_2 besteht also, falls nur die Oeffnung l_3 belastet wird, aus einer durch einen festen Punkt L gehenden Geraden, und die Lage dieses Punktes kann auf die in Fig. 353 gezeigte Weise ermittelt werden. Man findet nämlich:

$$- M_{II} : M_I = e' : e = \operatorname{cotg} \beta : \operatorname{cotg} \alpha = \left(\frac{l_3}{\delta_{ba}}\right) : \left(\frac{l_1}{\delta_{aa}}\right).$$

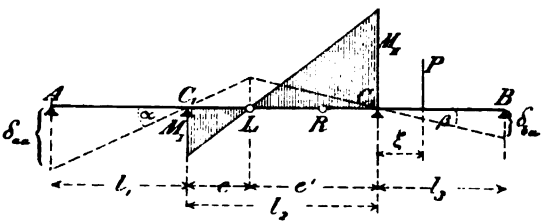


Fig. 353.

Ganz in derselben Weise lässt sich mit Hilfe von δ_{bb} und δ_{ab} der feste Punkt R bestimmen, durch welchen im Falle ausschliesslicher Belastung der Oeffnung l_1 die Momentengerade der Oeffnung l_2 geht. Man nennt die Punkte L und R *Festpunkte*, die ihre Lage bestimmenden Lothrechten sind in Fig. 350 *c* und *e* (strichpunktirt) eingetragen und mit (L), (R) bezeichnet worden.

In der Folge werden wir für die Verhältnisse zwischen den Strecken, in welche die Oeffnung l_2 durch die Festpunkte zerlegt wird, die Bezeichnungen einführen:

$$\frac{e'}{e} = \frac{\overline{LC_2}}{\overline{LC_1}} = \varkappa; \quad \frac{\overline{RC_1}}{\overline{RC_2}} = \varkappa'.$$

Wir erhalten dann, je nachdem nur die rechte oder nur die linke Aussenöffnung belastet wird,

$$M_{II} = - \varkappa M_I \text{ bezw. } M_I = - \varkappa' M_{II}.$$

Wenn man die A-Fläche nach dem in Fig. 350[f] angegebenen Verfahren zeichnet, so stellen die Seilpolygone *I* und *II* die Biegungs-

*) Kennt man also den zur Oeffnung l_3 gehörigen Zweig der M_I-Linie, so kann man sofort den entsprechenden Zweig der M_{II}-Linie zeichnen, oder umgekehrt. Hat man innerhalb Oeffnung l_3 einen Belastungszug so aufgestellt, dass M_I (absolut genommen) möglichst gross ist, so entspricht derselben Zugstellung auch ein Grösstwerth von M_{II}.

linien für die Belastungszustände $A = -1$ und $B = -1$ in verschiedenen Maassstäben vor. Dies macht aber nichts aus, da es bei der Bestimmung der Festpunkte nur auf die Verhältnisse $\delta_{aa} : \delta_{ba}$ und $\delta_{bb} : \delta_{ab}$ ankommt.

153. Untersuchung der Mittelöffnung. a. Querkräfte. Für das m^{te} Feld ergiebt sich nach Band I, Seite 162, Gleich. 2

$$(6) \qquad Q_m = Q_{om} + \frac{M_{II} - M_I}{l_2},$$

wo Q_{om} die Querkraft für das m^{te} Feld eines einfachen Balkens $I - II$ bedeutet. Die aus Gleich. 6 gefolgerte Darstellung der

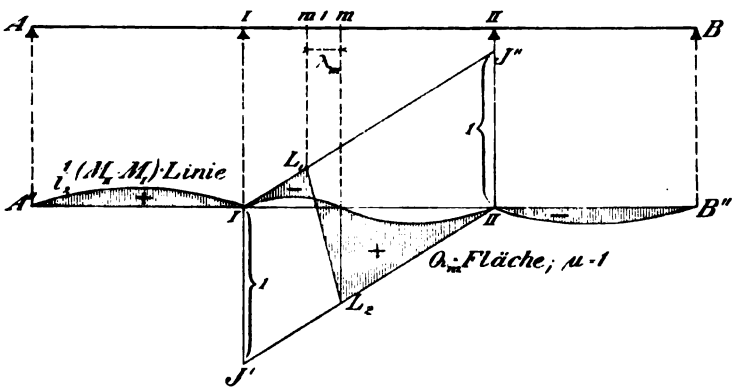


Fig. 354.

Q_m-Fläche zeigt Fig. 354; sie erfordert nach Auftragung der durch die Einflusslinien für M_I und M_{II} bestimmten $\frac{1}{l_2}(M_{II} - M_I)$-Linie nur das Ziehen der parallelen Geraden IJ'' und IIJ' und der Geraden $L_1 L_2$; die letztere ändert ihre Lage von Feld zu Feld, die anderen Linien können für die ganze Mittelöffnung benutzt werden.

b. Momente. Zwischen den Querkräften und den Momenten bestehen Beziehungen von der Form

$$(7) \qquad Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda_m}.$$

Bei gleichlangen Feldern kann man also mittels der Gleichung

$$\frac{M_m}{\lambda} = \frac{M_{m-1}}{\lambda} + Q_m$$

die $M : \lambda$-Flächen schrittweise aus den Q-Flächen herleiten, indem man von der bereits durch die $M_I : l_1$-Fläche bestimmten $M_I : \lambda$-Fläche ausgeht.

Zu einer anderen Darstellung der Einflusslinien für die Momente gelangt man, wenn man den Einfluss einer Einzellast P auf sämmtliche Querschnitte verfolgt. Fig. 355[a] zeigt die Momentenfläche für den im Punkte C mit P belasteten Balken; sie ist bestimmt durch die Stützenmomente $M_I = \eta_I$ und $M_{II} = \eta_{II}$ und durch das Moment $\overline{CS} = P\frac{\xi\xi'}{l_2}$, welches P im Querschnitte C eines einfachen Balkens $I\,II$ erzeugen würde. Die Punkte S liegen in einer Parabel, deren Pfeilhöhe für $P = 1$ gleich $\frac{l_2}{4}$ ist. Es empfiehlt sich, den Werth $1 \cdot \frac{l_2}{4}$ als Moment aufzufassen und den Maassstab hierfür nicht zu klein zu

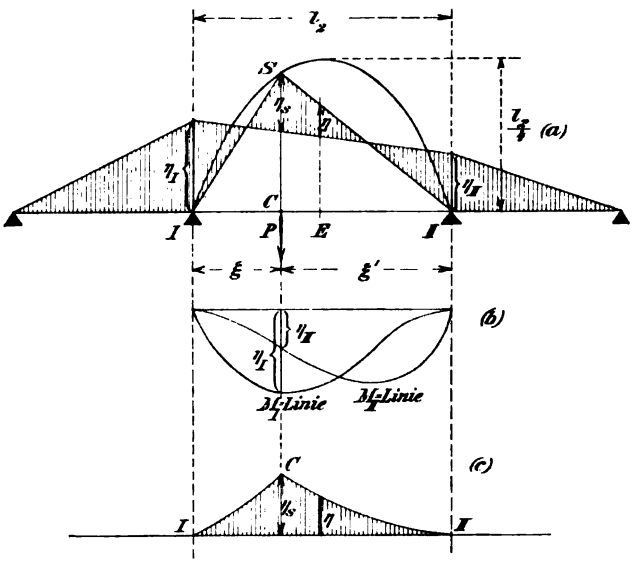


Fig. 355.

wählen. Der Einfluss von $P = 1$ auf das Moment für irgend einen Querschnitt E ist $M = P\eta$. Zeichnet man also die Momentenflächen für alle Lagen von $P = 1$, so erhält man sämmtliche Ordinaten der Einflusslinien für die Momente. Wir wollen aber die in Fig. 355 dargestellte Konstruktion nur zur Ermittlung der Ordinate η_c des Punktes C benutzen, den wir in der Folge kurz die *Spitze* nennen wollen. Die Zweige IC und CII (Fig. 355[c]) lassen sich dann sehr schnell mit Hilfe der folgenden einfachen Betrachtung zeichnen.

In Fig. 356 haben wir den Ort der Spitzen C und die Zweige CII einer Mittelöffnung mit 10 gleichlangen Feldern dargestellt. Für den mit der Stütze I zusammenfallenden Querschnitt ist dieser Zweig die M_I-Linie. Liegt nun die Last $P = 1$ im Knotenpunkte 4, so ist für die ersten 4 Felder:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4$$

und daraus folgt, wegen $Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda}$, bei konstantem λ,

$$(8) \qquad M_1 - M_I = M_2 - M_1 = M_3 - M_2 = M_4 - M_3.$$

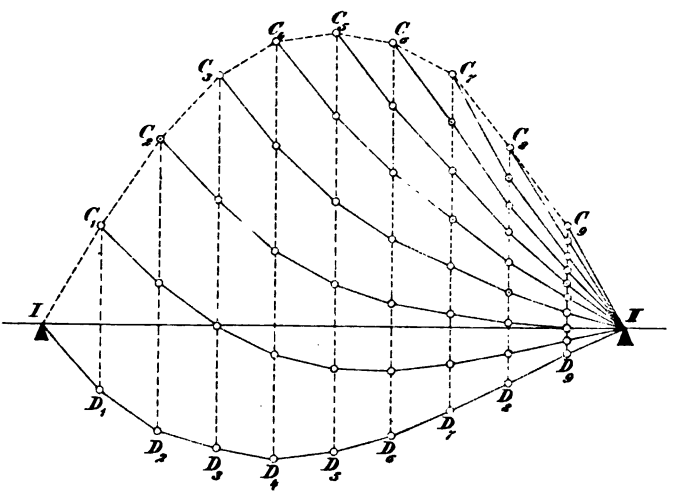


Fig. 356.

Es wird also der Abstand $C_4 D_4$ des Orts der Spitzen von der M_I-Linie durch die rechten Zweige der Einflusslinien für M_3, M_2 und M_1 in vier gleiche Theile zerlegt und ganz allgemein der Abstand $C_m D_m$ in m gleiche Theile.

Tritt die Last auf die rechte Seitenöffnung über, so ist die Querkraft Q für sämmtliche Felder der Mittelöffnung gleich gross. Besitzt also die rechte Seitenöffnung n gleichweite Felder, so hat man zur Bestimmung der zu l_3 gehörigen Zweige der Einflusslinien für M_1, M_2, M_3 . . . . . M_{n-1} nur nöthig, die von den Einflusslinien für M_I und M_{II} auf den Senkrechten durch die Knotenpunkte abgeschnittenen Strecken in n gleichlange Theile zu zerlegen. In Fig. 357 ist dies für den Fall dargestellt worden, dass die Oeffnung I-II 6 gleichlange Felder besitzt.

Sind die Feldweiten nicht gleichlang, so findet man an Stelle von Gleich. 8 die Beziehung

(9) $(M_1 - M_I) : (M_2 - M_1) : (M_3 - M_2) : (M_4 - M_3) = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$;

man muss also die Strecke $D_4 C_4$ in Theile zerlegen, die, von unten nach oben gezählt, sich zu einander verhalten wie $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$.

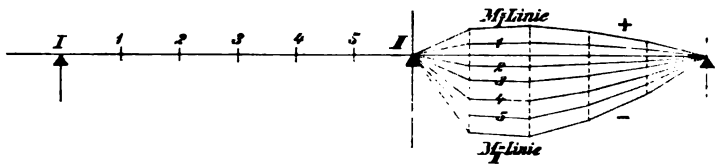


Fig. 357.

Fig. 358, die sich auf eine Mittelöffnung mit 6 Feldern bezieht, zeigt die Ausführung dieser Theilung. Es empfiehlt sich, mindestens zwei Schaaren von Parallelen, für grössere und kleinere Ordinaten zu benutzen.

In derselben Weise werden die linksseitigen Zweige der M-Linie bestimmt.

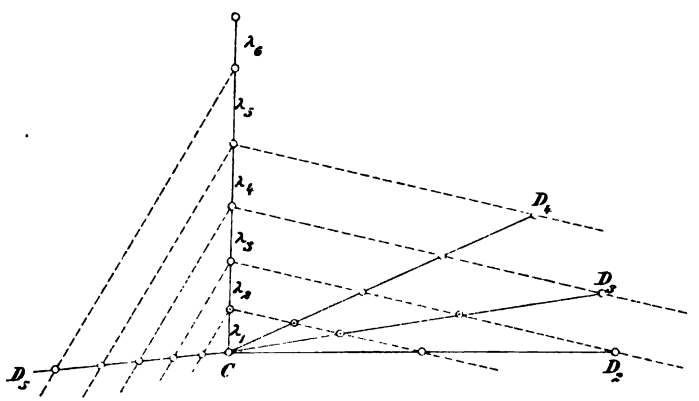


Fig. 358.

Kennt man aber die Einflusslinien für die Momente M, so bereitet die Darstellung der Einflusslinien für sämmtliche Stabkräfte nicht die geringsten Schwierigkeiten. Wir verweisen besonders auf das ausführliche Zahlenbeispiel im § 11*) und machen nur noch auf eine Vereinfachung aufmerksam, die bei dem in der Regel vorliegenden Falle einer

*) Im vorliegenden Falle sind natürlich die Momente M_m für zwei senkrecht übereinander liegende Punkte m gleich gross; $M_m^o = M_m^u$.

geradlinigen oberen oder unteren Gurtung zu einer erheblichen Zeitersparniss führt.

Ist die eine Gurtung, beispielsweise die obere Gurtung, geradlinig und β ihr Neigungswinkel, Fig. 359, so besteht zwischen V_m und D_{m+1} die Beziehung

$$V_m \cos\beta + D_{m+1}\cos(\beta + \varphi_{m+1}) + P_m \cos\beta = 0$$

und aus dieser folgt

$$\frac{V_m}{\gamma} = -D_{m+1}\cos\varphi_{m+1} - \frac{P_m}{\gamma}$$

$$\text{wo } \gamma = \frac{\cos(\beta + \varphi_{m+1})}{\cos\beta\cos\varphi_{m+1}}.$$

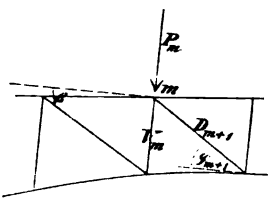


Fig. 359.

So lange also der Knotenpunkt m unbelastet ist, stimmt die Einflusslinie für $-V_m : \gamma$ mit der Einflusslinie für

$$D_{m+1}\cos\varphi_{m+1} = \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{M_m}{h_m}$$

überein. An der Stelle m unterscheiden sich die Ordinaten dieser beiden Linien um den Werth $1 : \gamma$.

Wir wollen noch zwei andere Verfahren zur Ermittlung der Einflusslinien der Stabkräfte angeben.

Das erste setzt gleiche Feldweiten voraus und beruht auf Verwerthung des in Band I, § 33 mitgetheilten *Zimmermann*'schen Verfahrens. Es ist in Fig. 360 für einen Theil eines Ständerfachwerks mit obenliegender Fahrbahn dargestellt worden. Mit Hilfe der Ordinaten η' und η'' der $M_m : \lambda$-Linie und $M_{m-1} : \lambda$-Linie sind die irgend einer Lastlage P entsprechenden Ordinaten η_D und η_V der D_m-Linie und V_m-Linie bestimmt worden.

Ein anderes Verfahren bringt die Spannkräfte S in den Stäben auf die Form

$$S = S_0 + S_I M_I + S_{II} M_{II},$$

wo S_0 die Spannkraft für $M_I = 0$ und $M_{II} = 0$ ist, d. h. für den Fall, dass die Mittelöffnung durch Beseitigung der den Mittelstützen C_1 und C_2 gegenüberliegenden Gurtstäbe in einen einfachen Balken verwandelt wird, während S_I und S_{II} die Spannkräfte für die in den Figuren 361 und 362 dargestellten Belastungszustände $M_I = 1$ und $M_{II} = 1$ bedeuten.

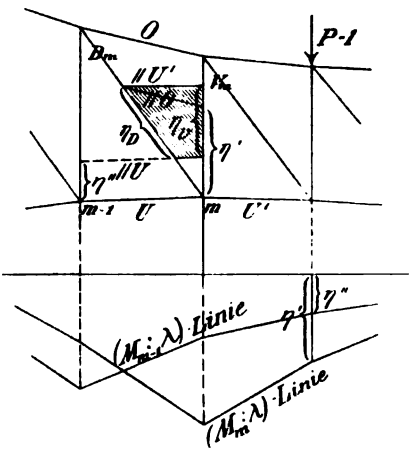


Fig. 360.

154. Die bei der Untersuchung von Eisenbahnbrücken zu leistenden zeichnerischen Arbeiten werden erheblich vereinfacht, wenn man die im I. Bande auf Seite 168 unter No. 99 gegebenen und begründeten Rathschläge befolgt. Danach empfiehlt es sich, bei der Untersuchung der in den Stäben der Mittelöffnung durch möglichst ungünstige Belastung der Mittelöffnung hervorgerufenen Beanspruchungen, einzelne Theile von Fahrzeugen zu vernachlässigen, welche auf die Seitenöffnungen zu stehen kommen. Man braucht dann von den Einflusslinien für die Momente, Querkräfte und Stabkräfte S der Mittelöffnung nur die zwischen den Stützen I und II liegenden

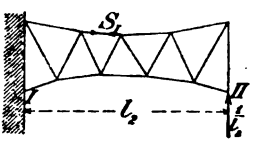


Fig. 361.

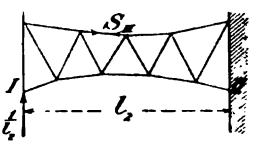


Fig. 362.

Zweige zu zeichnen, und findet die ungünstigste Wirkung der Belastung der Seitenöffnung auf die in Rede stehenden M, Q und S sehr schnell wie folgt. Man stellt über der rechten Seitenöffnung den Eisenbahnzug so auf, dass ein möglichst grosses Moment M_{II} entsteht; vernachlässigt hierbei den etwa über der Mittelöffnung stehenden Theil des äussersten Fahrzeugs und zeichnet mittels des Festpunktes L die in Fig. 353 schraffirte Momentenfläche; diese giebt den Einfluss der behandelten Belastung auf das Moment für jeden Querschnitt der Mittelöffnung an.

Die für das Trägerstück $C_1 C_2$ konstante Querkraft ist $Q = \frac{M_{II} - M_I}{l_2}$ und der Einfluss auf die Stabkräfte S der Mittelöffnung ist $S = S_I M_I + S_{II} M_{II}$. Und ganz in derselben Weise wird der Einfluss der Belastung der linken Seitenöffnung untersucht.

155. Die Widerstände der Mittelstützen. Es seien $r - 1$, r, $r + 1$ drei aufeinander folgende Stützpunkte eines über beliebig viele Stützen greifenden Balkens, M_{r-1}, M_r, M_{r+1} die Stützenmomente, C_{r-1}, C_r, C_{r+1} die Stützenwiderstände. C_{or} bedeute den Werth, welchen C_r annehmen würde, wenn sämmtliche Stützenmomente gleich Null wären, wenn also die Trägerstücke l_r und l_{r+1} in einfache Balken verwandelt würden. Ueben die einfachen Balken l_r und l_{r+1} auf die Stütze r die Drücke B_r und A_{r+1} aus, so ist

$$C_{or} = B_r + A_{r+1}.$$

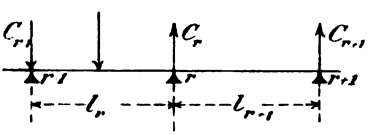


Fig. 363.

Nun ist die Querkraft für einen unmittelbar rechts oder links von r gedachten Querschnitt des durchgehenden Balkens:

$$Q_2 = + A_{r+1} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} \text{ bezieh. } Q_1 = - B_r + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r}$$

und man erhält daher wegen $Q_2 = Q_1 + C_r$ den allgemeinen Ausdruck:

$$C_r = C_{or} + \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}.$$

Hiernach ergiebt sich für den Stützenwiderstand C_1 des Trägers mit drei Oeffnungen (da das Moment M für die Endstütze gleich 0 ist) der Werth

$$C_1 = C_{o1} - \frac{M_I}{l_1} + \frac{M_{II} - M_I}{l_2},$$

und es ist deshalb die C_1-Linie bestimmt durch die in Fig. 364 dar-

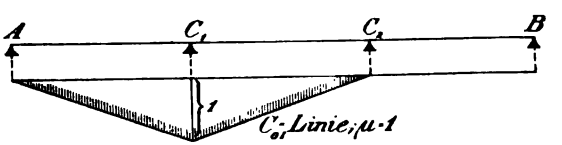


Fig. 364.

gestellte C_{o1}-Linie, und die Einflusslinien für M_I und M_{II}. In gleicher Weise wird auch die C_2-Linie ermittelt.

156. Die Einflusslinie für die Vertikale über der Mittelstütze erhält man mit Hilfe einer Bedingung für das Gleichgewicht der am oberen oder unteren Knotenpunkte (Fig. 365) angreifenden Kräfte.

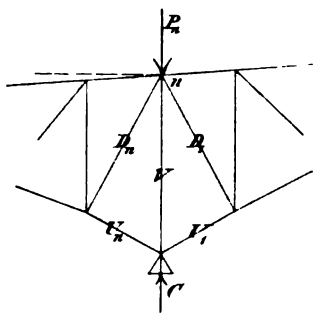


Fig. 365.

Ist die obere Gurtung geradlinig, so zerlege man die in n angreifenden Kräfte rechtwinklig zu O und nach der Richtung von O und setze die Summe der rechtwinklig zu O wirkenden Kräfte gleich Null. Man erhält dann V_n ausgedrückt durch D_n, D_1 und P_n. Sonst betrachte man den unteren Knotenpunkt, bilde die in der Richtung der einen unteren Gurtung und rechtwinklig hierzu wirkenden Seitenkräfte und setze wieder die Summe der letzteren gleich Null. Man erhält dann V ausgedrückt durch U_1 und C oder U_n und C.

Andere Behandlungsweisen des durchgehenden Balkens auf 4 Stützen findet man in den folgenden Paragraphen.

§ 14.

Durchgehender Balken mit beliebig vielen Stützen.

157. Die Elasticitätsgleichungen. Ein über $(n+1)$ Stützpunkte greifender, nirgends durch ein Gelenk unterbrochener Balken ist $(n-1)$-fach statisch unbestimmt, weil es der Beseitigung von

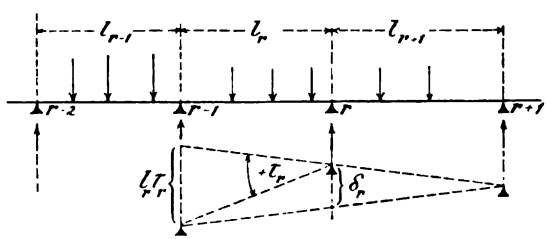


Fig. 366.

$(n-1)$ Stützen bedarf, um diesen Träger in einen statisch bestimmten zu verwandeln. Die Untersuchung dieses Balkens soll zunächst ganz allgemein durchgeführt werden, ohne Rücksicht darauf, ob ein Fachwerk oder ein vollwandiger Träger vorliegt.

Drei beliebige aufeinander folgende Stützpunkte mögen die Ordnungsziffern $r-1$, r, $r+1$ tragen, ihre wagerechten Abstände seien l_r, l_{r+1}, Fig. 366. Die Geraden $r-(r-1)$ und $r-(r+1)$, welche den Punkt r mit den benachbarten Stützpunkten verbinden, nennen wir das r^{te} *Geradenpaar*, und den Winkel, um welchen sie sich in Folge des Nachgebens der Widerlager gegen einander drehen, bezeichnen wir mit τ_r. Bedeutet δ_r die nach oben positiv genommene lothrechte Verschiebung des Stützpunktes r gegen die Punkte $(r-1)$ und $(r+1)$, so besteht die Gleichung

$$(1) \qquad l_r\tau_r = \delta_r \frac{l_{r+1}+l_r}{l_{r+1}} \quad \text{d. h.} \quad \tau_r = \delta_r \frac{l_{r+1}+l_r}{l_r l_{r+1}},$$

welche gestattet, aus einem gegebenen δ_r auf die Drehung τ_r zu schliessen. Drückt man nun andrerseits τ_r durch die auf den Balken wirkenden Kräfte und die Temperaturänderungen aus, so erhält man eine Elasticitätsbedingung, und es leuchtet ein, dass sich durch Wiederholung dieses Verfahrens ebenso viele Gleichungen aufstellen lassen, als Mittelstützen vorhanden sind — im ganzen also $(n-1)$ Bedingungen.

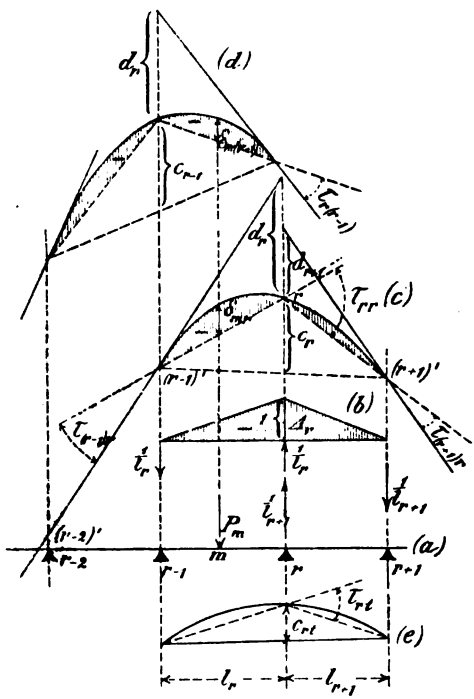


Fig. 367.

Als statisch nicht bestimmbare Grössen sollen die Stützenmomente M_1, M_2, ... M_{r-1}, M_r, M_{r+1}, ... M_{n-1} eingeführt werden, und es kommt daher zunächst darauf an, die Biegungslinien für die Zustände

$$M_1 = -1, \; M_2 = -1, \; \ldots\ldots, \; M_r = -1, \; M_{n-1} = -1$$

aufzutragen, sowie die gegenseitigen Drehungen der den Mittelstützen $1, 2, \ldots r-1, r, r+1, \ldots n-1$ entsprechenden Geradenpaare zu ermitteln. Hierbei bezeichnen wir allgemein mit τ_{pq} die gegenseitige

Drehung des p^{ten} Geradenpaares in Folge $M_q = -1$ und erinnern an die in der Einleitung bewiesene Beziehung

$$\tau_{pq} = \tau_{qp}. \tag{2}$$

Fig. 367^b zeigt die Momentenfläche für den Zustand $M_r = -1$, erzeugt durch die aus vier Kräften $\left(\frac{1}{l_r}, \frac{1}{l_{r+1}}\right)$ bestehende Belastungseinheit des r^{ten} Geradenpaares.*) Fig. 367^c sei die zugehörige Biegungslinie, d. i. das Seilpolygon der in bekannter Weise aus dem Momentendreiecke Δ_r berechneten Gewichte w**); die äussersten Seilseiten sind als Biegungslinien der links von $r-1$ und rechts von $r+1$ gelegenen, bei Eintritt des Zustandes $M_r = -1$ spannungslosen Balkenstücke aufzufassen, und es leuchtet zunächst ein, dass der fragliche Belastungsfall nur auf die gegenseitige Drehung des $(r-1)^{\text{ten}}$, r^{ten} und $(r+1)^{\text{ten}}$ Geradenpaares von Einfluss ist, dass sich also

$$\begin{cases} \tau_{(r-2)r} = 0, \ \tau_{(r-3)r} = 0, \ \ldots \\ \tau_{(r+2)r} = 0, \ \tau_{(r+3)r} = 0, \ \ldots \end{cases} \tag{3}$$

ergiebt. Drückt man demnach die Drehung τ_r durch die Lasten P, die statisch nicht bestimmbaren Grössen M und die Temperaturänderungen aus, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (3) die der Stütze r entsprechende Elasticitätsbedingung:

$$\tau_r = \Sigma P_m \delta_{mr} - \tau_{r(r-1)} M_{r-1} - \tau_{rr} M_r - \tau_{r(r+1)} M_{r+1} + \tau_{rt}, \tag{4}$$

wo τ_{rt} den Einfluss der Temperaturänderung bedeutet.

Die Werthe δ_{mr}, $\tau_{r(r-1)} = \tau_{(r-1)r}$, τ_{rr}, $\tau_{r(r+1)} = \tau_{(r+1)r}$ sind durch die Biegungslinie in Figur 367^c gegeben; während sich τ_{rt} mit Hilfe eines die Gewichte w_t verbindenden Seilpolygons in der Form

$$\tau_{rt} = c_{rt} \frac{l_{r+1} + l_r}{l_{r+1} l_r} \tag{5}$$

darstellen lässt, Fig. 367^c. Werden noch die für den Fall sehr kleiner Formänderungen — der hier ausschliesslich ins Auge gefasst wird — giltigen Beziehungen

$$\tau_{r(r-1)} = \frac{d_r}{l_r}; \ \tau_{rr} = c_r \frac{l_{r+1} + l_r}{l_{r+1} l_r}; \ \tau_{r(r+1)} = \frac{d_{r+1}}{l_{r+1}} \tag{6}$$

eingeführt, so geht (4) über in:

*) Vergl. Seite 31—33.

**) Für das Fachwerk erfolgt die Berechnung der w nach § 12, No. 117. Es ist in der Regel zulässig, den Einfluss der Füllungsstäbe zu vernachlässigen. Für den vollwandigen Balken, für den obige Gleichungen ebenfalls gelten, wird die Ermittlung der Gewichte w in der zweiten Abtheilung dieses Bandes gezeigt werden.

$$(7) \qquad M_{r-1}\frac{d_r}{l_r} + M_r\left(\frac{c_r}{l_r} + \frac{c_r}{l_{r+1}}\right) + M_{r+1}\frac{d_{r+1}}{l_{r+1}} = N_r, \text{ wo}$$

$$(8) \qquad N_r = -\left\{\Sigma P_m \delta_{mr} + \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}}(\delta_r + c_{rt})\right\}.$$

Dabei ist das Vorzeichen des Gliedes $\Sigma P_m \delta_{mr}$ umgekehrt worden, *weil von jetzt an unter* δ_{mr} *stets der absolute Werth der fraglichen Ordinate der Biegungslinie verstanden werden soll.*

Wir wollen in diesem Paragraphen voraussetzen, dass die Stützenverschiebungen δ_r gegebene, durch Beobachtung gefundene Grössen sind, sie mögen also von Ursachen herrühren, die sich der Vorausberechnung entziehen, wie beispielsweise das Nachgeben der Fundamente. Wären die δ_r abhängig von den Stützendrücken, so müsste man diese Drücke auf die in No. 155 beschriebene Weise durch die Stützenmomente ausdrücken. Ist dann δ_r nur abhängig von C_r, so treten in der Gleichung 7 ausser den Momenten M_{r-1}, M_r und M_{r+1} noch die Momente M_{r-2} und M_{r+2} auf. Eine allgemeine Untersuchung dieses Falles soll in der zweiten von den vollwandigen Systemen handelnden Abtheilung dieses Bandes gegeben werden; sie ist für den vollwandigen Balken wichtiger als für den gegliederten; ihr Hauptanwendungsgebiet bilden die Schiffbrücken und die durchlaufenden gelenklosen Schienenträger der Eisenbahnbrücken.

Die $(n-1)$ Gleichungen, welche sich nach Art der Gleichung 7 aufstellen lassen, nennen wir die *Grundgleichungen;* wir werden sie später meistens in der bequemeren Form schreiben:

$$(9) \qquad \alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r$$

wobei also:

$$(10) \qquad \alpha_r = \tau_{(r-1)r} = \tau_{r(r-1)}; \quad \beta_r = \tau_{rr}; \quad \alpha_{r+1} = \tau_{(r+1)r} = \tau_{r(r+1)}.$$

Ehe wir uns mit der Auflösung dieser Gleichungen beschäftigen, machen wir darauf aufmerksam, dass bis jetzt stillschweigend vorausgesetzt worden ist, es seien die Biegungslinien mit der Polweite 1 gezeichnet und die Gewichte w aus den Längenänderungen der Fachwerkstäbe berechnet. Wählt man nun die Polweite $= w_P$, giebt dem Dreieck Δ_r die beliebig gewählte, aber für alle Stützpunkte feste Höhe y_c, und setzt man schliesslich $w = \frac{ys}{r^2}\frac{F_c}{F}$ statt $w = \frac{ys}{r^2 EF}$ (Seite 359), so muss man die Werthe d, c und δ_{mr} noch mit $w_P : EF_c y_c$ multipliciren, oder — was auf dasselbe hinauskommt — das Glied $\delta_r + c_{rt}$ durch jenen Ausdruck dividiren. Sind ausserdem die Gewichte w_t für $\varepsilon = 1$ berechnet (Seite 371) worden, so muss c_t in (8) noch mit ε

multiplicirt werden und man erhält, wenn die Polweite des die Gewichte w_t verbindenden Seilzuges $= w_{tP}$ angenommen wird:

$$(11) \qquad N_r = -\left\{ \Sigma P_m \delta_{mr} + \frac{EF_c(l_r + l_{r+1})y_c}{w_P l_r l_{r+1}} \left(\delta_r + \varepsilon c_{rt} w_{tP} \right) \right\}.$$

Die Strecken δ_{mr}, y_c, δ_r, c_{rt}, l_r, l_{r+1} werden mit ein und demselben Längenmaassstabe gemessen, w_P und w_{tP} sind (ebenso wie die w) Zahlen. EF_c ist eine Kraft, N_r ein Moment.

Solange nur der Einfluss der Lasten P untersucht wird, hat man lediglich darauf zu achten, dass sämmtliche Momentendreiecke Δ dieselbe Höhe y_c erhalten und sämmtliche Seilzüge mit der gleichen Polweite w_P gezeichnet werden; wie gross y_c und w_P gewählt werden, ist dann gleichgültig.

158. Die Festpunkte L und R. Erstes Verfahren zur Auflösung der Elasticitätsgleichungen. Wir verfolgen jetzt nur den Einfluss der Lasten P, nehmen also $\delta_r = 0$ und $c_{rt} = 0$ an; auch setzen wir zunächst voraus, dass nur ausserhalb der Oeffnungen l_r, l_{r+1} Kräfte P auftreten. Die Momentenlinien der Balkentheile l_r, l_{r+1} bestehen dann aus zwei durch die Stützenmomente M_{r-1}, M_r, M_{r+1} bestimmten Geraden mit den Nullpunkten L_r, L_{r+1}, und zwischen jenen drei Momenten gelten die Gleichungen:

$$(12) \qquad \alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = 0$$

$$(13) \qquad M_{r-1} = -M_r \frac{a}{b}; \quad M_{r+1} = -M_r \frac{b'}{a'} \text{ (s. Fig. 368),}$$

aus denen sich die einfache Beziehung

$$\beta_r = \alpha_r \frac{a}{b} + \alpha_{r+1} \frac{b'}{a'}$$

ergiebt. Mit Hilfe derselben lässt sich die Lage des einen Nullpunktes leicht bestimmen, sobald die des anderen gegeben ist. Bringt man nämlich die Senkrechten durch L_r und L_{r+1} mit den äussersten Seiten der für den Belastungsfall $M_r = -1$ gezeichneten Biegungslinie in L_r' und L_{r+1}' zum Schnitt, so findet man:

$$\angle L_r' r' (r-1)' = \alpha' = \alpha_r \frac{a}{b}\text{*)}; \quad \angle L_{r+1}' r' (r+1)' = \alpha'' = \alpha_{r+1} \frac{b'}{a'}$$

also:

$$\beta_r = \alpha' + \alpha''$$

*) Man denke daran, dass es sich hier um sehr kleine Formänderungen handelt. In Fig. 368 wurden nur die Punkte $(r-1)'$, r', $(r+1)'$ und die äussersten Seiten der fraglichen Biegungslinie gezeichnet. Vergl. auch Fig. 367c.

und hieraus folgt, *dass die drei Punkte L_r', r', L_{r+1}' in einer Geraden liegen.**)

Wir setzen voraus, dass nur die r^{te} Oeffnung belastet wird, und dass die Stützenmomente M_{r-1} und M_r auf irgend eine Weise gefunden sind. Innerhalb einer unbelasteten Oeffnung besteht die Momentenlinie aus einer Geraden, Fig. 369. Die Nullpunkte dieser Geraden seien links von der belasteten Oeffnung: L_1, L_2, L_3, ... rechts davon: R_n, R_{n-1}, R_{n-2} ... Der Punkt L_1 fällt mit dem Stützpunkte 0 zusammen; seine Lage ist also bestimmt, und damit sind auch schrittweise mittels des soeben bewiesenen Gesetzes die Punkte L_2, L_3, ... gegeben. Und ganz auf dieselbe Weise kann man, von R_n ausgehend, der Reihe nach R_{n-1}, R_{n-2}, ... finden.

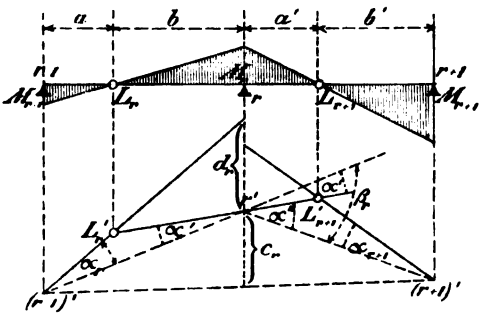


Fig. 368.

Die Lage der Punkte L und R ist ganz unabhängig von der Belastung des Balkens; sie ist vollständig bestimmt durch die den Zuständen $M_1 = -1$, $M_2 = -1$, ... entsprechenden Biegungslinien. Es führen deshalb diese Punkte den Namen *Festpunkte;* ihre Ermittlung

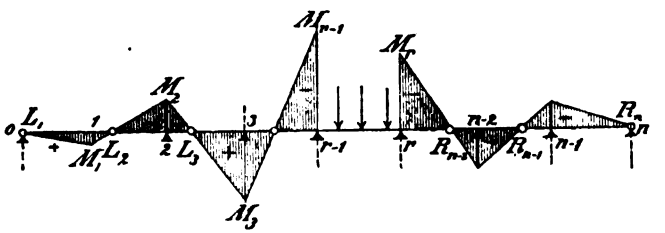


Fig. 369.

ist die erste Arbeit, welche bei Untersuchung eines über mehrere Stützen greifenden Balkens auszuführen ist. Kennt man die Punkte L und R, so ist man nach Figur 369 im Stande, den Einfluss der Belastung irgend einer Oeffnung auf die Momente aller übrigen Oeffnungen schnell anzugeben, sobald die Momente für die jene belastete Oeffnung begrenzenden Stützpunkte gefunden sind.

*) Ein Sonderfall dieser Beziehung wurde bereits im § 13 gefunden.

Wir bezeichnen nun mit a_r und b_r bezieh. a_r' und b_r' die Strecken, in welche die Oeffnung l_r durch den Festpunkt L_r bezieh. den Festpunkt R_r zerlegt wird, Fig. 370, setzen

$$(14) \qquad \frac{b_r}{a_r} = \varkappa_r, \quad \frac{b_r'}{a_r'} = \varkappa_r',$$

und erhalten für den Fall, dass nur rechts von r Lasten auftreten, dass also die Momentenlinie der Oeffnung l_r eine durch den Punkt L_r gehende Gerade ist, die Beziehung:

$$M_r = -\varkappa_r M_{r-1},$$

welche in Verbindung mit der Elasticitätsbedingung:

$$\alpha_{r-1} M_{r-2} + \beta_{r-1} M_{r-1} + \alpha_r M_r = 0$$

zu der Gleichung

$$(15) \qquad \alpha_{r-1} M_{r-2} + \beta_{r-1} M_{r-1} = \varkappa_r \alpha_r M_{r-1}$$

führt, und diese letztere bleibt auch bestehen, wenn zwischen $r-1$ und r Lasten hinzutreten, weil hierdurch das Verhältniss zwischen den Momenten M_{r-2} und M_{r-1} nicht beeinflusst wird. Die Gültigkeit der Gleichung (15) ist nur an die Bedingung gebunden, dass der Träger zwischen 0 und $r-1$ unbelastet bleibt; und ganz ebenso lässt sich zeigen, dass zwischen M_r und M_{r+1} die Beziehung besteht:

$$(16) \qquad \alpha_{r+1} M_{r+1} + \beta_r M_r = \varkappa_r' \alpha_r M_r,$$

sobald rechts von r keine Lasten auf den Balken wirken. Ist also nur die Oeffnung l_r belastet, so gilt sowohl (15) als (16) und die beiden Elasticitätsbedingungen:

$$\alpha_{r-1} M_{r-2} + \beta_{r-1} M_{r-1} + \alpha_r M_r = -\Sigma P_m \delta_{m(r-1)}$$
$$\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = -\Sigma P_m \delta_{mr}$$

gehen über in

$$(17) \qquad \begin{cases} \varkappa_r M_{r-1} + M_r = -\Sigma P_m \dfrac{\delta_{m(r-1)}}{\alpha_r} = -\Sigma P_m \dfrac{\delta_{m(r-1)}}{d_r} l_r \\ M_{r-1} + \varkappa_r' M_r = -\Sigma P_m \dfrac{\delta_{mr}}{\alpha_r} = -\Sigma P_m \dfrac{\delta_{mr}}{d_r} l_r; \end{cases}$$

sie führen zu einer sehr einfachen Darstellung der Momente M_{r-1} und M_r.

Trägt man nämlich M_{r-1} und M_r bei $(r-1)$ und r als Ordinaten auf, Figur 370, und verbindet die Endpunkte derselben durch eine Gerade, so sind die Ordinaten dieser Geraden an den Stellen L_r und R_r:

$$Y = M_{r-1} \frac{b_r}{l_r} + M_r \frac{a_r}{l_r} = \frac{a_r}{l_r} (M_{r-1} \varkappa_r + M_r)$$

$$Y' = \frac{a_r'}{l_r} (M_r \varkappa_r' + M_{r-1}),$$

woraus mit Beachtung der Gleichungen 17:

$$(18) \qquad Y = -\frac{a_r}{d_r}\Sigma P_m \delta_{m(r-1)}; \quad Y' = -\frac{a_r'}{d_r}\Sigma P_m \delta_{mr},$$

und diese Werthe lassen sich leicht zeichnerisch bestimmen. In Fig. 370 ist beispielsweise die Ermittlung von Y und Y' für den Fall eingetragen, dass nur eine Einzellast P wirkt, und damit ist die Aufgabe gelöst, die Zweige $(r-1)-r$ der Einflusslinien für M_{r-1} und M_r zu zeichnen.

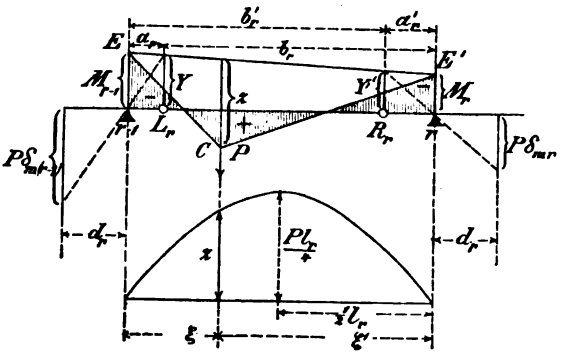


Fig. 370.

Will man den Einfluss der Last $P = 1$ nicht nur auf M_{r-1} und M_r sondern auf sämmtliche Momente der Oeffnung l_r haben, so muss man die in Fig. 370 dargestellte durch Schraffirung hervorgehobene Momentenfläche auftragen; dieselbe ist bestimmt durch $z = P\frac{\xi\xi'}{l_r}$, denn das Dreieck ECE' ist die Momentenfläche eines einfachen Balkens l_r. Die Strecke z aber wird als Ordinate einer Parabel erhalten, deren Pfeil $= 0{,}25\, Pl_r$ ist.

Jetzt lassen sich alle bei der Untersuchung des Balkens auftretenden Fragen auf dieselbe Weise erledigen wie bei dem im § 13 behandelten, auf 4 Stützen ruhenden Balken. Wir verweisen besonders auf die in den Figuren 355 bis 357 dargestellten Verfahren. An die Stelle von M_I und M_{II} treten M_{r-1} und M_r. Ebenso können für die Querkräfte die früheren Untersuchungen benutzt werden. Die Q-Flächen für die Oeffnung l_r lassen sich z. B. nach dem in der Fig. 354 dargestellten Verfahren aus der Einflusslinie für den Ausdruck $(M_r - M_{r-1}):l_r$ herleiten.

Den Einfluss der Belastung der übrigen Oeffnungen auf die Stabkräfte der Oeffnung l_r kann man auch mit Hilfe der Gleichung finden

$$(19) \qquad S = S_{r-1} M_{r-1} + S_r M_r,$$

welche der auf Seite 381 benutzten Gleichung entspricht. Wird z. B. der Einfluss der Belastung einer rechts von l_r gelegenen Oeffnung l_s gesucht, so bestimme man mittels des von Stütze $(v-1)$ bis Stütze v laufenden Zweiges der M_{v-1}-Linie das Moment M_{v-1}, hierauf mittels eines nach Fig. 369 durch die Festpunkte L_{v-2}, L_{v-3}, ... geführten Geradenzuges die Momente M_{v-2}, M_{v-3}, ..., M_r, M_{r-1} und setze die letzteren in die Gleichung (19) ein.

Auch leuchtet ein, dass man durch Anwendung der Gleichung $S = S_0 + S_{r-1} M_{r-1} + S_r M_r$ (entsprechend der Formel auf Seite 379) die zwischen $(r-1)$ und r gelegenen Zweige der S-Linien gewinnen kann.

Ganz besonders einfach gestaltet sich die Untersuchung eines Endfeldes. So kann man z. B. alle zur Behandlung der Oeffnung l_1 erforderlichen Einflusslinien auf die im § 13 in No. 152 gezeigte Weise aus der Einflusslinie für den Widerstand A der Endstütze herleiten, nachdem man die A-Linie mit Hilfe der M_1-Linie bestimmt hat. Es liegt hier die Umkehrung der in No. 152 gelösten Aufgabe vor; dort wurde die M_1-Linie aus der A-Linie entwickelt.

159. Zweites Verfahren zur Auflösung der Grundgleichungen:

$$\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r.$$

Wir setzen einen beliebigen Belastungs- und Temperaturzustand voraus, denken die Stützenmomente nach Fig. 371 als Ordinaten aufge-

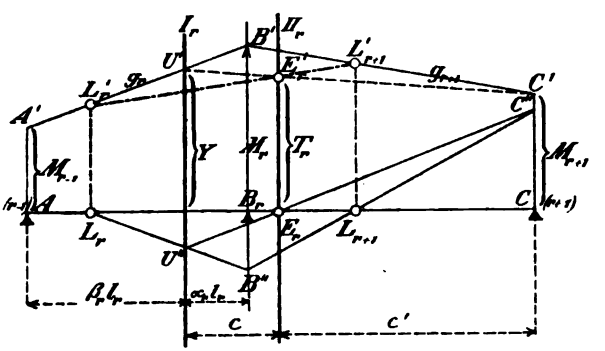


Fig. 371.

tragen, ihre Endpunkte durch die Geraden g_1, g_2, . . . verbunden und nennen den auf diese Weise entstandenen Linienzug kurz das *M-Polygon*. Fig. 371 stellt das $(r-1)^{te}$ und r^{te} Feld dieses Polygons dar. Wird die Senkrechte I_r so gezogen, dass sich die Strecken, in welche sie l_r

zerlegt, zu einander verhalten wie α_r zu β_r, so ist die von der Geraden g_r auf der Senkrechten I_r abgeschnittene Ordinate:

$$(20) \qquad Y = \frac{M_{r-1}\alpha_r + M_r\beta_r}{\alpha_r + \beta_r}$$

und die r^{te} Grundgleichung lässt sich mithin auch schreiben:

$$(21) \qquad (\alpha_r + \beta_r)\ Y + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r.$$

Zieht man nun die Senkrechte II_r so, dass sie die Strecke $l_{r+1} + \alpha_r l_r$ im Verhältniss

$$(22) \qquad c' : c = (\alpha_r + \beta_r) : \alpha_{r+1}$$

theilt, so schneidet die Gerade $U'C'$, welche die Endpunkte von Y und M_{r+1} verbindet, auf II_r die Ordinate

$$(23) \qquad T_r = \frac{Yc' + M_{r+1}c}{c' + c} = \frac{Y(\alpha_r + \beta_r) + M_{r+1}\alpha_{r+1}}{\alpha_r + \beta_r + \alpha_{r+1}}$$

ab, und es folgt aus der Vergleichung dieses Ausdruckes mit der Beziehung (21) das Gesetz:

Die mit Hilfe der Senkrechten I_r bestimmte Gerade $U'C'$ schneidet auf der Senkrechten II_r das gegebene Moment ab:

$$(24) \qquad \overline{E_r E_r'} = T_r = \frac{N_r}{\alpha_r + \beta_r + \alpha_{r+1}}.$$

Jetzt werde angenommen, es sei ein Punkt L_r' der Geraden g_r gegeben. Denkt man durch L_r' verschiedene Geraden g_r gelegt, so kann man zu jeder derselben die zugehörige Gerade g_{r+1} finden, indem man von dem Punkte U', in welchem die g_r von der I_r geschnitten wird, durch den festen Punkt E_r' die Gerade $U'E_r'C'$ zieht und C' mit B' verbindet. Alle die Geraden g_{r+1}, welche in dieser Weise zu verschiedenen Geraden g_r gezeichnet werden können, schneiden sich in einem Punkte L'_{r+1}, welcher auf der durch die Punkte L_r' und E_r' bestimmten Geraden liegt und gefunden wird, indem zu einer beliebigen g_r die zugehörige g_{r+1} gezeichnet und mit der Geraden $L_r'E_r'$ zum Schnitt gebracht wird.*)

Uebersichtlicher aber verfährt man, wenn man, von dem senkrecht unter L_r' gelegenen Punkte L_r ausgehend, zunächst auf die Lage von L_{r+1} schliesst. Man legt durch L_r eine beliebige Gerade, welche

---

*) Es folgt dies aus dem bekannten Satze der Geometrie der Lage: Bewegen sich die Ecken (U', B', C') eines Dreiecks auf drei Strahlen (I_r, $B'B$, $C'C$) eines Strahlenbüschels, und gehen hierbei zwei Seiten (g_r und $U'C'$) des Dreiecks durch feste Punkte (L_r' und E_r'), so geht auch die dritte Seite (g_{r+1}) durch einen festen Punkt (L_{r+1}'), welcher mit den beiden anderen festen Punkten in einer Geraden liegt.

die Senkrechten I_r und $B'B$ in U'' bezw. B'' schneidet, führt hierauf durch U'' und E_r eine Gerade bis zu ihrem Schnittpunkte C'' mit der Senkrechten durch C und zieht schliesslich die Gerade $C''B''$. Letztere bestimmt dann den Punkt L_{r+1}.

Mit Hilfe der vorstehenden Entwicklungen ist man im Stande, das M-Polygon zu zeichnen. Die Gerade g_1 Fig. 372 geht (wegen $M_0 = 0$) durch den Stützpunkt 0; es fällt also L_1 mit 0 zusammen. Aus der

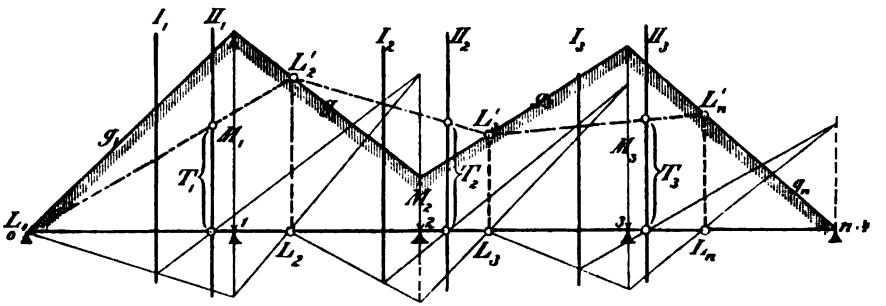


Fig. 372.

Lage von L_1 schliesst man in der vorhin beschriebenen Weise auf die Lage von L_2, sodann auf die von L_3, L_4 . . ., und zeichnet den Linienzug $L_1 L_2' L_3' \ldots$, dessen Seiten auf den Senkrechten II_1, II_2, II_3 . . . die gegebenen Momente T_1, T_2, T_3 . . . abschneiden. Jetzt ist in jeder Oeffnung ein Punkt L' des M-Polygons bekannt, und da die Gerade g_n nicht nur durch L_n' sondern auch durch den Stützpunkt n gehen muss, so ist der Linienzug g_n, g_{n-1}, . . . g_1 bestimmt.

Man kann natürlich auch in der Weise vorgehen, dass man nicht von L_1, sondern von dem in der letzten Oeffnung gegebenen, mit Stützpunkt n zusammenfallenden Punkte R_n ausgeht, in den vorhergehenden Oeffnungen Punkte R_{n-1}, R_{n-2}, ... R_1 auf ähnliche Art bestimmt, wie vorhin die Punkte L_2, L_3, . . ., hierauf mit Hilfe der T_{n-1}, T_{n-2}, . . . einen Linienzug R'_{n-1}, R'_{n-2} . . . zeichnet und schliesslich g_1 durch L_1 und R_1' legt. Zur Ermittlung der Punkte R sind (an Stelle der I_r) Senkrechte I_r' zu bestimmen, welche l_{r+1} im Verhältniss $\alpha_{r+1} : \beta_r$ theilen, Fig. 373.

Es ist leicht einzusehen, dass die Punkte L und R mit den früher benutzten Festpunkten übereinstimmen. Zu diesem Zwecke nehme man nur eine einzige Oeffnung belastet an und streiche die von den Temperaturänderungen und Stützensenkungen abhängigen Glieder der Werthe T. Dann gehen die Geraden g der links von der belasteten Oeffnung gelegenen Oeffnungen durch die Punkte L und die Geraden g

der rechtsseitigen Oeffnungen durch die Punkte R. Hieraus folgt, dass man die beiden hier mitgetheilten Verfahren zur Ermittlung der Stützenmomente auch miteinander vereinigen kann, so zwar dass man die Punkte L und R auf die früher gezeigte Weise mit Hilfe der Biegungslinien bestimmt und nun das M-Polygon aus den Momenten T ableitet. Dieser Weg ist sehr zu empfehlen bei Aufsuchung des Einflusses von Temperaturänderungen auf einen im übrigen nach No. 131 mittels Einflusslinien zu behandelnden Träger. Die Momente T sind hier durch die Gleichung bestimmt:

$$T_r = \frac{-1}{\alpha_r + \beta_r + \alpha_{r+1}} \frac{\varepsilon E F_c (l_r + l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} \frac{y_c}{w_{tP}} c_{rt}.$$

Werden negative T in Fig. 372 oberhalb der Achse $0 - n$ aufgetragen, so sind auch die Stützenmomente negativ, sobald sie durch oberhalb der $0 - n$ liegende Ordinaten dargestellt werden.

In Figur 373 ist noch gezeigt worden, wie die Senkrechten I_r, II_r, I_r' mit Hilfe der Biegungslinie für den Zustand $M_r = -1$ gefunden werden können. II_r geht durch den Schnittpunkt der äussersten Seilseiten, I_r und I_r' gehen durch die Punkte, in denen die Endseiten von den Schlusslinien $(r+1)' - r'$ bezieh. $(r-1)' - r'$ getroffen werden. Der Beweis ist leicht zu führen.

Es sei schliesslich noch hervorgehoben, dass das zweite Verfahren, die Elasticitätsbedingungen aufzulösen, insofern von grosser allgemeiner Bedeutung ist, als es die zeichnerische Behandlung von Gleichungen gestattet, welche dieselbe Form haben, wie die Beziehungen

$$\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r;$$

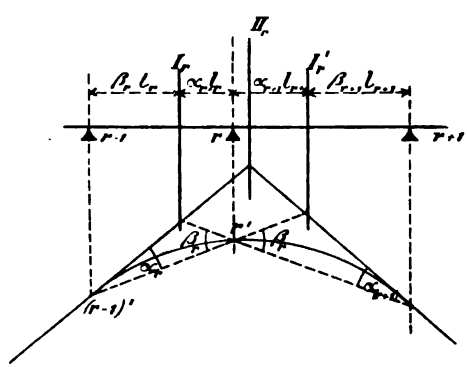


Fig. 373.

und Gleichungen dieser Art begegnet man in der That bei statischen Untersuchungen sehr häufig. Eine besonders wichtige Anwendung wird der den Nebenspannungen gewidmete Theil unseres Buches bringen.

160. Angenäherte Ermittlung der Stützenmomente. Zu bedeutenden Vereinfachungen gelangt man, wenn man bei der Berechnung der Gewichte w (Seite 385) die Werthe $\frac{s}{EFr^2}$ konstant annimmt und

die Einzelkräfte w durch eine, unendlich kleinen Stablängen entsprechende, stetige Belastung ersetzt, ein Verfahren, das nach den Erfahrungen des Verfassers bei Parallelträgern und bei Trägern mit schwach gekrümmten Gurtungen recht befriedigende Ergebnisse für den Einfluss der Lasten P liefert. Die in Fig. 374[b] dargestellte Momentenfläche für den Zustand $M_r = -1$ wird als *Belastungsfläche* aufgefasst. Das zugehörige Seil-

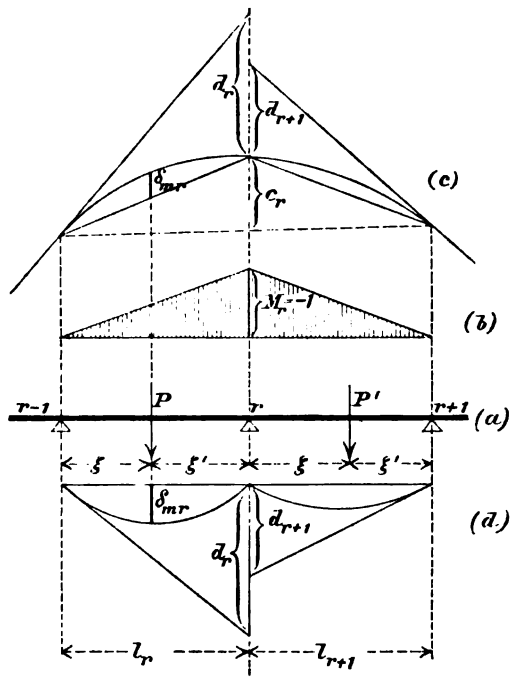


Fig. 374.

polygon (Polweite = 1) zeigt die Fig. 374[c]; es liefert die Werthe δ_{mr}, d_r, d_{r+1}, c_r. Die Belastungsfläche besteht aus zwei Dreiecken von den Inhalten $\frac{l_r}{2}$ und $\frac{l_{r+1}}{2}$; sie erzeugt an der Stelle r eines einfachen in den Punkten $r-1$ und $r+1$ unterstützten Balkens das Biegungsmoment

$$c_r = \frac{1}{l_r + l_{r+1}} \left[\frac{l_{r+1}}{2} \cdot \frac{2\,l_{r+1}}{3} l_r + \frac{l_r}{2} \cdot \frac{2\,l_r}{3} l_{r+1} \right] = \frac{l_r l_{r+1}}{3}.$$

Betrachtet man die beiden Dreiecke als Belastungsflächen einfacher Balken von den Stützweiten l_r und l_{r+1}, so findet man für die in $r-1$

und $r+1$ angreifenden Stützenwiderstände die Werthe $\frac{1}{6} l_r$ und $\frac{1}{6} l_{r+1}$. Da nun die Querkräfte für die Balken-Querschnitte bei $(r-1)$ und $(r+1)$ gleich den entsprechenden Stützenwiderständen sind und da weiter allgemein $Q = \frac{dM}{dx}$ ist, so ergeben sich nach Fig. 374[d] die Beziehungen

$$\frac{d_r}{l_r} = \frac{l_r}{6} \text{ und } \frac{d_{r+1}}{l_{r+1}} = \frac{l_{r+1}}{6}$$

und die auf Seite 385 abgeleitete Gleichung 7 geht über in

$$(25) \qquad M_{r-1} l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} = N_r$$

wo

$$(26) \qquad N_r = -6 \Sigma P_m \delta_{mr}$$

Dabei ist δ_{mr} das Biegungsmoment für den Querschnitt m eines mit der Dreiecklast $\frac{1}{2} l_r$ belasteten einfachen Balkens von der Stützweite l_r. Man findet

$$\delta_{mr} = \frac{l_r}{6} \xi - 1 \frac{\xi}{l_r} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\xi}{3} = \frac{l_r^2}{6} \left(\frac{\xi}{l_r} - \frac{\xi^3}{l_r^3} \right).$$

Bezeichnet man also den nur von dem Verhältniss $\xi : l_r$ abhängigen Klammerausdruck mit ω_D, wobei der Zeiger D an die Dreiecklast erinnern soll, und nimmt man in jeder der beiden Oeffnungen eine Einzellast an, so erhält man die Gleichung

$$(27) \qquad M_{r-1} l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} = -P l_r^2 \omega_D - P' l_{r+1}^2 \omega_D'$$

wo

$$(28) \qquad \begin{cases} \omega_D = \dfrac{\xi}{l_r} - \dfrac{\xi^3}{l_r^3} \\ \omega_D' = \dfrac{\xi'}{l_{r+1}} - \dfrac{\xi'^3}{l_{r+1}^3}. \end{cases}$$

Die Werthe ω_D und ω_D' sind in der Tabelle auf Seite 396 für 9 Theilpunkte angegeben. Man wird die mit ihrer Hilfe für die Stützenmomente berechneten Einflusslinien zunächst als stetig gekrümmte Kurven zeichnen und schliesslich Polygone einbeschreiben, deren Ecken den Angriffspunkten der Querträger entsprechen.

Tabelle.

$\frac{\xi}{l}$	ω_D	ω_D'	$\frac{\xi'}{l}$
0,1	0,099	0,171	0,9
0,2	0,192	0,288	0,8
0,3	0,273	0,357	0,7
0,4	0,336	0,384	0,6
0,5	0,375	0,375	0,5
0,6	0,384	0,336	0,4
0,7	0,357	0,273	0,3
0,8	0,288	0,192	0,2
0,9	0,171	0,099	0,1

Zu einer einfachen Bestimmung der Festpunkte L und R führt die folgende Untersuchung. Die Stützenmomente bestimmen nach Fig. 375 einen Linienzug .... g_r, g_{r+1}, ... welcher auf den in den Abständen $\frac{l_r}{3}$ und $\frac{l_{r+1}}{3}$ von r eingetragenen Senkrechten d_r'' und d_{r+1}' die Momente

$$Y_r'' = \frac{M_{r-1}}{3} + \frac{2M_r}{3}$$

$$Y_{r+1}' = \frac{2M_r}{3} + \frac{M_{r+1}}{3}$$

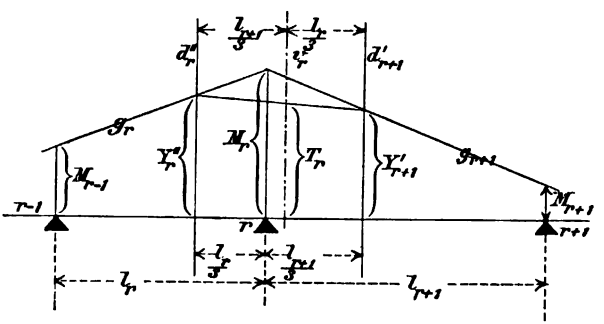


Fig. 375.

abschneidet. Die Verbindungslinie der oberen Endpunkte der Y_r'', Y_{r+1}' bestimmt auf der verschränkten Stützensenkrechten v_r, die von d_r'' den Abstand $\frac{l_{r+1}}{3}$ und von d_{r+1}' den Abstand $\frac{l_r}{3}$ hat, eine Strecke T_r, für

welche sich der Werth ergiebt

$$T_r = \frac{Y_r'' l_r + Y'_{r+1} l_{r+1}}{l_r + l_{r+1}} = \frac{(M_{r-1} + 2M_r) l_r + (2M_r + M_{r+1}) l_{r+1}}{3(l_r + l_{r+1})}$$

und man erhält daher den nur von der Belastung der beiden Oeffnungen l_r und l_{r+1} abhängigen Werth

$$T_r = \frac{N_r}{3(l_r + l_{r+1})}.$$

Kennt man also die Lage der Geraden g_r, so ist man im Stande, mit Hilfe von N_r die Lage der Geraden g_{r+1} anzugeben. Sind die beiden Oeffnungen unbelastet, so ist $T_r = 0$.

Wir setzen nun voraus, dass nur rechts von $r+1$ Lasten angreifen. Die Geraden g_r und g_{r+1} gehen dann nach Seite 390 durch die Festpunkte L_r und L_{r+1}. Da der Maassstab, in welchem die M aufgetragen werden, gleichgültig ist, so können wir, wenn der Festpunkt L_r gegeben ist, die Lage von L_{r+1} wie folgt finden. Wir legen

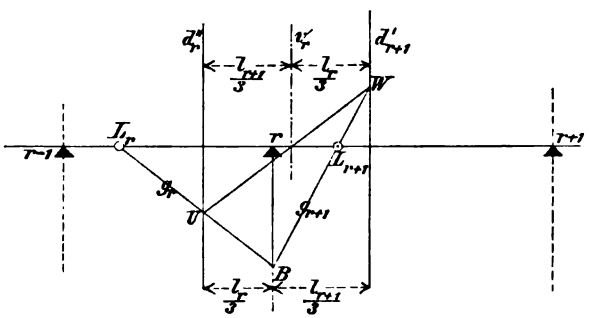


Fig. 376.

durch L_r die beliebige Gerade g_r und bringen sie mit d_r'' und der Senkrechten durch den Stützpunkt r in U und B zum Schnitt. Hierauf legen wir durch U und den Schnittpunkt der Geraden v_r und $r(r+1)$ eine Gerade, welche die d'_{r+1} in W trifft und ziehen die Gerade WB, sie schneidet die Achse $r(r+1)$ im Punkte L_{r+1}. Auf diese Weise kann man, von dem mit dem Stützpunkte 0 zusammenfallenden ersten Festpunkte L_1 ausgehend, alle Festpunkte L und dann ganz ebenso von Stütze n ausgehend alle Festpunkte R bestimmen.*)

*) Auch die in der Fig. 372 dargestellte Konstruktion der Stützenmomente mit Hilfe der Werthe T lässt sich leicht den vereinfachten Annahmen anpassen; die Senkrechten v spielen dieselbe Rolle wie die Senkrechten II in Fig. 371.

Sehr einfach gestaltet sich auch die Berechnung der Strecken a, b, a', b', in welche die Stützweiten l durch die Festpunkte zerlegt werden. Sind nämlich die Oeffnungen l_1 bis l_{r+1} unbelastet, so gelten die Gleichungen

$$2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = 0$$
$$M_1 l_2 + 2 M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M_{r-1} l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} = 0$$

und in diese ist einzusetzen:

$$M_{r-1} = - M_r \frac{a_r}{b_r}, \quad M_{r+1} = - M_r \frac{b_{r+1}}{a_{r+1}}.$$

Es ergiebt sich daher

$$- \frac{a_r}{b_r} l_r + 2 (l_r + l_{r+1}) - l_{r+1} \frac{b_{r+1}}{a_{r+1}} = 0$$

und man erhält die einfache Formel

$$\frac{a_{r+1}}{b_{r+1}} = \frac{l_{r+1}}{2 (l_r + l_{r+1}) - l_r \frac{a_r}{b_r}},$$

mit deren Hilfe man die Zahlen $\frac{a}{b}$ schrittweise berechnen kann. Aus der ersten Gleichung folgt

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{l_2}{2 (l_1 + l_2)}.$$

Sind die Festpunkte gefunden, so ermittelt man den Einfluss einer über der Oeffnung l_r ruhenden Last P auf die Momente M_{r-1} und M_r mit Hilfe der Gleichungen (17). Diese gehen jetzt über in

$$\begin{cases} \varkappa_r M_{r-1} + M_r = \dfrac{N_{r-1}}{l_r} = - P l_r \omega_D' \\ M_{r-1} + \varkappa_r' M_r = \dfrac{N_r}{l_r} = - P l_r \omega_D \end{cases}$$

und liefern, da $\varkappa_r = \frac{b_r}{a_r}$, $\varkappa_r' = \frac{b_r'}{a_r'}$ ist, mit der Bezeichnung

$$l_r - a_r - a_r' = c_r \text{ (Fig. 377)}$$

den Werth

$$M_r = - P \left(\frac{a_r' b_r}{c_r} \omega_D - \frac{a_r' a_r}{c_r} \omega_D' \right) = - P \frac{a_r'}{c_r} (b_r \omega_D - a_r \omega_D').$$

Errichtet man auf der Achse $(r-1)\,r$ im Punkte R_r das Loth $\overline{R_r R_r'} = a_r'$ und legt man durch L_r und R_r' eine Gerade, Fig. 377, so schneidet diese auf den Stützensenkrechten die Strecken

$$f_r = a_r' \frac{b_r}{c_r} \text{ und } v_r = a_r' \frac{a_r}{c_r}$$

ab und man erhält daher schliesslich den einfachen Werth

$$M_r = -P(f_r \omega_D - v_r \omega_D').$$

Und ganz ebenso findet man

$$M_{r-1} = -P(k_r \omega_D' - v_r \omega_D)$$

wo k_r die in Fig. 377 mit Hilfe der Geraden $L_r' R_r$ bestimmte Strecke bedeutet.

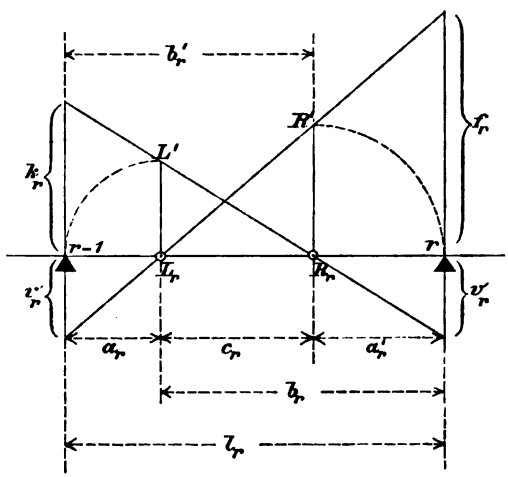


Fig. 377.

Zahlenbeispiel. Gesucht sind die Einflusslinien für die Stützenmomente des in der Figur 378 dargestellten Balkens.

$$l_1 = 21^m,\ l_2 = 33^m,\ l_3 = 30^m,\ l_4 = 24^m,\ l_5 = 21^m.$$

In Figur 378a sind, von L_1 aus, die Festpunkte L_2, L_3, L_4, L_5 und, von R_5 aus, die Festpunkte R_4, R_3, R_2, R_1 mit Hilfe des auf Seite 397 (Fig. 376) beschriebenen Verfahrens bestimmt worden. Sodann wurden in Fig. 378b die Strecken f, k und v ermittelt. Die Ergebnisse lauten:

für die erste Oeffnung $f_1 = 4{,}48^m$

für die zweite Oeffnung $\left\{ \begin{array}{l} k_2 = 11{,}03^m \\ f_2 = 10{,}17^m \end{array} \right\} v_2 = 3{,}10^m$

für die dritte Oeffnung $\left\{ \begin{array}{l} k_3 = 8{,}41^m \\ f_3 = 9{,}59^m \end{array} \right\} v_3 = 2.48^m$

für die vierte Oeffnung $\left\{ \begin{array}{l} k_4 = 6{,}14^m \\ f_4 = 6{,}83^m \end{array} \right\} v_4 = 1{,}64^m$

für die fünfte Oeffnung $k_5 = 5{,}24^m$.

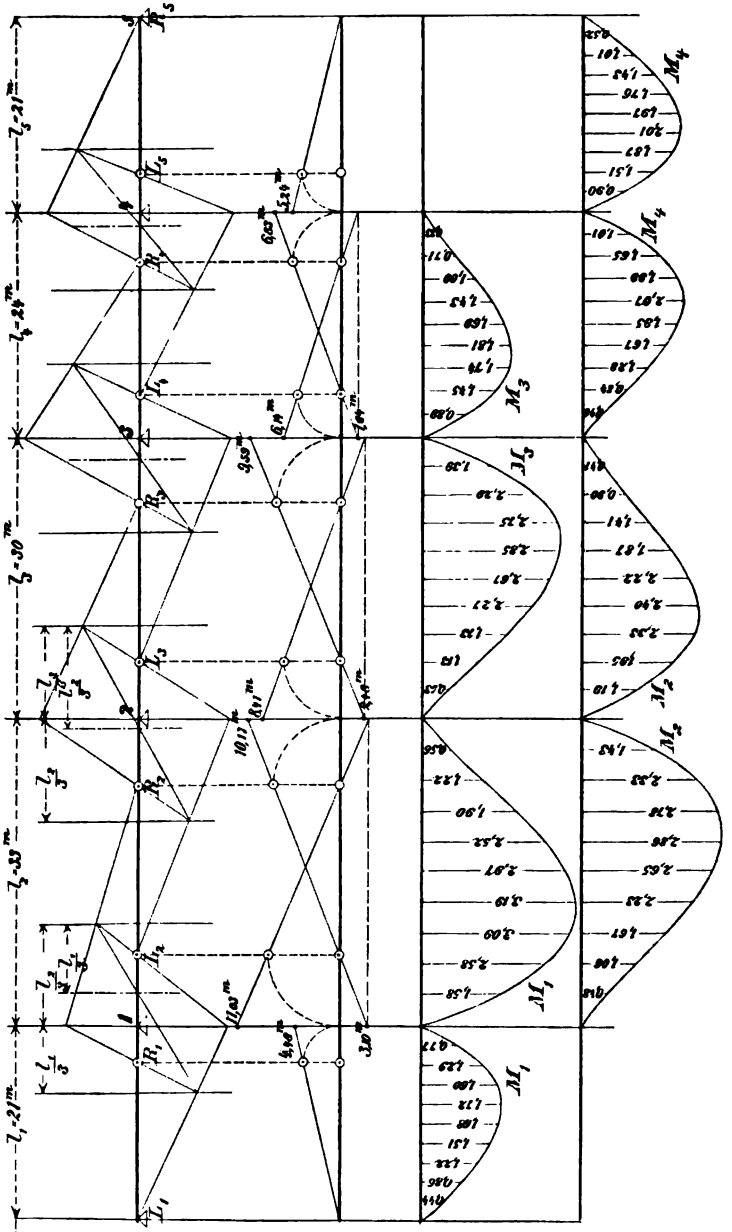


Fig. 378.

Von der Einflusslinie eines Stützenmomentes wurden nur die beiden Zweige gezeichnet, welche den durch den fraglichen Stützpunkt getrennten Oeffnungen angehören. Die Gleichungen dieser Linien sind:

M_1 | linker Zweig $M_1 = -\ 4{,}48\ \omega_D$
rechter Zweig $M_1 = -\ 11{,}03\ \omega_D' + 3{,}10\ \omega_D$

M_2 | linker Zweig $M_2 = -\ 10{,}17\ \omega_D + 3{,}10\ \omega_D'$
rechter Zweig $M_2 = -\ 8{,}41\ \omega_D' + 2{,}48\ \omega_D$

M_3 | linker Zweig $M_3 = -\ 9{,}59\ \omega_D + 2{,}48\ \omega_D'$
rechter Zweig $M_3 = -\ 6{,}14\ \omega_D' + 1{,}64\ \omega_D$

M_4 | linker Zweig $M_4 = -\ 6{,}83\ \omega_D + 1{,}64\ \omega_D'$
rechter Zweig $M_4 = -\ 5{,}24\ \omega_D'$

Mit Hilfe dieser Gleichungen und der Tabelle auf Seite 396 sind die Ordinaten für 9 Theilpunkte mittelst der *Crelle*'schen Rechentafel (Verlag von Reimer in Berlin) ermittelt worden. Das Verfahren führt ausserordentlich rasch zum Ziele.

161. Näherungsformeln für gleichförmige Belastung. Der Einfluss einer über der Oeffnung l_r stehenden Einzellast P auf das Glied N_r der Gleichung 25 auf Seite 395 ist

$$(35) \qquad N_r = -\,P l_r^2 \omega_D = -\,P l_r^2 \left(\frac{\xi}{l_r} - \frac{\xi^3}{l_r^3}\right)$$

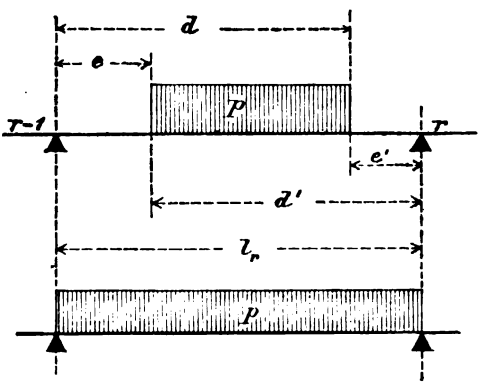


Fig. 379.

Fig. 380.

und es ergiebt sich daher für eine zwischen den Grenzen $\xi = e$ und $\xi = d$ (Fig. 379) aufgebrachte gleichmässige Belastung der Werth

$$N_r = -\,p l_r^2 \int_e^d \left(\frac{\xi}{l_r} - \frac{\xi^3}{l_r^3}\right) d\xi$$

$$(36) \qquad N_r = -\,\frac{p(d^2 - e^2)(2 l_r^2 - d^2 - e^2)}{4 l_r}$$

und ganz ebenso erhält man

$$(37) \qquad N_{r-1} = -\frac{p(d'^2 - e'^2)(2i_r^2 - d'^2 - e'^2)}{4\,l_r}.$$

Einer gleichförmigen Belastung der ganzen Oeffnung (Fig. 380) entspricht

$$(38) \qquad N_{r-1} = N_r = -\frac{p l_r^2}{4}.$$

Anmerkung. Die aus der Festigkeitslehre bekannten *Clapeyron'schen Gleichungen*

$$M_{r-1} l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} = N_r$$

gelten streng genommen nur für den vollwandigen Balken konstanten Querschnitts und sollen in der zweiten Abtheilung dieses Bandes noch ausführlicher behandelt werden. Sie liefern aber auch für Fachwerkträger mit parallelen oder leicht gekrümmten Gurtungen brauchbare Werthe und eignen sich daher besonders zur schnellen überschläglichen Berechnung der Querschnittsabmessungen in solchen Fällen, in denen eine genauere Berechnung der statisch unbestimmten Grössen unter Berücksichtigung der Längenänderungen sämmtlicher Stäbe beabsichtigt wird.

§ 15.

Verschiedene Arten statisch unbestimmter Bogen-, Balken- und Kettenbrücken.

162. Dreifach statisch unbestimmte Bogenbrücke mit drei Oeffnungen, Fig. 381 und 382. Als statisch unbestimmte Grössen werden zweckmässig die auf den Scheitelquerschnitt wirkenden Kräfte X_a, X_b, X_c eingeführt. Das statisch bestimmte Hauptsystem besteht dann aus zwei Auslegerbalken. Damit δ_{ab}, δ_{bc} und δ_{ca} gleich Null werden, ist nach der in No. 117 gegebenen Anweisung zu verfahren. Ein Zahlenbeispiel möge die Ermittlung der Einflusslinien für die Werthe X_a, X_b, X_c eines symmetrischen Trägers erläutern. Einem senkrechten X_b entspricht hier ein wagerechtes X_c. Bei der Berechnung der Gewichte w empfehlen sich im ersten Rechnungsgange (und nur dieser soll hier vorgeführt werden) dieselben Annahmen, wie beim Bogen mit eingespannten Kämpfern.

Wir setzen also für $m = 1$ bis 5 und $m = 7$ bis 13 nach Gleich. 3 auf Seite 325

$$(1) \qquad w_m = \frac{M_m^o + M_m^u}{h_m^2},$$

für $m = 6$ und $m = 14$

$$(2) \qquad w_6 = \frac{2\,M_6^o}{h_6^2} \text{ (weil zu 6 zwei Untergurtstäbe gehören)}$$

$$(3) \qquad w_{14} = \frac{2\,M_{14}^u}{h_{14}^2} \text{ („ „ 14 „ Obergurtstäbe „)}$$

und rechnen $\frac{1}{2} w_{14}$ zur linken und $\frac{1}{2} w_{14}$ zur rechten Trägerhälfte. Die zu diesen Gewichten w gehörigen Seillinien liefern die Durchbiegungen δ_{ma}, δ_{mb}, δ_{mc} in einem Maassstabe, der voraussetzt, dass $\frac{\lambda}{EF_s} = 1$ ist, wo F_s den mittleren Gurtquerschnitt im Scheitel der Brücke bedeutet;

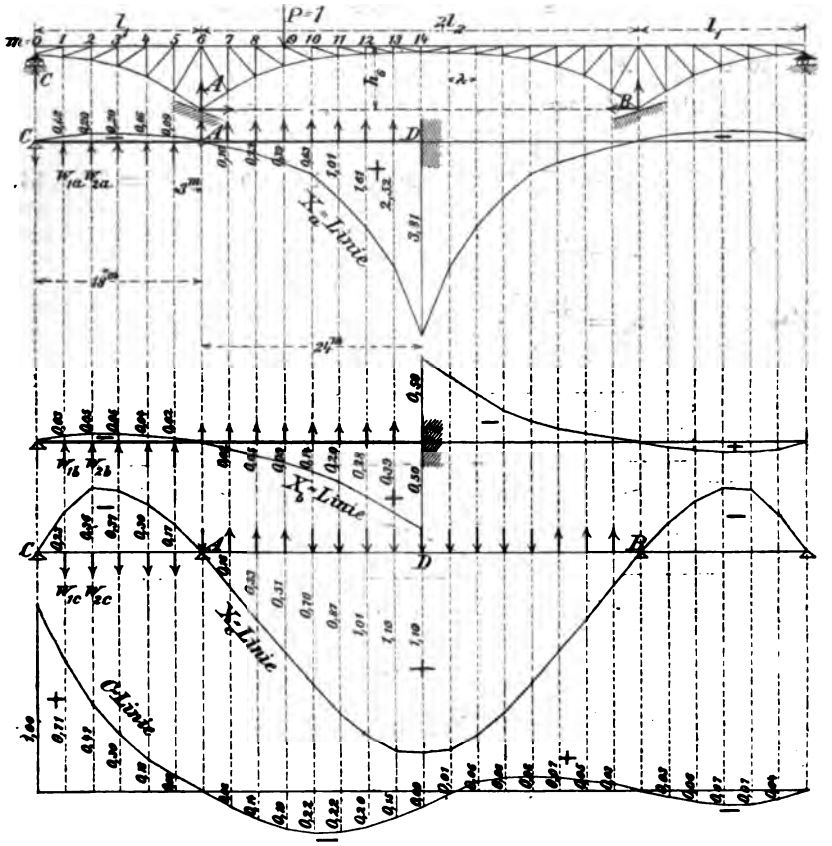


Fig. 331.

vergl. Seite 325. In die Formeln

$$(4) \qquad X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}},\ X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}},\ X_c = P_m \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}}$$

führen wir die Werthe ein

$$(5) \qquad \delta_{aa} = \frac{EF_s}{\lambda} \Sigma \frac{S_a^2 s}{EF},\ \delta_{bb} = \frac{EF_s}{\lambda} \Sigma \frac{S_b^2 s}{EF},\ \delta_{cc} = \frac{EF_s}{\lambda} \Sigma \frac{S_c^2 s}{EF}.$$

Da nun für einen Obergurtstab

$$\frac{S_a^2 s}{EF} = \frac{M_a^{u\,2}}{h^2}\frac{\lambda}{EF_o} = \frac{M_a^{u\,2}}{h^2}\frac{\lambda}{EF_o}$$

und für einen Untergurtstab

$$\frac{S_a^2 s}{EF} = \frac{M_a^{o\,2}}{h^2}\frac{\lambda \sec^2\gamma}{EF_u} = \frac{M_a^{o\,2}}{h^2}\frac{\lambda}{EF_o}$$

ist, so ergiebt sich

$$(6) \qquad \delta_{aa} = \Sigma z_{ma}, \quad \delta_{bb} = \Sigma z_{mb}, \quad \delta_{cc} = \Sigma z_{mc}$$

wo

$$(7) \qquad \begin{cases} z_m = \dfrac{M_m^{o\,2} + M_m^{u\,2}}{h_m^2} \text{ für } m = 1 \text{ bis } 5 \text{ und } m = 7 \text{ bis } 14, \\ z_6 = \dfrac{2\,M_6^{o\,2}}{h_6^2} \\ z_{14} = \dfrac{2\,M_{14}^{u\,2}}{h_{14}^2}. \end{cases}$$

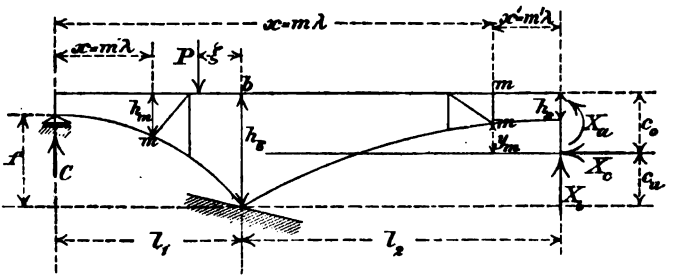


Fig. 382.

Dass δ_{ab} und δ_{bc} gleich Null sind, folgt ohne weiteres aus der Symmetrie. Die Bedingung

$$\delta_{ac} = \Sigma \frac{S_a S_c s}{EF} = 0$$

geht über in

$$\Sigma \frac{M_a M_c}{h^2} = 0$$

und lautet, mit Rücksicht auf die für $m = 6$ und $m = 14$ bestehenden Ausnahmen

$$(8) \qquad \Sigma\left(\frac{M_a^u M_c^u + M_a^o M_c^o}{h^2}\right)_m + 2\left(\frac{M_a^o M_c^o}{h^2}\right)_6 + \left(\frac{M_a^u M_c^u}{h^2}\right)_{14} = 0;$$

die Summe Σ umfasst $m = 1$ bis 5 und $m = 7$ bis 13.

Bei der Berechnung des Einflusses der Temperaturänderungen ist der weggehobene Werth $\frac{\lambda}{EF_s}$ wieder einzuführen. Man erhält

$$(9)\qquad \begin{cases} X_{at} = \dfrac{\delta_{at}}{\Sigma S_s^2 \dfrac{s}{EF}} = \dfrac{EF_s\delta_{at}}{\lambda \Sigma z_{ms}} \\ X_{ct} = \dfrac{EF_s\delta_{ct}}{\lambda \Sigma z_{ms}}. \end{cases}$$

X_{1t} wird, der Symmetrie wegen, gleich Null. Die Ermittlung der bei gleichmässiger Erwärmung entstehenden Verschiebungen δ_{at} und δ_{ct} soll zunächst an der allgemeineren Figur 383 erläutert werden. Man wähle das Kämpfergelenk O zum Pole eines *Williot*'schen Verschiebungsplanes und stelle die Längenänderungen

$$\Delta s_1 = \varepsilon t s_1,\ \Delta s_2 = \varepsilon t s_2,\ \Delta s_3 = \varepsilon t s_3$$

durch die Strecken s_1, s_2, s_3 dar. Man erhält dann die Verschiebung $O1'$ des wagerecht geführten Punktes 1, indem man in 1 auf $O1$ ein Loth errichtet und mit der Wagerechten durch O zum Schnitt bringt.

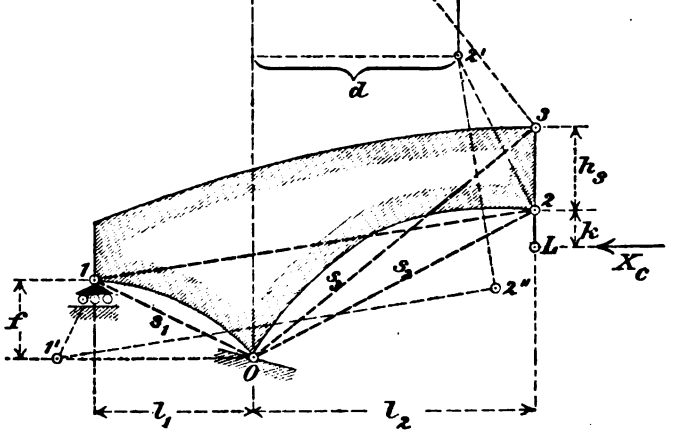


Fig. 383.

Macht man nun $\overline{1'2''} = \overline{12} \parallel \overline{12}$ und errichtet in $2''$ und 2 auf $1'2''$ und $O2$ Lothe, so treffen sich diese im Punkte $2'$. Von $2'$ aus trage man die senkrechte Strecke $\overline{2'3''} = \overline{23}$ an und bringe das in 3 auf $O3$ errichtete Loth mit der Wagerechten durch $3''$ in $3'$ zum Schnitt. Bezeichnet man dann die Strecken $3''3'$ und 23 mit e und h_3, so ergiebt

sich für den Winkel, um den sich die Scheitelvertikale dreht, der Werth $\psi = \frac{e}{h_e}$, und es drehen sich daher die nach No. 117 mit den Scheiteln der beiden Trägerhälften befestigt gedachten starren Scheiben gegeneinander um

$$\delta_{at} = -2\varepsilon t \frac{e}{h_e}.$$

Das Zeichen — ist zu nehmen, weil sich die Scheitelvertikale 2 — 3 nach links also im Sinne von X_a dreht, während δ_{at} im entgegengesetzten Sinne positiv gezählt wird wie X_a.

Die wagerechte Verschiebung des Punktes 2 wird durch das vom Punkte 2' auf die Senkrechte durch O gefällte Loth d dargestellt; sie ist also $= \varepsilon t d$, und die Verschiebung des Angriffspunktes L der Kraft X_e beträgt, wenn die Strecke $\overline{2L}$ mit k bezeichnet wird,

$$\varepsilon t(d + k\psi) = \varepsilon t\left(d + k\frac{e}{h_e}\right),$$

so dass sich schliesslich ergiebt

$$\delta_{et} = 2\varepsilon t\left(d + k\frac{e}{h}\right).$$

Liegen die Punkte 1 und 2 in einer Wagerechten, wie bei dem in Fig. 381 dargestellten Sonderfalle, so wird mit den aus Fig. 383 ersichtlichen Bezeichnungen:

$$(10) \qquad \delta_{at} = -2\varepsilon t\frac{f}{l_1}, \quad \delta_{et} = 2\varepsilon t\left(l_2 - \frac{f^2}{l_1}\right).$$

Einflusslinie für X_a. Im Belastungsfalle $X_a = -1$ entsteht am linken Endauflager ein abwärts gerichteter Widerstand $\frac{1}{l_1}$. Die Angriffsmomente sind

für die Seitenöffnung $M^u_{ma} = M^o_{ma} = -1\frac{x_m}{l_1}$

„ „ Mittelöffnung $M^u_{ma} = M^o_{ma} = -1.$

Berechnet man nun die Gewichte w_{ma} und Werthe z_{ma} nach den Formeln (1) bis (3) und (7) und dividirt diese Grössen durch den sich später hebenden Faktor 2, so erhält man

für $m = 1$ bis 5 $\quad w_{ma} = -\frac{x_m}{l_1}\frac{1}{h_m^2} = -\frac{m}{6h_m^2}; \quad z_{ma} = -\frac{1}{6} m w_{ma}$

für $m = 6$ bis 14 $\quad w_{ma} = -\frac{1}{h_m^2}; \quad z_{ma} = +\frac{1}{h_m^2}$

und für den ganzen Träger

$$(11) \qquad \delta_{aa} = \Sigma z_{ma} = -\frac{1}{3}\sum_1^5 m w_{ma} + 2\sum_6^{13}\frac{1}{h_m^2} + \frac{1}{h_{14}^2}.$$

Die Höhen h_m und Gewichte w_{ma} sind in den Tabellen I und II zusammengestellt worden. Die Berechnung der Trägerform ist in Band I, Seite 486, als

Beispiel zur Linienführung der Gurtungen gebracht worden. Für δ_{aa} ergiebt sich nach Gleich. 11 der Werth

$$\delta_{aa} = \frac{1}{3}\,0{,}908 + 2 \cdot 2{,}041 + 0{,}694 = 5{,}079.$$

Tabelle I Seitenöffnung.

m	h_m	h_m^2	$\frac{1}{h_m^2}$	$w_{ma} = -\frac{m}{6h_m^2}$	$-mw_a$	$w_{mb} = 8w_{ma}$	$w_{mc} = 2 \cdot 5{,}93\, w_{ma}$
0	1,20	1,44	0,694	0		0	0
1	1,33	1,77	0,565	— 0,094	0,094	— 0,75	— 1,11
2	1,75	3,06	0,327	— 0,109	0,218	— 0,87	— 1,23
3	2,51	6,30	0,159	— 0,079	0,237	— 0,63	— 0,94
4	3,64	13,2	0,076	— 0,051	0,204	— 0,41	— 0,60
5	5,19	26,9	0,037	— 0,031	0,155	— 0,25	— 0,37
					$-\sum_1^5 m w_a = 0{,}908$		

Tabelle II Mittelöffnung.

m	h_m	$\frac{1}{h_m}$	$-w_{ma} = \frac{1}{h_m^2}$	m'	$w_{mb} = m' w_{ma}$	$w_{mc} = \frac{2{,}54 - h_m}{h_m^2}$
6	7,20	0,139	0,019	8	— 0,15	+ 0,05[3])
7	5,19	0,193	0,037	7	— 0,26	— 0,10
8	3,75	0,267	0,071	6	— 0,43	— 0,09
9	2,74	0,365	0,133	5	— 0,67	— 0,03
10	2,07	0,483	0,233	4	— 0,93	+ 0,11
11	1,64	0,610	0,372	3	— 1,12	+ 0,33
12	1,38	0,725	0,526	2	— 1,05	+ 0,61
13	1,24	0,806	0,650	1	— 0,65	+ 0,85
14	1,20	0,833	0,694	0	0	+ 0,10[4])
		4,282[1])	2,041[2])			

[1]) $4{,}282 = \sum_7^{14} \frac{1}{h_m}$; [2]) $2{,}041 = \sum_6^{13} \frac{1}{h_m^2}$; [3]) $w_{6c} = 2\,\frac{c_c}{h_6^2} = 0{,}05$;

[4]) $w_{14c} = -\frac{2y_{14}}{h_{14}^2} = 0{,}10$.

Die δ_{ma}-Linie darf als die Momentenlinie eines mit den Gewichten w_a belasteten Balkens CAD aufgefasst werden, der bei C frei aufliegt, bei D eingespannt und bei A durch ein Gelenk unterbrochen ist. Für den mit w_{1a} bis w_{5a} belasteten Koppelträger CA erhält man in C und A die Stützendrücke*)

$$C = -\frac{0.09 \cdot 5 + 0.11 \cdot 4 + 0{,}08 \cdot 3 + 0.05 \cdot 2 + 0{,}03}{6} = -0{,}21$$

$$A = -0{,}15$$

*) Die Gewichte w wurden auf zwei Decimalstellen abgerundet.

ferner die Querkräfte

$Q_1 = -0{,}21$, $Q_2 = -0{,}21 + 0{,}09 = -0{,}12$, $Q_3 = -0{,}01$, $Q_4 = +0.07$,
$Q_5 = +0{,}12$, $Q_6 = +0{,}15$

und Werthe $M : \lambda$

$M_1 : \lambda = -0{,}21$, $M_2 : \lambda = -0{,}21 - 0{,}12 = -0{,}33$, $M_3 : \lambda = -0{,}34$,
$M_4 : \lambda = -0{,}27$, $M_5 : \lambda = -0{,}15$, $M_6 : \lambda = 0$.

Für den mit w_{6a} bis w_{13a} und ausserdem in A mit $-0{,}15$ belasteten Freiträger AD findet man

$Q_7 = 0{,}15 + 0{,}02 = 0{,}17$, $Q_8 = 0{,}17 + 0{,}04 = 0{,}21$, $Q_9 = 0{,}21 + 0{,}07 = 0{,}28$
$Q_{10} = 0{,}41$, $Q_{11} = 0{,}64$, $Q_{12} = 1{,}01$, $Q_{13} = 1.54$, $Q_{14} = 2{,}19$

ferner

$M_7 : \lambda = 0{,}17$, $M_8 : \lambda = 0{,}17 + 0{,}21 = 0{,}38$, $M_9 : \lambda = 0{,}38 + 0{,}28 = 0{,}66$,
$M_{10} : \lambda = 1{,}07$, $M_{11} : \lambda = 1{,}71$, $M_{12} : \lambda = 2{,}72$. $M_{13} : \lambda = 4{,}26$, $M_{14} : \lambda = 6{,}45$.

Nun erhält man

$$X_a = \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} = \frac{M}{\delta_{aa}} = \frac{M : \lambda}{\frac{1}{\lambda}\delta_{aa}} = 0.591 \frac{M}{\lambda}.$$

$X_{a1} = -0{,}124$	$X_{a7} = +0{,}100$	$X_{a11} = +1{,}011$
$X_{a2} = -0{,}195$	$X_{a8} = +0{,}225$	$X_{a12} = +1{,}608$
$X_{a3} = -0{,}201$	$X_{a9} = +0{,}390$	$X_{a13} = +2{,}518$
$X_{a4} = -0{,}160$	$X_{a10} = +0{,}682$	$X_{a14} = +3{,}812.$
$X_{a5} = -0{,}089$		

Einflusslinie für X_b. In Folge von $X_b = -1$ entsteht am linken Endauflager der abwärts gerichtete Stützenwiderstand $1 \frac{l_2}{l_1}$, weshalb

für die Seitenöffnung $M^o_{mb} = M^u_{mb} = -\frac{l_2}{l_1} x_m$

„ „ Mittelöffnung $M^o_{mb} = M^u_{mb} = -1 \cdot x'_m$.

Mit $x_m = m\lambda$ und $x'_m = m'\lambda$ ergeben sich also die Gewichte

$$w_{mb} = -2 \frac{l_2}{l_1} \frac{x_m}{h_m^2} = -2 \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{m}{h_m^2} \lambda$$

$$w_{mb} = -2 \frac{x'_m}{h_m^2} = -2 \frac{m'}{h_m^2} \lambda$$

und dafür nehmen wir

für die Seitenöffnung $w_{mb} = -8 \cdot \frac{m}{6 h_m^2} = 8 w_{ma}$

„ „ Mittelöffnung $w_{mb} = -\frac{m'}{h_m^2}$.

Die Berechnung von δ_{bb} ist überflüssig, da X_b in der Mitte des symmetrischen Trägers den Werth 0,5 hat. Man berechnet also genau wie vorhin die durch die Gewichte w_b hervorgerufenen Momente M und findet dann aus der Gleichung

$$\frac{X_{bm}}{X_{b14}} = \frac{M_m}{M_{14}}$$

$$X_{bm} = 0{,}5 \frac{M_m}{M_{14}}.$$

Auf diese Weise erhält man:

$X_{b1} = -0{,}030$	$X_{b7} = +0{,}024$	$X_{b11} = +0{,}200$
$X_{b2} = -0{,}047$	$X_{b8} = +0{,}052$	$X_{b12} = +0{,}284$
$X_{b3} = -0{,}048$	$X_{b9} = +0{,}089$	$X_{b13} = +0{,}386$
$X_{b4} = -0{,}038$	$X_{b10} = +0.136$	$X_{b14} = +0{,}500.$
$X_{b5} = -0{,}021$		

Für die rechte Trägerhälfte ergeben sich dieselben Ordinaten mit den entgegengesetzten Vorzeichen.

Ermittlung der Lage von X_c. Fig. 382. Am linken Endauflager wird durch die im Abstande c_u von den Kämpfern angreifende Belastung $X_c = -1$ der Widerstand $C = -1\frac{c_u}{l_1}$ hervorgerufen, und es ergiebt sich daher mit den aus der Figur 382 ersichtlichen Bezeichnungen

$$\text{für } m = 1 \text{ bis } 5 \quad M_c^u = M_c^o = -\frac{c_u x}{l_1} = -\frac{c_u m}{6}$$

$$\text{„ } m = 6 \text{ „ } 14 \quad M_c^o = +1 \cdot c_o$$

$$M_c^u = +1 \cdot y.$$

Da nun

$$\text{für } m = 1 \text{ bis } 5 \quad M_a^u = M_a^o = -1\frac{x}{l_1} = -\frac{m}{6}$$

$$\text{„ } m = 6 \text{ „ } 14 \quad M_a^u = M_a^o = -1$$

ist, so geht die Gleichung 8 auf Seite 404 über in

$$2\sum_1^5 \frac{m}{6}\frac{c_u m}{6 h_m^2} - \sum_7^{13}\frac{y^m}{h_m^2} - c_o\sum_7^{13}\frac{1}{h_m^2} - 2\frac{c_o}{h_6^2} - \frac{y_{14}}{h_{14}^2} = 0$$

und, wegen $y_m = c_o - h_m$, in

$$-\frac{1}{8}c_u\sum_1^5 m w_{ma} - c_o\left(2\sum_6^{13}\frac{1}{h_m^2} + \frac{1}{h_{14}^2}\right) + \sum_7^{14}\frac{1}{h_m} = 0.$$

Es folgt also, mit $c_u = h_6 - c_o = 7{,}2 - c_o$

$$(12) \qquad c_o = \frac{-\frac{h_6}{8}\sum_1^5 m w_{ma} + \sum_7^{14}\frac{1}{h_m}}{2\sum_6^{13}\frac{1}{h_m^2} + \frac{1}{h_{14}^2} - \frac{1}{8}\sum_1^5 m w_{ma}}$$

$$c_o = \frac{2{,}4 \cdot 0{,}908 + 4{,}282}{2 \cdot 2{,}041 + 0{,}694 + \frac{1}{8} \cdot 0{,}908} = 1{,}27^m$$

$$c_u = 7{,}2 - 1{,}27 = 5{,}93^m.$$

Einflusslinie für X_c. Setzt man die für M_c angegebenen Werthe in die Gleichung 1) 2) 3) und 7) ein, so erhält man mit $y_m = c_o - h_m = 1{,}27 - h_m$

$$\text{für } m = 1 \text{ bis } 5: \quad w_{mc} = -2\frac{c_u m}{6 h_m^2} = 2 c_u w_{ma} = 12{,}0\, w_{ma}$$

$$z_{mc} = 2\frac{c_u^2}{6^2}\frac{m^2}{h_m^2} = -\frac{1}{3}c_u^2 m w_{ma}$$

$$\text{für } m = 6 \qquad w_{6c} = 2\frac{c_o}{h_6^2}$$

$$z_{6c} = 2\frac{c_o^2}{h_6^2}$$

für $m = 7$ bis 13: $w_{mc} = \frac{c_c + y_m}{h_m^2} = \frac{2c_c - h_m}{h_m^2}$

$$z_{mc} = \frac{c_c^2 + y_m^2}{h_m^2} = 2\frac{c_c^2}{h_m^2} - 2\frac{c_c}{h_m} + 1$$

für $m = 14$ $\quad w_{14c} = 2\frac{y_{14}}{h_{14}^2} = 2\frac{c_c - h_{14}}{h_{14}^2}$

$$z_{14c} = 2\frac{y_{14}^2}{h_{14}^2} = 2\frac{c_c^2}{h_{14}^2} - 4\frac{c_c}{h_{14}} + 2$$

und es ergiebt sich daher für den ganzen Träger

$$\delta_{cc} = \Sigma z_{mc} = -\frac{2}{3}c_u^2 \sum_1^5 m w_{mc} + 4\frac{c_c^2}{h_6^2} + 2\sum_7^{13}\left(2\frac{c_c^2}{h_m^2} - 2\frac{c_c}{h_m} + 1\right) + 2\frac{c_c^2}{h_{14}^2} - 4\frac{c_c}{h_{14}} + 2$$

$$= -\frac{2}{3}c_u^2 \sum_1^5 m w_{mc} + 4c_c^2 \sum_6^{13}\frac{1}{h_m^2} + 2c_c^2\frac{1}{h_{14}^2} - 4c_c\sum_7^{14}\frac{1}{h_m} + 16$$

und, mit Beachtung von Formel 12:

$$\delta_{cc} = -\frac{2}{3}c_u h_6 \sum_1^5 m w_{mc} - 2c_c\sum_7^{14}\frac{1}{h_m} + 16 = 31.95.$$

Die δ_{mc}-Linie der Trägerstücke CA und AB darf als die Momentenlinie der mit den Gewichten w_c belasteten einfachen Balken CA und AB betrachtet werden. Es folgt dies daraus, dass $\delta_{ac} = 0$ ist, dass also die beiden Scheitelvertikalen (14) der das statisch bestimmte Hauptsystem bildenden Auslegerbalken sich im Belastungsfalle $X_c = -1$ nicht gegeneinander drehen und in senkrechter Richtung dieselben Verrückungen erfahren. Diese Eigenschaft kann auch zur Berechnung von c_c benutzt werden. Für den Querschnitt D, des mit den w_c belasteten einfachen Balkens AB ist nämlich das Biegungsmoment gleich dem statischen Momente der Gewichte $w_{7c}, w_{8c} \ldots w_{13c}$ und $\frac{1}{2}w_{14c}$, bezogen auf die Stütze A, d. i.

$$M_D = \sum_7^{13} w_{mc} m\lambda + \frac{1}{2}w_{14c} l_2$$

während sich für D als Querschnitt des Trägers CAD das Moment ergiebt

$$M_D = -l_2 \sum_1^5 w_{mc}\frac{x_m}{l_1} - \sum_6^{13} w_{mc} m'\lambda.$$

Setzt man diese beiden Werthe einander gleich, so findet man

$$+ l_2 \sum_1^5 w_{mc}\frac{m}{6} + w_{6c} l_2 + \sum_7^{13} w_{mc} m'\lambda + \sum_7^{13} w_{mc} m\lambda + \frac{1}{2}w_{14c} l_2 = 0$$

und, wegen $(m' + m)\lambda = l_2$, nach Einführung der w_c:

$$\frac{c_u}{3}\sum_1^5 m w_{mc} + 2\frac{c_c}{h_6^2} + \sum_7^{13}\frac{2c_c - h_m}{h_{m13}^2} + \frac{c_c - h_{14}}{h_{14}^2} = 0 \text{ oder}$$

$$-\frac{c_u}{3}\sum_1^5 m w_{mc} - c_c\left(2\sum_6^{13}\frac{1}{h_m^2} + \frac{1}{h_{14}^2}\right) + \sum_7^{14}\frac{1}{h_m} = 0$$

das ist dieselbe Gleichung, die auf Seite 409 auf anderem Wege gewonnen wurde.

Die Berechnung der Momente der Balken CA und AB liefert:

$M_1 : \lambda = -2{,}48$	$M_7 : \lambda = +1{,}73$	$M_{11} : \lambda = +9{,}27$
$M_2 : \lambda = -3{,}84$	$M_8 : \lambda = +3{,}56$	$M_{12} : \lambda = +10{,}78$
$M_3 : \lambda = -3{,}98$	$M_9 : \lambda = +5{,}48$	$M_{13} : \lambda = +11{,}68$
$M_4 : \lambda = -3{,}17$	$M_{10} : \lambda = +7{,}43$	$M_{14} : \lambda = +11{,}73$
$M_5 : \lambda = -1{,}77$		

und es ergiebt sich daher

$$X_c = \frac{M : \lambda}{\delta_{cc} : \lambda} = \frac{M : \lambda}{10.65} = 0{,}0939 \frac{M}{\lambda}.$$

$X_{c1} = -0{,}233$	$X_{c7} = +0{,}162$	$X_{c11} = +0{,}870$
$X_{c2} = -0{,}361$	$X_{c8} = +0{,}334$	$X_{c12} = +1{,}012$
$X_{c3} = -0{,}374$	$X_{c9} = +0{,}515$	$X_{c13} = +1{,}097$
$X_{c4} = -0{,}298$	$X_{c10} = +0{,}698$	$X_{c14} = +1{,}101.$
$X_{c5} = -0{,}166$		

Einflusslinie für den Widerstand C der linken Endstütze. Liegt die Last $P = 1$ im Abstande ξ von der Stütze A und wird ξ nach links positiv gerechnet, so folgt

$$Cl_1 = 1 \cdot \xi + X_b l_2 + X_a + X_c c_{11}$$

und hieraus

$$C = \frac{1}{18}(\xi + 24\, X_b + X_a + 5{,}93\, X_c).$$

Liegt P rechts von der Mitte des Trägers, so ist das Glied ξ zu streichen. Die mit Hilfe dieser Gleichung berechnete C-Linie ist in Fig. 381 dargestellt worden.

Die weitere Untersuchung der Mittelöffnung erfolgt nun nach dem im § 11 in dem Zahlenbeispiele angegebenen Verfahren. Man berechne der Reihe nach die Einflusslinien für

$$M^o_m, \quad \frac{M^o_m}{h_m} = U_{m+1} \cos \gamma_{m+1}, \quad O_m = -\frac{M^o_m}{h_m} - H$$

und

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M^o_m}{h_m} - \frac{M^o_{m-1}}{h_{m-1}}$$

und schliesslich die Einflusslinien für

$$V_m \operatorname{cotg} \varphi_{m+1} = -D_{m+1} \cos \varphi_{m+1} - P \operatorname{cotg} \varphi_{m+1}.$$

Die Seitenöffnung wird in derselben Weise untersucht wie die Seitenöffnung eines auf 4 Stützen ruhenden Balkens (Fig. 352, Seite 372); aus der C-Linie lassen sich hier die Einflusslinien für alle Stabkräfte schnell herleiten. Die Einflusslinie für die Vertikale über der Mittelstütze wird nach dem auf Seite 382 beschriebenen Verfahren bestimmt; man benutze die Gleichgewichtsbedingung für den oberen Knotenpunkt 6.

Der Einfluss einer gleichmässigen Erwärmung um 35° ist (für Flusseisen) abgerundet und auf Tonnen und Meter bezogen

$$X_{at} = -2 \frac{f}{l_1} \frac{\varepsilon E t F_o}{\lambda \delta_{aa}}$$

$$= -2 \frac{6{,}0}{18{,}0} \frac{250 \cdot 35 \cdot F_o}{3{,}0 \cdot 5{,}0} = -400\, F_o$$

$$X_{ct} = 2\left(l_2 - \frac{f^2}{l_1}\right)\frac{\varepsilon E t F_s}{\lambda \delta_{cc}}$$
$$= 2\left(24 - \frac{36}{18}\right)\frac{250 \cdot 35 F_s}{3 \cdot 32} = 4000 F_s.$$

Der Einfluss der Temperaturänderungen ist verhältnissmässig gross, und es empfiehlt sich daher stets die Anwendung der genaueren, die Formänderungen sämmtlicher Stäbe berücksichtigenden Formeln

$$X_{at} = \frac{\delta_{at}}{\Sigma S_a^2 \frac{s}{EF}},$$

$$X_{ct} = \frac{\delta_{ct}}{\Sigma S_c^2 \frac{s}{EF}}.$$

Ausser der gleichmässigen Erwärmung, welche

$$\delta_{at} = -2\frac{f}{l_1}\varepsilon t \text{ und } \delta_{ct} = 2\left(l_2 - \frac{f^2}{l_1}\right)\varepsilon t$$

liefert, prüfe man noch den Einfluss einer ungleichmässigen Erwärmung der beiden Gurtungen. Dann ist

$$\delta_{at} = \Sigma \varepsilon t S_a s \text{ und } \delta_{ct} = \Sigma \varepsilon t S_c s$$

zu setzen.

163. Der Balken auf 4 Stützen, der bereits im § 13 (Fig. 350) untersucht worden ist, kann auch auf dem in No. 162 eingeschlagenen Wege berechnet werden. Es ist $X_c = 0$.

164. Die zweifach statisch unbestimmte Bogenbrücke mit

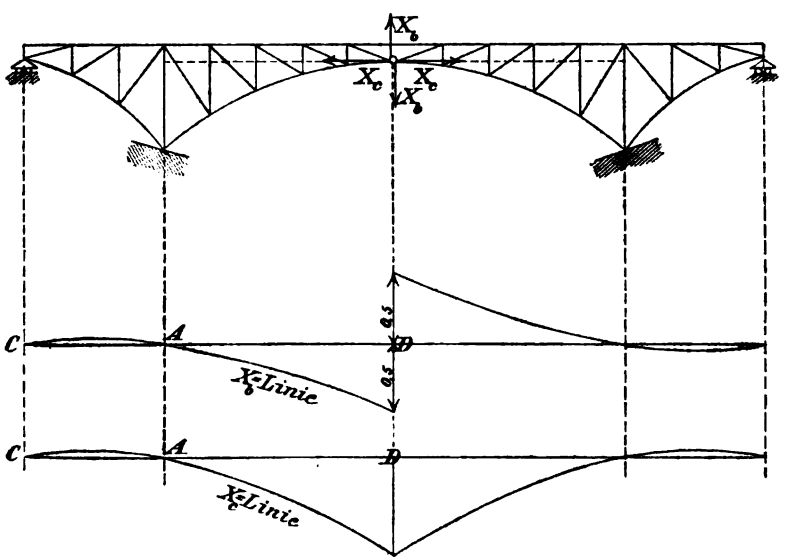


Fig. 364.

drei Oeffnungen, Fig. 384, wird in ähnlicher Weise untersucht wie der in No. 162 behandelte Träger. Es ist $X_c = 0$, und ausserdem ist der Angriffspunkt von X_b und X_c von vornherein gegeben.

165. Eingelenkbalken mit drei Oeffnungen, Fig. 385. Es

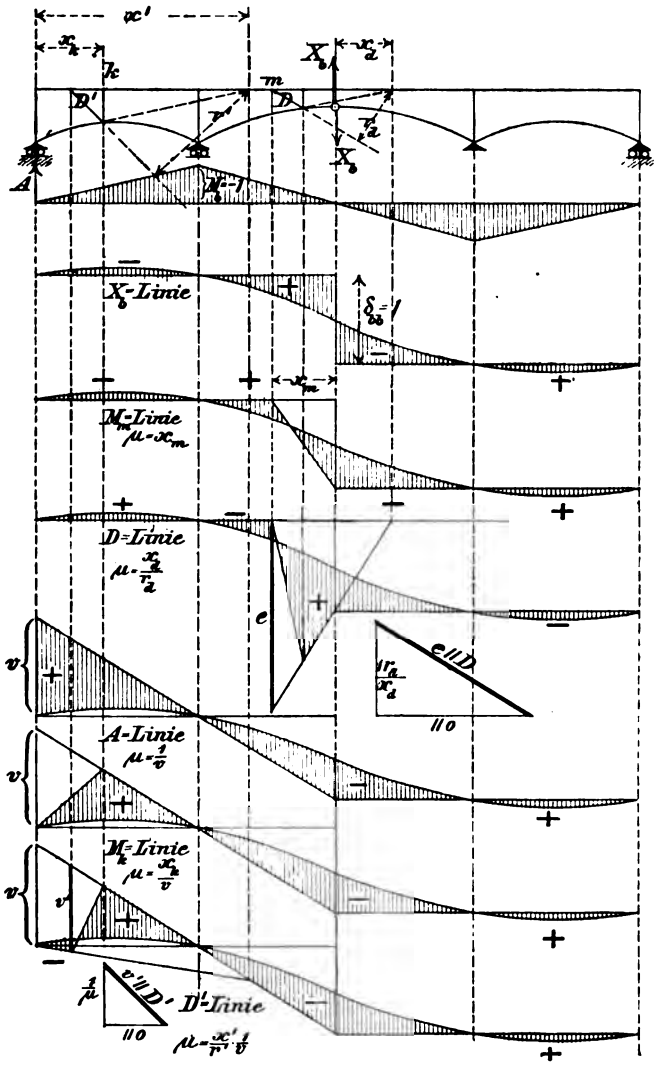


Fig. 385.

wird $X_c = 0$, und man erhält nach Zeichnung der Biegungslinie für $X_b = -1$ den Einfluss von P

$$X_b = P\frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}.$$

In den Figuren 385 sind aus der X_b-Linie die Einflusslinien für die Momente M_m und M_b, für den Stützenwiderstand A und die Spannkräfte D und D' hergeleitet worden. Der Kräftemaassstab ist $\delta_{bb} = P = 1$. Der Einfluss einer gleichmässigen Erwärmung ist entweder gleich Null oder (falls der Träger unsymmetrisch ist und die Auflager nicht in derselben Wagerechten liegen) unwesentlich. Ungleichmässige Erwärmung, z. B. Sonnenbestrahlung der oberen Gurtung, kann dagegen grössere Spannkräfte hervorbringen. Man berechne dann X_{bt} mittels der Formel

$$X_{bt} = \frac{\Sigma \varepsilon S_b t s}{\Sigma S_b^2 \frac{s}{EF}}$$

und berücksichtige die Längenänderungen sämmtlicher Stäbe.

166. Der Eingelenkbogen, Fig. 386. Das statisch bestimmte Hauptsystem besteht aus zwei Freiträgern; die Untersuchung dieses

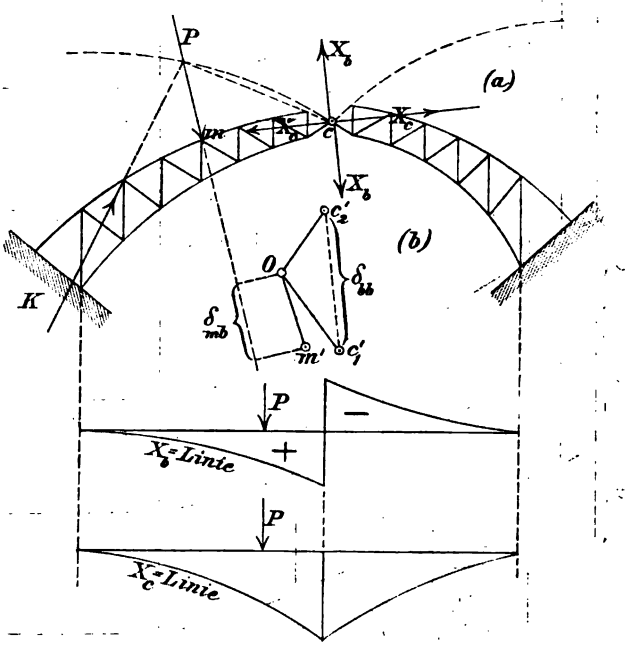


Fig. 386.

Trägers unterscheidet sich also von der im § 11, No. 116 durchgeführten nur dadurch, dass $X_a = 0$ ist und der Angriffspunkt von X_b

und X_c mit dem Scheitelgelenk zusammenfällt. Fig. 386 zeigt einen Theil des Verschiebungsplanes für $X_b = -1$. Die Strahlen Oc_1' und Oc_2' stellen die Verschiebungen dar, welche das Scheitelgelenk als Punkt des linken oder rechten Freiträgers erfährt. Om' ist die Verschiebung des Angriffspunktes m von P_m. Wählt man $X_c \perp \overline{c_1' c_2'}$, so ist

$$X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}.$$

Näherungsformeln. Für einen symmetrischen Bogen mit parabelförmigen Gurtungen lassen sich auf dem im § 11 unter *e*, Seite 350, eingeschlagenen Wege genügend genaue Formeln zur Berechnung der von senkrechten Lasten hervorgerufenen Kräfte X_b und X_c herleiten. Das Scheitelgelenk habe von der

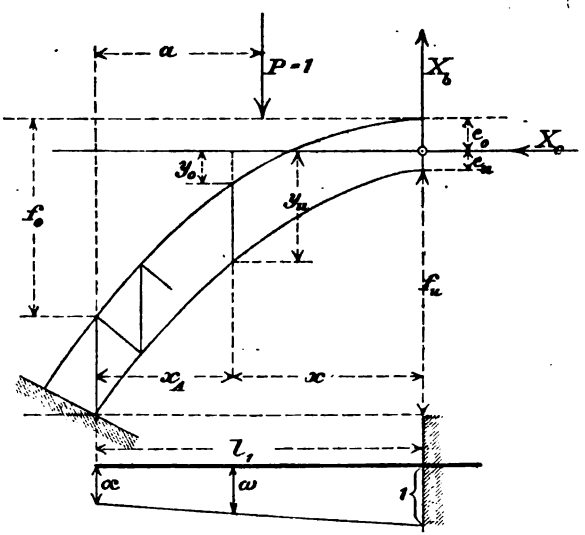


Fig. 387.

oberen Gurtung den Abstand e_o, von der unteren den Abstand e_u; bezüglich der übrigen Bezeichnungen verweisen wir auf Fig. 387 und auf die Untersuchung im § 11. Für X_b gilt die auf Seite 352 für $P=1$ abgeleitete Formel

$$X_b = \frac{1}{3\alpha+1} \frac{a^2}{l_1^2} \left[3\alpha + (1-2\alpha) \frac{a}{l_1} - 0{,}5\,(1-\alpha) \frac{a^2}{l_1^2} \right]$$

und für X_c erhält man (vergl. Seite 353)

$$X_c = \frac{M}{2 \int_0^{l_1} (y_o^2 + y_u^2)\, \omega\, dx}$$

wo

$$\omega = \alpha + (1-\alpha) \frac{x_A}{l_1}$$

und M durch die Gleichung erklärt wird

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \omega\,(y_o + y_u) = \omega\left[f_o\frac{x^2}{l_1^2} - e_o + f_u\frac{x^2}{l_1^2} + e_u\right]$$
$$= \left[\alpha + (1-\alpha)\frac{x_A}{l_1}\right]\left[\frac{f_o+f_u}{l_1^2}(l_1 - x_A)^2 + e_u - e_o\right].$$

Da M das Biegungsmoment eines an der Stelle $x_A = l_1$ eingespannten, durch die stetige Belastung ω beanspruchten Freiträgers ist, so sind die Integrationskonstanten der vorstehenden Differentialgleichung durch die Bedingungen bestimmt.

$$x_A = 0 \text{ muss liefern } \frac{dM}{dx_A} = 0$$
$$x_A = 0 \quad „ \quad „ \qquad M = 0.$$

Man erhält

$$M = \frac{(f_o+f_u)l_1^2}{60}\left[30\alpha + 10(1-3\alpha)\frac{x_A}{l_1} - 5(2-3\alpha)\frac{x_A^2}{l_1^2} + 3(1-\alpha)\frac{x_A^3}{l_1^3}\right]\frac{x_A^2}{l_1^2}$$
$$+ \frac{(e_u - e_o)l_1^2}{6}\left[3\alpha + (1-\alpha)\frac{x_A}{l_1}\right]\frac{x_A^2}{l_1^2},$$

ferner

$$2\int_0^{l_1}(y_o^2 + y_u^2)\,\omega\,dx = (f_o^2 + f_u^2)\,l_1\frac{1+5\alpha}{15} + l_1\,(f_u e_u - f_o e_o)\frac{1+3\alpha}{3}$$
$$+ l_1\,(e_u^2 + e_o^2)\,(1+\alpha).$$

Es ergiebt sich also schliesslich für eine an der Stelle $x_A = a$ liegende Last $P = 1$ der Werth

$$X_o = \frac{l_1}{k^2}\left[\frac{1}{2}(f_o + f_u)\,\gamma + 5\,(e_o - e_u)\,\gamma'\right]$$

wo $k^2 = 2\,(f_o^2 + f_u^2)\,(1+5\alpha) + 10\,(f_u e_u - f_o e_o)\,(1+3\alpha) + 30\,(e_u^2 + e_o^2)\,(1+\alpha)$

$$\gamma = \left[30\alpha + 10\,(1-3\alpha)\frac{a}{l_1} - 5\,(2-3\alpha)\frac{a^2}{l_1^2} + 3\,(1-\alpha)\frac{a^3}{l_1^3}\right]\frac{a^2}{l_1^2}$$
$$\gamma' = \left[3\alpha + (1-\alpha)\frac{a}{l_1}\right]\frac{a^2}{l_1^2}.$$

Der Einfluss einer gleichmässigen Erwärmung um $t°$ ist, wenn F_s den mittleren Gurtquerschnitt in der Nähe des Scheitels bedeutet, $X_{bt} = 0$ und

$$X_{ct} = \frac{2\,\varepsilon E t l_1 F_s h_s^2}{2\int_0^{l_1}(y_o^2 + y_u^2)\,\omega\,dx}$$

$$X_{ct} = \frac{60\,\varepsilon E t F_s h_s^2}{k^2}.$$

Sonderfall $e_o = e_u = \frac{1}{2}h_s$. Fig. 388.
$f_o = f - \frac{1}{2}(h_k - h_s)$
$f_u = f + \frac{1}{2}(h_k - h_s)$.

$$X_o = \frac{f l_1}{k_1^2}\frac{a^2}{l_1^2}\left[30\alpha + 10\,(1-3\alpha)\frac{a}{l_1} - 5\,(2-3\alpha)\frac{a^2}{l_1^2} + 3\,(1-\alpha)\frac{a^3}{l_1^3}\right]$$

wo

$$k_1^2 = 4f^2\,(1+5\alpha) + h_s^2\,(11+5\alpha) + h_s h_k\,(3+5\alpha) + h_k^2\,(1+5\alpha).$$

Der Einfluss einer gleichmässigen Erwärmung ist

$$X_{ct} = \frac{60\,\varepsilon E t F_s h_s^2}{k_1^2}.$$

Für $\alpha = 1$ erhält man

$$X_c = \frac{5 l_1}{24 f} \frac{a^2}{l_1^2} \left(6 - 4 \frac{a}{l_1} + \frac{a^2}{l_1^2}\right) \nu$$

$$X_{ct} = \frac{15}{6} \varepsilon E F_s t \frac{h_s^2}{f^2} \nu$$

wo

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{8 h_s^2 + 4 h_s h_k + 3 h_k^2}{12 f^2}}.$$

Hierzu gehört

$$X_b = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{l_1^2} \left(3 - \frac{a}{l_1}\right).$$

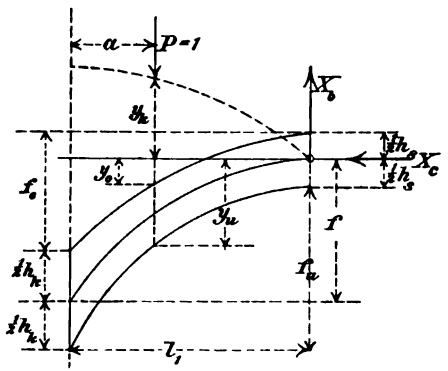


Fig. 388.

Für $\alpha = 0$ ergiebt sich

$$X_c = \frac{l_1}{4 f} \frac{a^2}{l_1^3} \left[10 - 10 \frac{a}{l_1} + 3 \frac{a^2}{l_1^2}\right] \nu$$

$$X_{ct} = 15 \varepsilon E F_s t \frac{h_s^2}{f^2} \nu$$

wo

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{11 h_s^2 + 3 h_s h_k + h_k^2}{4 f^2}}$$

Hierzu gehört

$$X_b = \frac{a^3}{l_1^3} \left(1 - 0{,}5 \frac{a}{l_1}\right).$$

Die folgende Tabelle enthält für die Grenzfälle $\alpha = 1$ und $\alpha = 0$ die Werthe X_b und $X_c \frac{f}{\nu l_1}$ sowie die Zahlen $\frac{y_k}{f} \nu$, wo y_k die Ordinate der durch die Gleichung

$$y_k = (l_1 - a) \frac{X_b}{X_c}$$

bestimmten Kämpferdrucklinie. Die Zahlen beweisen, dass der Einfluss von α recht erheblich ist. Da nun beim Eingelenkbogen die Steifigkeit vom Scheitel nach dem Kämpfer stärker zunimmt wie beim gelenklosen Bogen, so wird es sich empfehlen, bei der ersten Ueberschlagsrechnung α noch kleiner zu wählen als nach dem auf Seite 351 in der Fussnote gemachten Vorschlage. Den Einfluss der Temperaturänderung wird man auf jeden Fall noch einmal genauer mittels der Formel

$$X_{ct} = \frac{\varepsilon t l_1}{\Sigma S_c^2 \frac{s}{EF}}$$

berechnen, deren Nenner sich über die Stäbe der einen Bogenhälfte erstreckt.

$\frac{a}{l_1}$	X_b		$X_c \frac{f}{\nu l_1}$		$y_k \frac{\nu}{f}$	
	$\alpha = 1$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 0$
0,0	0	0	0	0	0,600	0,400
0,1	0,007	0,001	0,0117	0,0023	0,558	0,379
0,2	0,028	0,007	0,0437	0,0162	0,513	0,355
0,3	0,061	0,023	0,0917	0,0491	0,464	0,327
0,4	0,104	0,051	0,1520	0,1087	0,411	0,296
0,5	0.156	0,094	0,2214	0,1797	0,353	0,261
0,6	0,216	0,151	0,2970	0,2743	0,291	0,220
0,7	0,282	0,223	0,3767	0,3833	0,224	0,174
0,8	0,352	0,307	0,4587	0,5018	0,153	0.122
0,9	0,425	0,401	0,5417	0,6251	0,079	0.064
1,0	0,500	0,500	0,6250	0,7500	0	0

167. Dreifach statisch unbestimmte Kettenbrücke mit drei Oeffnungen. Fig. 389. Die Ketten CA_0, A_0B_0 und B_0D werden durch eine auf vier Stützpunkten ruhende gegliederte Scheibe versteift, und sind mit den Endpunkten dieser Scheibe befestigt. Die Verankerung der Kette wird also erspart und man kommt mit schwachen Widerlagern aus.*) Das ganze System besitzt nur ein festgehaltenes Auflagergelenk und drei in wagerechten Bahnen geführte Stützpunkte. Trennt man den Versteifungsbalken in der Mitte durch einen senkrechten Schnitt, Fig. 390, und bringt man (nach No. 117) an den Scheiben *I* und *II* die Kräfte X_a, X_b, X_c an, so besteht das statisch bestimmte Hauptsystem aus zwei Auslegerbalken, die durch die Kette miteinander verbunden sind. Den in Fig. 390 angenommenen wagerechten Verbindungsstab hat man sich unendlich klein zu denken. Bei

*) Dafür ist allerdings der Eisenverbrauch verhältnissmässig gross. Das System wirkt aber in ästethischer Beziehung recht vortheilhaft; es wurde von meinem ehemaligen Hörer, Herrn Diplom-Ingenieur *Eyde* bei der Mühlenthor-Brücke in Lübeck zur Ausführung gebracht. Vergl. die Mittheilungen über den Elbe-Trave-Kanal in der Zeitschrift d. Ver. deutsch. Ing. 1900.

unsymmetrischer Anordnung des Tragwerks wird die Erfüllung der Gleichungen

$$\delta_{ab} = 0, \quad \delta_{bc} = 0, \quad \delta_{ca} = 0$$

auf die in No. 117 beschriebene Weise herbeigeführt. Ist der Träger symmetrisch, so werden die beiden ersten Bedingungen durch ein senkrechtes X_b und ein wagerechtes X_c befriedigt. Der Abstand c der Kraft X_c vom Scheitel der Kette wird mittels der Gleichung

$$\delta_{ac} = \Sigma \frac{S_a S_c s}{EF} = 0$$

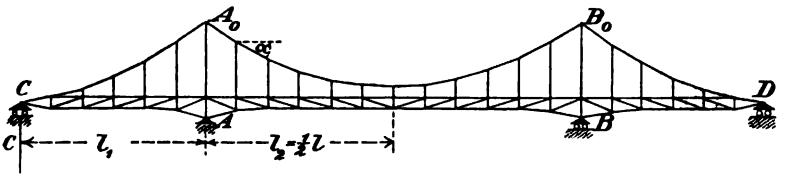


Fig. 389.

bestimmt. Der Gang der Rechnung ist derselbe wie in dem in No. 162 durchgeführten Zahlenbeispiele. In den Belastungsfällen $X_a = -1$ und $X_b = -1$ werden nur die Stäbe des Versteifungsbalkens beansprucht; die Kette, die Hängestangen und der Ständer $A_0 A$ bleiben spannungslos. Es sind also nur für den Einfluss von X_c neue Formeln aufzustellen.

Der Einfluss der statisch unbestimmten Grössen X auf den Widerstand C der Endstütze und auf die Momente M^o und M^u für die oberen und unteren Knotenpunkte des Versteifungsbalkens ist mit den in den Figuren 389 bis 391 angegebenen Bezeichnungen:

$$C = \frac{X_a}{l_1} + X_b \frac{l_2}{l_1} - X_c \frac{c}{l_1},$$

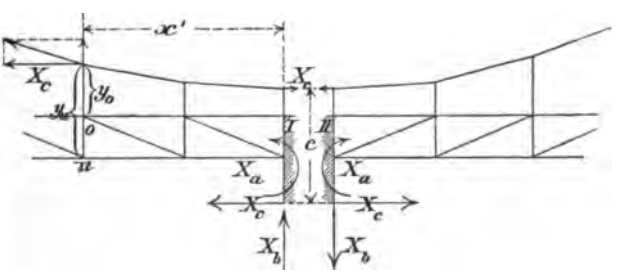


Fig. 390.

für die Seitenöffnung:

$$M^o = Cx + X_c y_o = X_a \frac{x}{l_1} + X_b \frac{x l_2}{l_1} - X_c \left(\frac{cx}{l_1} - y_o \right)$$

$$M^u = Cx + X_c y_u = X_a \frac{x}{l_1} + X_b \frac{x l_2}{l_1} - X_c \left(\frac{cx}{l_1} - y_u \right)$$

und für die Mittelöffnung

$$M^o = X_a + X_b x' - X_c (c - y_o)$$
$$M^u = X_a + X_b x' - X_c (c - y_u).$$

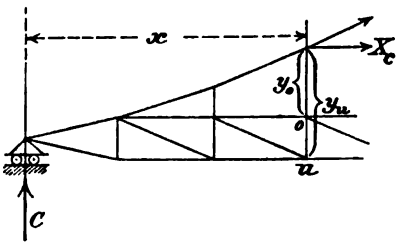


Fig. 391.

Näherungsformeln. Ist der Versteifungsbalken ein Parallelträger mit konstantem Gurtquerschnitte, so lassen sich einfache Näherungsformeln aufstellen, die auch im Falle schwach gekrümmter Gurtungen zur ersten Abschätzung der Querschnittsverhältnisse benutzt werden können. Die Endpunkte C der Kette sollen in der Mitte zwischen den beiden Gurtungen angenommen werden. Wir rechnen mit unendlich kleinen Feldweiten, setzen also

$$\delta_{aa} = \Sigma \frac{S_a^2 s}{EF} = \frac{1}{EFh^2} \int (M_a^{o2} + M_a^{u2})\, dx$$

und erhalten, da für die Seitenöffnung $M_a^o = M_a^u = -\frac{x}{l_1}$ und für die Mittelöffnung $M_a^o = M_a^u = -1$ ist

$$(1) \qquad EFh^2 \delta_{aa} = 4 \int_0^{l_1} \frac{x^2}{l_1^2}\, dx + 4 \int_0^{l_2} dx = \frac{4}{3} (l_1 + 3 l_2).$$

Nun ist weiter, für die Seitenöffnung $M_b^o = M_b^u = -\frac{x l_2}{l_1}$ und für die Mittelöffnung $M_b^o = M_b^u = -x'$

$$EFh^2 \delta_{bb} = \int (M_b^{o2} + M_b^{u2})\, dx = 4 \int_0^{l_1} \frac{x^2 l_2^2}{l_1^2}\, dx + 4 \int_0^{l_2} x'^2\, dx'$$

$$(2) \qquad EFh^2 \delta_{bb} = \frac{4}{3} l_2^2 (l_1 + l_2).$$

Zur Berechnung der Lage von X_a dient die Bedingung $\delta_{ac} = 0$, das ist

$$EFh^2 \delta_{ac} = \int (M_a^o M_c^o + M_a^u M_c^u)\, dx = 0.$$

Es genügt, diesen Werth für die Hälfte des symmetrischen Trägers zu berechnen. Für die Seitenöffnung ist

$$M_a^o M_c^o = -\frac{x}{l_1} \left(\frac{cx}{l_1} - y_o \right)$$
$$M_a^u M_c^u = -\frac{x}{l_1} \left(\frac{cx}{l_1} - y_u \right),$$

für die Mittelöffnung

$$M_o^o M_o^o = -1 \cdot (c - y_o)$$
$$M_o^u M_o^u = -1 \cdot (c - y_u)$$

und man erhält daher (wegen $y_o + y_u = 2y$) die Gleichung

$$(3) \qquad \int_0^{l_1} \frac{x}{l_1}\left(\frac{cx}{l_1} - y\right) dx + \int_0^{l_2} (c - y)\, dx = 0$$

und nach Ausführung der Integration *unter der Voraussetzung einer parabelförmigen Kette*

$$\tfrac{1}{3} l_1 (c - h_p + f_1) + l_2 (c - h_p + \tfrac{1}{2} f_2) = 0.^*)$$

Hieraus folgt die einfache Gleichung

$$(4) \qquad c = h_p - \frac{f_1 l_1 + 2 f_2 l_2}{l_1 + 3 l_2}.$$

Zu dem Werthe

$$\delta_{cc} = \Sigma \frac{S_c^2 s}{EF}$$

liefern auch die Ketten, die Hängestangen und die Ständer $A_0 A$ einen Beitrag. Es ist aber für unsere Zwecke zulässig, den Einfluss der Hängestangen und Ständer zu vernachlässigen und die Annahme $F_\alpha = F_k \sec \alpha$ zu machen, wo F_α den Querschnitt eines um α gegen die Wagerechte geneigten Kettengliedes und F_k den Querschnitt der Kette im Scheitel bedeutet. Der Zug in einem Kettengliede ist gleich $X_c \sec \alpha$; es ist also $S_c = -1 \cdot \sec \alpha$, und man erhält für den Beitrag der Kette zu dem Werthe $EFh^2\delta_{cc}$ nach Seite 268 für eine Seitenöffnung und die halbe Mittelöffnung den Ausdruck

$$(EFh^2\delta_{cc})_K = \frac{Fh^2}{F_k} \int_0^{l_1+l_2} dx \sec^2 \alpha = \frac{F}{F_k} h^2 \left[l_1 \left(1 + \frac{16}{8} \frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{h_p^2}{l_1^2}\right) + l_2 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_2^2}{4 l_2^2}\right)\right].$$

Für die linke Hälfte des Versteifungsbalkens ist der Beitrag zu $EFh^2\delta_{cc}$:

$$(EFh^2\delta_{cc})_B = \int_0^{l_1+l_2} (M_c^{o2} + M_c^{u2})\, dx,$$

wo für die Seitenöffnung

$$M_c^{o2} + M_c^{u2} = \left(\frac{cx}{l_1} - y + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{cx}{l_1} - y - \frac{h}{2}\right)^2$$
$$= 2c \frac{x}{l_1}\left(\frac{cx}{l_1} - y\right) + 2y^2 - 2c \frac{yx}{l_1} + \frac{h^2}{2},$$

---

*) Man beachte, dass $\int_0^{l_1} y x\, dx$ das auf die Senkrechte durch C bezogene statische Moment der Fläche ist, die von der Parabel CA_1, dem Ständer $A_0 A$ und der Balkenachse begrenzt wird; man erhält

$$\int_0^{l_1} y x\, dx = \frac{h_p l_1}{2} \cdot \frac{2 l_1}{3} - \frac{2}{8} f_1 l_1 \cdot \frac{l_1}{2}.$$

und für die Mittelöffnung

$$M_c^{o2} + M_c^{u2} = \left(c - y + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(c - y - \frac{h}{2}\right)^2$$
$$= 2c(c-y) + 2y^2 - 2cy + \frac{h^2}{2},$$

und es ergiebt sich daher mit Rücksicht auf Gleich. 8

$$(EFh^2\delta_{cc})_B = 2\int_0^{l_1} y^2 dx - 2\frac{c}{l_1}\int_0^{l_1} yx\,dx + 2\int_0^{l_2} y^2 dx - 2c\int_0^{l_2} y\,dx + \frac{h^2}{2}(l_1+l_2)$$
$$= 2\int_0^{l_1} y^2 dx + 2\int_0^{l_2} y^2 dx - \frac{2c^2(l_1+3l_2)^*)}{3} + \frac{h^2}{2}(l_1+l_2).$$

Da nun für die Seitenöffnung

$$y = h_p\frac{x}{l_1} - y'$$

ist und für die Mittelöffnung

$$y = h_p - y'',$$

so folgt mit Rücksicht auf Gleich. 4:

$$\int_0^{l_1} y^2 dx + \int_0^{l_2} y^2 dx = \frac{1}{3}h_p^2 l_1 - \frac{2}{3}h_p f_1 l_1 + \frac{8}{15}f_1^2 l_1 + h_p^2 l_2 - \frac{4}{3}h_p f_2 l_2 + \frac{8}{15}f_2^2 l_2$$
$$= \frac{1}{3}(l_1+3l_2)h_p(2c-h_p) + \frac{8}{15}(f_1^2 l_1 + f_2^2 l_2).$$

Mithin wird

$$(EFh^2\delta_{cc})_B = \frac{16}{15}(f_1^2 l_1 + f_2^2 l_2) - \frac{2}{3}(h_p - c)^2(l_1+3l_2) + \frac{1}{2}h^2(l_1+l_2)$$

und, da wir nur die Hälfte des Balkens berücksichtigt haben,

$$(5)\quad \frac{1}{2}EFh^2\delta_{cc} = \frac{16}{15}(f_1^2 l_1 + f_2^2 l_2) - \frac{2}{3}(h_p - c)^2(l_1+3l_2) + \frac{1}{2}h^2(l_1+l_2) + \frac{F}{F_b}h^2 s_o,$$

worin

$$s_o = l_1\left(1 + \frac{16}{3}\frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{h_p^2}{l_1^2}\right) + l_2\left(1 + \frac{16}{3}\frac{f_2^2}{4l_2^2}\right).$$

Nun lassen sich die Einflusslinien für die Grössen X_a, X_b und X_c sehr schnell ermitteln. Die Gewichte

$$w = \frac{M^o + M^u}{h^2}\frac{\lambda}{EF}$$

ersetzen wir wieder durch eine stetige Belastung

$$\omega = \frac{M^o + M^u}{h^2 EF},$$

multipliziren diese mit $\frac{1}{2}h^2EF$ und erhalten der Reihe nach für die Seiten-

*) Dieser Werth für die Summe des zweiten und vierten Gliedes der vorstehenden Gleichung folgt ohne weiteres aus Gleich. 3.

öffnung die folgenden Belastungsordinaten, die wir als Mittelwerthe von M^o und M^u mit M bezeichnet haben. Es sind dies gewissermassen die auf die Balkenachse bezogenen Momente

$$M_a = \frac{1}{2}(M_a^o + M_a^u) = -\frac{x}{l_1}$$

$$M_b = \frac{1}{2}(M_b^o + M_b^u) = -l_2\frac{x}{l_1}$$

$$M_c = \frac{1}{2}(M_c^o + M_c^u) = c\frac{x}{l_1} - y$$

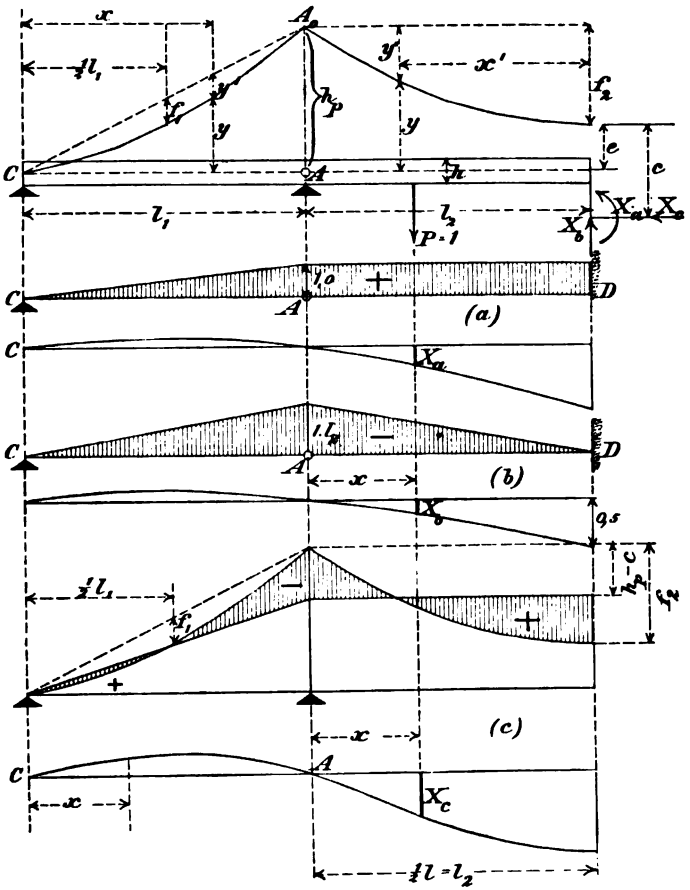


Fig. 392.

und für die Mittelöffnung

$$M_a = -1, \quad M_b = -1 \cdot x', \quad M_c = c - y.$$

Die so gewonnenen Belastungsflächen sind in den Figuren 392a, b, c durch Schraffirung hervorgehoben worden, die ihnen entsprechenden Momente geben durch

die entsprechenden Werthe $\frac{1}{2}EFh^2\delta_{aa}$, $\frac{1}{2}EFh^2\delta_{bb}$, $\frac{1}{2}EFh^2\delta_{cc}$ dividirt, die Ordinaten der Einflusslinien für X_a, X_b, X_c an. Bei der Berechnung von X_a und X_b handelt es sich um die Ermittlung der Momente für einen Balken CAD, der bei D eingespannt, bei C frei aufliegend ist und bei A ein Gelenk besitzt; während die Ordinaten der X_c-Linie sowohl über der Seitenöffnung als über der Mittelöffnung den Biegungsmomenten einfacher Balken CA und AB von den Stützweiten l_1 und $l = 2l_2$ proportional sind. Man vergl. auch das Zahlenbeispiel in No. 162. Da sich die Belastungsflächen aus Rechtecken, Dreiecken und Parabelabschnitten zusammensetzen, so können die in der Tabelle auf Seite 425 für zwanzig Theilpunkte der Stützweite berechneten Zahlen benutzt werden. Die Zeiger R, D, P weisen auf das Rechteck, das Dreieck und den Parabelabschnitt als Belastungsfläche hin; die grösste Belastungshöhe ist mit z bezeichnet. Durch die über der Tabelle stehenden Figuren und die darunter stehenden Formeln dürfte die Tabelle genügend erläutert sein.*) Die Anwendung dieses Verfahrens auf den vorliegenden Fall liefert für die Seitenöffnung die Gleichungen:

$$X_a = -\frac{\omega_D \cdot 1 \cdot l_1^2}{6 \cdot \frac{1}{2} EFh^2\delta_{aa}} = -\frac{l_1^2 \omega_D}{4(l_1 + 3l_2)}$$

$$X_b = -\frac{\omega_D l_2 l_1^2}{6\,\frac{1}{2} EFh^2\delta_{bb}} = -\frac{l_1^2 \omega_D}{4\,l_2\,(l_1 + l_2)}$$

$$X_c = \left[-\frac{\omega_D (h_p - c)}{6} + \omega_P' \frac{f_1}{3}\right] \frac{2\,l_1^2}{EFh^2\delta_{cc}}$$

wo $\frac{1}{2}EFh^2\delta_{cc}$ durch die Gleichung 5, bestimmt ist.

Um X_a für die Mittelöffnung zu berechnen, beachte man, dass der Koppelträger CA in Fig. 392a in A auf den Freiträger AD den Druck $\frac{2}{3} \cdot \frac{l_1}{2}$ ausübt. An der Stelle x des Freiträgers entsteht also

$$M = \frac{l_1}{3} x + \frac{x^2}{2}.$$

Dividirt man diesen Werth durch $\frac{1}{2}EFh^2\delta_{aa}$, so erhält man

$$X_a = \frac{x(2l_1 + 3x)}{4(l_1 + 3l_2)}$$

und ganz ebenso entwickelt man die Gleichung

$$X_b = \frac{l_2}{4(l_1 + l_2)} \left(2\frac{l_1}{l_2} + 3\frac{x}{l_2} - \frac{x^2}{l_2^2}\right) \frac{x}{l_2}.$$**)

Für die Mittelöffnung erhält man

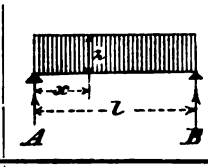
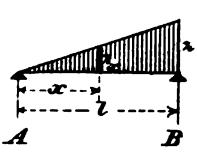
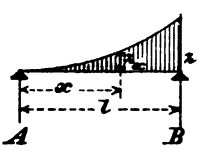
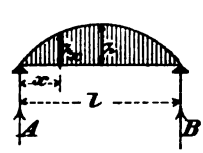
$$X_c = \left[\frac{\omega_P' f_2}{3} - \frac{\omega_E (h_p - c)}{2}\right] \frac{2 \cdot (2l_2)^2}{EFh^2\delta_{cc}}.$$

---

*) Die Zahlen ω_D haben wir bereits bei der Berechnung der durchlaufenden Balken auf Seite 396 benutzt.

**) Die für X_a und X_b gefundenen Gleichungen gelten auch für den Balken auf vier Stützen; die für X_b erhaltene auch für den in No. 165 untersuchten Eingelenkbalken.

Tabelle der Werthe ω_B, ω_D, ω_P, ω_P'.

				
		$z_x = z\frac{x}{l}$	$z_x = z\frac{x^2}{l^2}$	$z_x = \frac{4zx(l-x)}{l^2}$
	$A = B = \frac{zl}{2}$	$A = \frac{zl}{6} = \frac{B}{2}$	$A = \frac{zl}{12} = \frac{B}{3}$	$A = B = \frac{zl}{3}$
$M =$	$\omega_B \frac{zl^2}{2}$	$\omega_D \frac{zl^2}{6}$	$\omega_P \frac{zl^2}{12}$	$\omega_P' \frac{zl^2}{3}$
$\frac{x}{l}$	$\omega_B = \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}$	$\omega_D = \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}$	$\omega_P = \frac{x}{l} - \frac{x^4}{l^4}$	$\omega_P' = 2\omega_D - \omega_P$
0,05	0,0475	0,0499	0,0500	0,0498
0.10	0,0900	0,0990	0,0999	0,0981
0.15	0,1275	0,1466	0,1495	0,1438
0.20	0,1600	0,1920	0,1984	0,1856
0,25	0,1875	0,2344	0,2461	0,2227
0,30	0,2100	0,2730	0,2919	0,2541
0,35	0,2275	0,3071	0,3350	0,2793
0,40	0,2400	0,3360	0,3744	0,2976
0,45	0,2475	0,3589	0,4090	0,3089
0,50	0,2500	0,3750	0,4375	0,3125
0.55	0,2475	0,3836	0,4585	0,3089
0,60	0,2400	0,3840	0,4704	0,2976
0.65	0,2275	0,3754	0,4715	0,2793
0,70	0,2100	0,3570	0,4599	0,2541
0,75	0,1875	0,3281	0,4336	0,2227
0,80	0,1600	0,2880	0,3904	0,1856
0,85	0,1275	0,2359	0,3280	0,1438
0,90	0,0900	0,1710	0,2489	0,0981
0,95	0,0475	0,0926	0,1355	0,0498

Die Zahlenwerthe ω_P' und ω_B dieser Gleichung entsprechen der Stützweite $l = 2l_2$.

Ist z. B. $l_1 = l_2$ und $f_1 = f_2 \frac{l_1^2}{l^2} = \frac{1}{4} f_2$, so ergiebt sich

$$h_p - c = \frac{9}{16} f_2 = \frac{9}{4} f_1$$

und

$$\frac{1}{2} EFh^2 \frac{\delta_{cc}}{l_1} = \frac{139}{480} f_2^2 + h^2 + h^2 \frac{F}{F_k} \left(2 + \frac{5}{8} \frac{f_2^2}{l_2^2} + \frac{h_p^2}{l_2^2}\right).$$

Für $l_1 = l_2 = 82^m$, $f_2 = 8^m$, $f_1 = 2{,}0^m$, $h = 2{,}0^m$, $h_p = 10^m$ wird $h_p - c = 4{,}5^m$ und

$$\frac{1}{2} EFh^2 \frac{\delta_{cc}}{l_1} = 22{,}533 + 8{,}81 \frac{F}{F_k}$$

also für $F = 0{,}51\,F_k$, $\frac{1}{2}\frac{EFh^2\delta_{cc}}{l_1} = 27$

$F = 0{,}62\,F_k$, „ $= 28$

$F = 0{,}78\,F_k$, „ $= 29$

$F = 0{,}85\,F_k$, „ $= 30$.

Ist $F = 0{,}62\,F_k$, so ergiebt sich für die Seitenöffnung

$$X_c = \frac{32}{28}\left[-\omega_D \cdot \frac{4{,}5}{6} + \omega_P' \frac{2{,}0}{3}\right] = -\frac{18\,\omega_D + 16\,\omega_P'}{21}$$

und für die Mittelöffnung

$$X_c = \frac{4 \cdot 32}{28}\left[+\omega_P' \frac{8}{3} - \omega_R \frac{4{,}5}{2}\right]$$

$$X_c = \frac{256\,\omega'_P - 216\,\omega_R}{21}.$$

$X_a : l_1$ und X_b sind nur von dem Verhältniss $l_1 : l_2$ abhängig. Man erhält für $l_1 : l_2 = 1$

für die Seitenöffnung
$$\begin{cases} \frac{X_a}{l_1} = -\frac{\omega_D}{16} \\ X_b = -\frac{\omega_D}{8} \end{cases}$$

für die Mittelöffnung
$$\begin{cases} \frac{X_a}{l_1} = \frac{1}{16}\left(2 + 3\frac{x}{l_2}\right)\frac{x}{l_2} \\ X_b = \frac{1}{8}\left[\left(2 + 3\frac{x}{l_2}\right)\frac{x}{l_2} - \frac{x^3}{l_2^3}\right]. \end{cases}$$

Die hiernach berechneten Werthe sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden.

Seitenöffnung				Mittelöffnung				
$\frac{x}{l_1}$	X_a	X_b	X_c	$\frac{x}{l_1}$	X_a	X_b	$\frac{x}{l}$	X_c
0,2	— 0,384	— 0,024	— 0,043	0,2	+ 1,04	+ 0,064	0,1	+ 0,270
0,4	— 0,672	— 0,042	— 0,105	0,4	+ 2,56	+ 0,152	0,2	+ 0,617
0,6	— 0,768	— 0,048	— 0,146	0,6	+ 4,56	+ 0,258	0,3	+ 0,938
0,8	— 0,576	— 0,036	— 0,125	0,8	+ 7,04	+ 0,376	0,4	+ 1,159
				1,0	+ 10,00	+ 0,500	0,5	+ 1,238

Den Einfluss von Temperaturänderungen berechne man mit Hilfe der genaueren Formeln

$$X_{at} = \frac{\Sigma \varepsilon t S_a s}{\Sigma S_a^2 \frac{s}{EF}}, \quad X_{ct} = \frac{\Sigma \varepsilon t S_c s}{\Sigma S_c^2 \frac{s}{EF}}$$

und berücksichtige die Längenänderungen sämmtlicher Stäbe. X_{bt} wird $= 0$, weil der Träger symmetrisch ist. Die Lage von X_{ct} bestimme man mittels der Bedingung

$$\Sigma \frac{S_a S_c s}{EF} = 0.$$

Für den ersten Rechnungsgang empfiehlt sich die folgende Entwicklung. Man schreibe den Gliedern der Kette die Temperaturänderung t_k, der oberen Gurtung den Werth t_o und der unteren Gurtung den Werth t_u zu und lasse die Füllungsglieder, die Hängestangen und die Ständer $A_0 A$ ausser acht. Man erhält dann

$$\frac{1}{2}\delta_{at} = \sum_{o}^{l_1+l_2} S_a \varepsilon t s = \frac{\varepsilon t_u}{h}\int_o^{l_1+l_2} M_a^o dx - \frac{\varepsilon t_o}{h}\int_o^{l_1+l_2} M_a^u dx$$

und, wegen $M_a^o = M_a^u = M_a$,

$$\frac{1}{2}\delta_{at} = \frac{\varepsilon(t_u - t_o)}{h}\int_o^{l_1+l_2} M_a dx.$$

Das Integral stellt den Inhalt der in Figur 392a schraffirten M_a-Fläche dar, weshalb

$$\frac{1}{2}\delta_{at} = \frac{\varepsilon(t_u - t_o)}{h}\left(\frac{l_1}{2} + l_2\right)$$

und

$$X_{at} = 0{,}75\,\varepsilon E F (t_o - t_u)\frac{h(l_1 + 2l_2)}{l_1 + 3l_2}.$$

Weiter ist

$$\frac{1}{2}\delta_{ct} = \sum_{o}^{l_1+l_2} S_c \varepsilon t s = -\varepsilon t_k \sum_{o}^{l_1+l_2} s \sec\alpha + \frac{\varepsilon t_u}{h}\int_o^{l_1+l_2} M_c^o\, dx - \frac{\varepsilon t_o}{h}\int_o^{l_1+l_2} M_c^u\, dx,$$

und, wegen $M_c^o = M_c + \frac{1}{2}h$ und $M_c^u = M_c - \frac{1}{2}h$,

$$\frac{1}{2}\delta_{ct} = -\varepsilon t_k s_o + \frac{1}{2}\varepsilon(t_u + t_o)(l_1 + l_2) + \frac{\varepsilon(t_u - t_o)}{h}\int_o^{l_1+l_2} M_c dx.$$

Das Integral stellt den Inhalt der in Fig. 392c schraffirten M_c-Fläche dar, und man erhält daher

$$\frac{1}{2}\delta_{ct} = -\varepsilon t_k s_o + \frac{1}{2}\varepsilon(t_u + t_o)(l_1 + l_2) + \frac{\varepsilon(t_u - t_o)}{h}\left[\frac{2}{3}(f_1 l_1 + f_2 l_2) - (h_p - c)\left(\frac{l_1}{2} + l_2\right)\right].$$

Das letzte Glied darf als belanglos vernachlässigt werden; auch ist es zulässig, s_o durch $l_1 + l_2$ zu ersetzen; es handelt sich ja nur um eine Annäherung und die Einführung der Zahlenwerthe t_o und t_u beruht ohnehin auf einer ziemlich groben Schätzung.*) Man erhält also schliesslich

$$\frac{1}{2}\delta_{ct} = \varepsilon(t_u + t_o - 2t_k)\frac{l_1 + l_2}{2}$$

und

$$X_{et} = \frac{\delta_{ct}}{\delta_{ce}}.$$

*) In unserem Zahlenbeispiele würde die Summe der beiden letzten Glieder $= \frac{\varepsilon(28 t_u + 25 t_o)(l_1 + l_2)}{2 \cdot 24}$ sein, und dafür darf man setzen $\frac{1}{2}\varepsilon(t_u + t_o)(l_1 + l_2)$.

In unserem Zahlenbeispiele ist

$$l_1 = l_2,\ h = 2^m,\ \frac{1}{2} EFh^2 \frac{\delta_{cc}}{l_1} = 28$$

folglich (für Flusseisen und bezogen auf Tonnen und Meter)

$$X_{at} = \frac{9}{16} \varepsilon EF (t_o - t_u) h = \frac{9}{8} \cdot 250 (t_o - t_u) F$$

$$X_{at} = 281{,}25 (t_o - t_u) F$$

$$X_{ct} = \varepsilon EF (t_u + t_o - 2t_k) \frac{h^2}{28} = 250 F (t_u + t_o - 2t_u) \frac{1}{7}$$

$$X_{ct} = 36 (t_u + t_o - 2t_k) F.$$

Im Falle $t_o = t_u = t_k$ wird $X_{at} = 0$ und $X_{ct} = 0$.

Liegt die obere Gurtung oberhalb der Fahrbahn, so ist sie ebenso wie die Kette der Sonnenbestrahlung ausgesetzt. Setzt man für diesen Fall $t_u = 0$, $t_o = t_k = 15°$, so erhält man

$$X_{at} = 4200 F_o,\quad X_{ct} = -540 F_o$$

wo F_o einen mittleren Gurtquerschnitt bedeutet.

Da nun $c = 5{,}5^m$ und $h = 2{,}0^m$ ist, so entstehen in der Mittelöffnung die Gurtkräfte

$$U = \frac{M^o}{h} = +0{,}5 X_{at} - 0{,}5 X_{ct} (5{,}5 - y_o)$$

$$O = -\frac{M^u}{h} = -0{,}5 X_{at} + 0{,}5 X_{ct} (5{,}5 - y_u).$$

In der Mitte des Trägers ist $y_o = 1{,}0^m$, $y_u = 3{,}0^m$ also

$$U = +3200 F_o,\quad O = -2800 F_o.$$

Ueber der Mittelstütze ist $y_o = 9{,}0^m$, $y_u = 11{,}0^m$ und

$$U = +1200 F_o,\quad O = -600 F_o.$$

Wäre in der Mitte $F_o = 1{,}25 F_o$ und über der Mittelstütze $F_o = 2 F_o$, so würden sich an diesen Stellen in der oberen Gurtung die Spannungen

$$\sigma_o = \frac{2800}{1{,}25} \text{ t/qm} = 224 \text{ kg/qcm} \text{ und } \sigma_o = -\frac{600}{2{,}0} = -80 \text{ kg/qcm}$$

ergeben. Man erkennt, dass ungleichmässige Erwärmung ziemlich erhebliche Spannungen hervorbringt. Die genauere Rechnung liefert geringere Werthe, da δ_{aa} und δ_{cc} grösser ausfallen.

168. Zweifach statisch unbestimmter, durch einen Balken mit parallelen Gurtungen versteifter Stabbogen, Fig. 393. Im Bogen entsteht oberhalb des Versteifungsbalkens der Horizontalschub X_a, unterhalb des Balkens der Horizontalschub X_b. Bei starren Widerlagern lauten die Elasticitätsgleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} = P_m \delta_{ma} + \delta_{at} \\ X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb} = P_m \delta_{mb} + \delta_{bt}. \end{cases}$$

Im Belastungsfalle $X_a = -1$ bleiben die in Fig. 393a durch gestrichelte Linien dargestellten Stäbe spannungslos.

Der Einfluss der Längenänderungen der Diagonalen des Versteifungsbalkens auf die Grössen X_a und X_b ist leicht zu berücksichtigen. Es sollen daher die Gewichte w mittels der Formeln 6 und 7 auf Seite 105 berechnet werden.

Für einen $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\\text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Gurtstab von der Länge 2λ ergiebt sich

$$S_a = \mp \frac{y_m}{h}, \quad \Delta s_a = \mp \frac{y_m}{h} \frac{2\lambda}{EF},$$

und für eine $\left\{\begin{matrix}\text{linkssteigende}\\\text{rechtssteigende}\end{matrix}\right\}$ Diagonale

$$S_a = \pm \operatorname{tg} \alpha_m \frac{d}{h}, \quad \Delta s_a = \pm \operatorname{tg} \alpha_m \frac{d}{h} \frac{d}{EF_d},$$

wo F und F_d die konstant angenommenen Querschnitte der Gurtungen und Diagonalen bedeuten. In den Stäben des über dem Balken liegenden Bogens entstehen die Spannkräfte $S_a = -\sec \alpha_m$. Der Bogen habe im Scheitel den Querschnitt F_b; für den um α_m geneigten Stab des Bogens sei $F = F_b \sec \alpha$, so dass $\frac{S_a^2 s}{EF} = \frac{\sec^3 \alpha \lambda}{EF_b}$ wird.

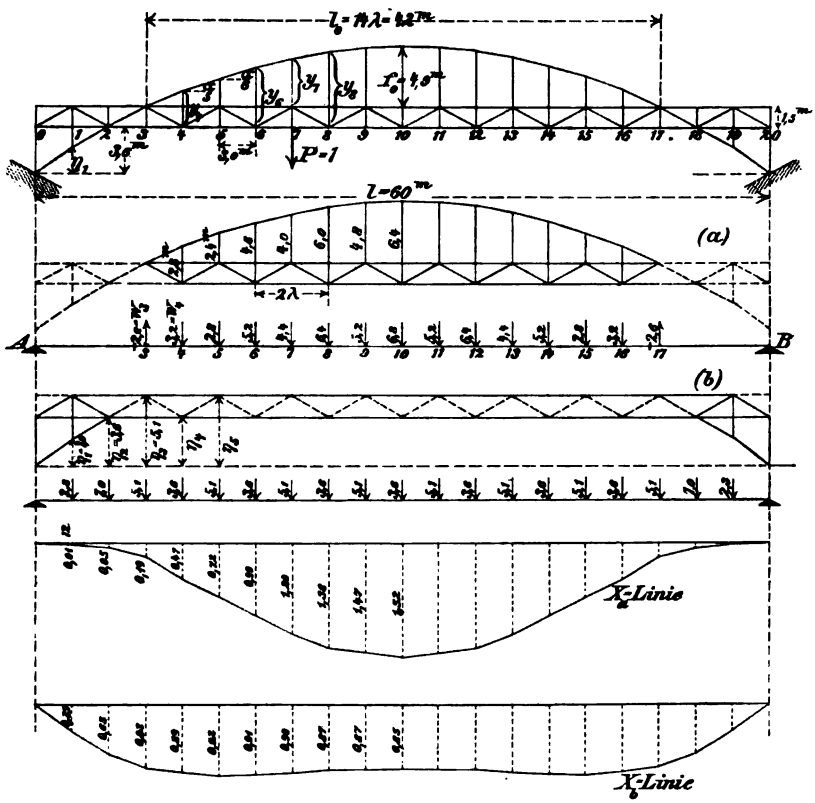


Fig. 393.

Man erhält nun nach Gleich. 6, Seite 105, für einen Knotenpunkt der unteren Gurtung

$$w_m = \frac{1}{h}\left[\frac{y_m}{h}\frac{2\lambda}{EF} + \left(\operatorname{tg}\alpha_m - \operatorname{tg}\alpha_{m+1}\right)\frac{d^2}{hEF_d}\frac{d}{\lambda}\right]$$

und nach Weglassung des konstanten Faktors $\frac{2\lambda}{h^2 EF}$

$$w_m = y_m + \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha_m - \operatorname{tg}\alpha_{m+1})\lambda \cdot \frac{F}{F_d}\frac{d^3}{\lambda^3}.$$

Zu demselben Ausdrucke führt die Gleich. 7, Seite 105, für einen Knotenpunkt der oberen Gurtung. Dem Knotenpunkte 3 entspricht

$$w_3 = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha_4 \lambda \frac{F}{F_d}\frac{d^3}{\lambda^3}.$$

Liegen die Knotenpunkte des Bogens in einer Parabel, was hier vorausgesetzt werden möge, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha_m - \operatorname{tg}\alpha_{m+1} = \frac{8 f_o \lambda}{l_o^2},$$

$$(2) \qquad \begin{cases} w_m = y_m + 4 f_o \dfrac{\lambda^2}{l_o^2}\dfrac{F}{F_d}\dfrac{d^3}{\lambda^3} \\ w_3 = -\dfrac{y_4 - h}{2}\cdot\dfrac{F}{F_d}\dfrac{d^3}{\lambda^3} = w_{17}. \end{cases}$$

Für δ_{aa} ergiebt sich der Werth

$$\delta_{aa} = \Sigma\frac{S_o^2 s}{EF} = \sum_4^{16}\frac{y_m^2}{h^2}\cdot\frac{2\lambda}{EF} + 2\sum_4^{10}\operatorname{tg}^2\alpha_m\frac{d^2}{h^2}\cdot\frac{d}{EF_d} + 2\sum_4^{10}\lambda\sec^2\alpha\frac{1}{EF_b},$$

und wenn (genügend genau)

$$2\sum_4^{10}\lambda\sec^2\alpha = l_o\left(1 + \frac{16}{3}\frac{f_o^2}{l_o^2}\right) = l_o{}^*)$$

gesetzt wird,

$$(3) \qquad \delta_{aa} = \frac{2\lambda^2}{EFh^2}\left[\frac{\sum_4^{16} y_m^2}{\lambda} + \lambda\sum_4^{10}\operatorname{tg}^2\alpha_m\frac{F}{F_d}\frac{d^3}{\lambda^3} + \frac{1}{2}l_o\frac{h^2}{\lambda^2}\frac{F}{F_b}\right].$$

Schätzen wir $F_d = 0{,}35\,F$ und $F_b = 2{,}5\,F$, so erhalten wir mit den in die Fig. 392 eingetragenen Abmessungen

$$4 f_o\frac{\lambda^2}{l_o^2} = 4\cdot 4{,}9\frac{1}{14^2} = \frac{1}{10},\quad \frac{F}{F_d}\cdot\frac{d^3}{\lambda^3} = \frac{1}{0{,}35}\cdot 1{,}40 = 4{,}0$$

$$w_m = y_m + 0{,}4$$

$$w_3 = w_{17} = 2{,}6.$$

$$\sum_4^{16} y_m^2 = 2(2{,}8^2 + 4{,}8^2 + 6{,}0^2) + 6{,}4^2 + 2(2{,}4^2 + 4{,}0^2 + 4{,}8^2) = 264{,}32$$

$$4\lambda\sum_4^{10}\operatorname{tg}^2\alpha_m = \frac{4}{3{,}0}(1{,}3^2 + 1{,}1^2 + 0{,}9^2 + 0{,}7^2 + 0{,}5^2 + 0{,}3^2 + 0{,}1^2) = 6{,}07$$

$$\delta_{aa} = \frac{2\lambda^2}{EFh^2}[88{,}11 + 6{,}07 + 2{,}10] = 96{,}3\frac{2\lambda^2}{EFh^2}.$$

Betrachtet man die Gewichte w als Lasten eines einfachen Balkens AB und berechnet die zugehörigen Biegungsmomente M_m' unter der Annahme $\lambda = 1$, so besteht zwischen den M_m' und den Durchbiegungen δ_{ma} die Beziehung

$$\delta_{ma} = \frac{2\lambda^2}{EFh^2}M_m'.$$

---

*) Vergl. Seite 249. Für unser Beispiel ist $1 + \frac{16}{3}\frac{f_o^2}{l_o^2} = 1.07$.

Für die Momente M_m' erhält man die folgenden Werthe

$M_1' = 28{,}0$	$M_5' = 142{,}0$	$M_8' = 201{,}0$
$M_2' = 56{,}0$	$M_6' = 166{,}6$	$M_9' = 209{,}6$
$M_3' = 84{,}0$	$M_7' = 186{,}0$	$M_{10}' = 213{,}0.$
$M_4' = 114{,}6$		

In Fig. 393b sind die im Belastungsfalle $X_b = -1$ spannungslos bleibenden Stäbe durch gestrichelte Linien dargestellt worden; der obere Bogen ist spannungslos und wurde weggelassen. Man erhält für einen $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\\text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Gurtstab von der Länge 2λ

$$S_b = \mp \frac{\eta_m}{h}, \qquad \Delta s_b = \mp \frac{\eta_m}{h} \frac{2\lambda}{EF},$$

für die Diagonalen der ersten beiden Felder

$$S_b = -\operatorname{tg}\alpha_1 \frac{d}{h}, \qquad \Delta s_b = -\operatorname{tg}\alpha_1 \frac{d^2}{hEF_d}$$

$$S_b = +\operatorname{tg}\alpha_2 \frac{d}{h}, \qquad \Delta s_b = +\operatorname{tg}\alpha_2 \frac{d^2}{hEF_d}$$

für den unteren Bogen

$$S_b = -\sec\alpha_m, \qquad \Delta s_b = -\sec\alpha_m \frac{\lambda}{EF_b}$$

und gelangt $\left(\text{nach Division der Gewichte } w \text{ mit } \frac{2\lambda}{EFh^2}\right)$ zu den Formeln

$$(4) \qquad \begin{cases} w_1 = \eta_1 + \dfrac{\lambda}{2}(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2)\dfrac{F}{F_d}\dfrac{d^2}{\lambda^2} = \eta_1 + 4f_0\dfrac{\lambda^2}{l_0^2}\dfrac{F}{F_d}\dfrac{d^2}{\lambda^2} = w_{19} \\ w_2 = \eta_2 + \dfrac{\lambda}{2}\operatorname{tg}\alpha_2\dfrac{F}{F_d}\dfrac{d^2}{\lambda^2} = w_{18} \\ w_m = \eta_m \text{ (gültig für } m = 3 \text{ bis } m = 17) \end{cases}$$

$$(5) \qquad \delta_{bb} = \frac{2\lambda^2}{EFh^2}\left[\frac{\sum_1^{19}\eta_m^2}{\lambda} + \lambda(\operatorname{tg}^2\alpha_1 + \operatorname{tg}^2\alpha_2)\frac{F}{F_d}\frac{d^2}{\lambda^2} + 2\lambda^*)\cdot\frac{h^2}{\lambda^2}\frac{F}{F_b}\right]$$

$$(6) \qquad \delta_{ab} = \sum S_a S_b \frac{s}{EF} = \sum_4^{16} y_m \eta_m \frac{2\lambda}{EFh^2}.$$

Die Einsetzung der Zahlenwerthe liefert

$$w_1 = w_{19} = \eta_1 + 0{,}4 = 2{,}3$$

$$w_2 = w_{18} = 3{,}6 + \frac{3{,}6 - 1{,}9}{2}\cdot 4 = 7{,}0$$

$$w_m = \eta_m$$

$$\sum_1^{19}\eta_m^2 = 2\cdot 1{,}9^2 + 9\cdot 3{,}6^2 + 8\cdot 5{,}1^2 = 331.94$$

$$\lambda(\operatorname{tg}^2\alpha_1 + \operatorname{tg}^2\alpha_2) = \frac{1{,}9^2 + 1{,}7^2}{3{,}0} = \frac{6{,}5}{3}$$

$$\sum_4^{16} y_m\eta_m = 3{,}6\,(2{,}8 + 4{,}8 + 6{,}0)\,2 + 3{,}6\cdot 6{,}4 + 5{,}1\,(2{,}4 + 4{,}0 + 4{,}8)\,2 = 235{,}20$$

$$\delta_{bb} = \frac{2\lambda^2}{EFh^2}[110{,}65 + 8{,}67 + 0{,}60] = 120\,\frac{2\lambda^2}{EFh^2}$$

$$\delta_{ab} = \frac{2\lambda^2}{EFh^2}\cdot 78{,}4.$$

---

*) An Stelle von $\frac{1}{2}l_0$ in Gleich. (3) setzen wir 2λ; rechnen also mit $\sec\alpha = 1$. Da $F : F_b$ ohnehin geschätzt werden muss, ist dies zulässig.

Die Momente M'' in Folge der Gewichte w sind für $\lambda = 1$

$M_1'' = 42{,}3$	$M_5'' = 167{,}5$	$M_8'' = 212.8$
$M_2'' = 82.3$	$M_6'' = 186{,}7$	$M_9'' = 219{,}7$
$M_3'' = 115{,}3$	$M_7'' = 202{,}3$	$M_{10}'' = 221{,}5$
$M_4'' = 143{,}2$		

Zwischen den Momenten M_m'' und den Durchbiegungen δ_{mb} besteht die Beziehung

$$\delta_{mb} = \frac{2\lambda^2}{EFh^2} M_m''.$$

Die Gleichungen (1) gehen also über in

$$96{,}3\, X_a + 78{,}4\, X_b = M_m' + \frac{EFh^2}{2\lambda^2}\delta_{ma}$$

$$78{,}4\, X_a + 120\, X_b = M_m'' + \frac{EFh^2}{2\lambda^2}\delta_b$$

sie liefern für den Einfluss der Last $P_m = 1$ die Werthe

$$(7) \qquad \begin{cases} X_a = 0{,}0222\, M_m' - 0{,}0145\, M_m'' \\ X_b = 0{,}0178\, M_m'' - 0{,}0145\, M_m' \end{cases}$$

und für den Einfluss der Temperaturänderungen die Werthe

$$\begin{cases} X_{at} = \dfrac{EFh^2}{2\lambda^2}(0{,}0222\,\delta_{at} - 0{,}0145\,\delta_{bt}) \\ X_{bt} = \dfrac{EFh^2}{2\lambda^2}(0{,}0178\,\delta_{bt} - 0{,}0145\,\delta_{at}) \end{cases}$$

Die mit Hilfe der Gleichungen (7) berechneten Ordinaten der Einflusslinien für X_a und X_b sind in die Figur 393 eingetragen worden.

Belastet man jeden Knotenpunkt mit $q\lambda$, so entsteht

$$X_a = 14{,}5\, q\lambda, \quad X_b = 15{,}2\, q\lambda.$$

Die Werthe $_{max}X_a$ und $_{max}X_b$ weichen also nur wenig von einander ab.

In Folge einer gleichmässigen Erwärmung findet man

$$\delta_{at} = \Sigma \varepsilon t S_a s = 0, \quad \delta_{bt} = \Sigma \varepsilon t S_b s = \varepsilon t l^*),$$

mithin

$$X_{at} = -\,0{,}0145\, \varepsilon E t F \frac{lh^2}{2\lambda^2}$$

$$X_{bt} = +\,0{,}0178\, \varepsilon E t F \frac{lh^2}{2\lambda^2}$$

und für $\varepsilon E = 250$ (Flusseisen) $t = 35°$, $l = 60^m$, $h : \lambda = \frac{1}{2}$

$$X_{at} = -\,950\, F$$
$$X_{bt} = +\,1160\, F.$$

Für den oberen Knotenpunkt 3 des Versteifungsbalkens erhält man das Angriffsmoment

$$M_{3t} = -\,1160\, F \cdot 5{,}1$$

und in dem gegenüberliegenden Gurtstabe die Spannkraft

$$U_t = -\frac{1160 \cdot 5{,}1}{1{,}5} F = -\,3940\, F.$$

---

*) Die Spannkräfte in den Vertikalen sind hierbei berücksichtigt worden. Man vergl. die Untersuchung von H_t auf Seite 199.

Wäre der Querschnitt dieses Gurtstabes zufällig gleich dem Mittelwerthe F, so würde in ihm in Folge der gleichmässigen Erwärmung die Spannung $\sigma = -394$ kg/qcm entstehen.

§ 16.

Beispiele für die Einführung eines statisch unbestimmten Hauptsystems.

169. Wird ein n-fach statisch unbestimmtes Fachwerk durch Beseitigung von k überzähligen Steifigkeitsbedingungen, denen die statisch unbestimmten Grössen X_a, X_b, . . . X_k entsprechen mögen, in ein $(n-k)$-fach statisch unbestimmtes System verwandelt, so bestehen zwischen den Grössen X die k-Gleichungen

$$\begin{aligned}
L_a + \delta_a - \delta_{at} &= \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - \ldots - X_k \delta_{ak} \\
L_b + \delta_b - \delta_{bt} &= \Sigma P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - \ldots - X_k \delta_{bk} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L_k + \delta_k - \delta_{kt} &= \Sigma P_m \delta_{mk} - X_a \delta_{ka} - X_b \delta_{kb} - \ldots - X_k \delta_{kk}
\end{aligned}$$

welche die Berechnung von X_a, X_b, . . . X_k gestatten, vorausgesetzt, dass die Grössen X_{k+1} bis X_n bereits bekannt sind. An die Stelle des statisch bestimmten Hauptsystems ist ein $(n-k)$-fach unbestimmtes System getreten. Dass diese Einführung eines unbestimmten Hauptsystems zuweilen sehr nützlich ist, wird die Lösung der folgenden Aufgaben zeigen.

170. Kettenbrücke über drei Oeffnungen mit durchlaufendem Versteifungsbalken und Rückhaltketten. Fig. 394. Es handele sich um den ersten Rechnungsgang, und es möge der Horizontalzug X_c der Kette in Folge einer Einzellast $P = 1$ und einer gleichmässigen Erwärmung unter der Voraussetzung bestimmt werden, dass für den Balken die in No. 160 (Seite 393) eingeführten Annahmen gemacht werden dürfen und der Querschnitt eines unter α gegen die Wagerechte geneigten Kettengliedes $F_\alpha = F_k \sec \alpha$ ist, wo F_k den Querschnitt der Kette im Scheitel bedeutet. Die ganz unwesentlichen Längenänderungen der Hängestangen sollen vernachlässigt werden. Die Kettenlinien seien durch stetig gekrümmte Parabeln ersetzt. Die Bezeichnungen sind aus der Figur zu ersehen; man achte darauf, dass für die Kette über der Seitenöffnung der auf die Sehne $D_0 B_0$ bezogene Pfeil mit f_0 und der zur Sehne $C_1 A_0$ gehörige mit f_k bezeichnet worden ist. Man begeht aber keinen wesentlichen Fehler, wenn man in den folgenden Formeln f_0 und l_0 durch f_1 und l_1 ersetzt.

Wäre die Kette durch drei Einzelbalken versteift (Fig. 299, Seite 291), so wäre das durch die Ursache $X_c = -1$ hervorgerufene

Angriffsmoment für irgend einen Knotenpunkt der oberen oder unteren Gurtung:

$$M^o = M^u = 1 \cdot y,$$

wo y die dem Knotenpunkte entsprechende Ordinate der Kette, bezogen auf den Sehnenzug $C_1 A_0 B_0 D_1$ bedeutet. Da nun aber der Versteifungsbalken ein durchlaufender ist, so tritt an die Stelle des Sehnenzuges $C_1 A_0 B_0 D_1$ der durch die Stützenmomente c bestimmte Linienzug $C_1 A_1 B_1 D_1$. Für die Strecke c ergiebt sich nach Gleich. 25, Seite 395, die Beziehung

$$2c(l_1 + l) + cl = N,$$

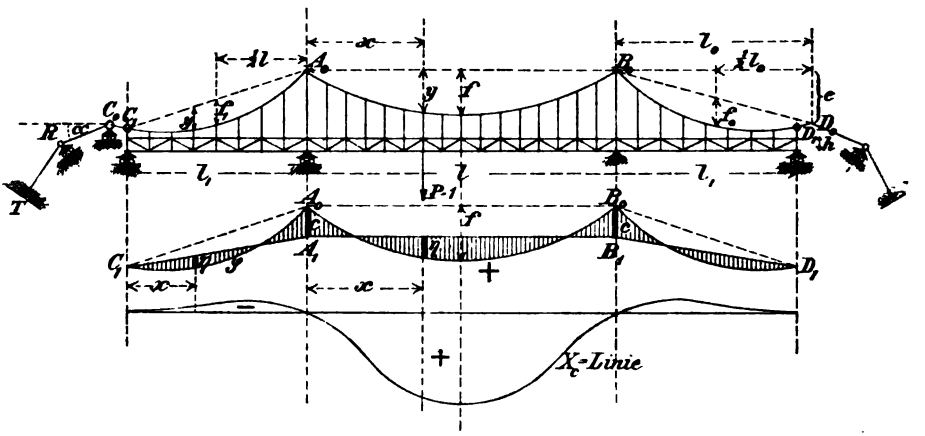


Fig. 394.

wo N nach Gleich. 38, Seite 402, für eine gleichförmige Belastung zu berechnen ist, die für die Längeneinheit der Seitenöffnung z_1 und der Mittelöffnung z beträgt, und durch die Gleichungen

$$1 \cdot f_1 = \frac{z_1 l_1^2}{8}, \quad 1 \cdot f = \frac{z l^2}{8}$$

bestimmt ist. Man erhält also

$$N = -\frac{z_1 l_1^3}{4} - \frac{z l^3}{4} = -2(f_1 l_1 + f l)$$

und absolut genommen,

$$(1) \qquad c = \frac{2(f_1 l_1 + f l)}{2 l_1 + 3 l}.$$

Damit sind die Momente

$$M_c^o = M_c^u = \eta$$

für den Belastungszustand $X_c = -1$ des statisch unbestimmten Hauptsystems gefunden, und die Berechnung von

$$X_c = P\frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}} + 1\,\frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}}$$

auf eine sehr einfache Aufgabe zurückgeführt. Bezeichnet man mit h die Höhe des Balkens und mit F den mittleren Gurtquerschnitt, so erhält man, mit Beachtung der Entwicklungen auf Seite 268,

$$\delta_{cc} = \int (M_c^{o\,2} + M_c^{u\,2})\frac{dx}{EFh^2} + \frac{1}{EF_k}\int dx \sec^2\alpha + \frac{2s'\sec\alpha'}{EF_k}$$

$$= \frac{2}{EFh^2}\left[2\int_0^{l_1}\eta^2 dx + \int_0^{l}\eta^2 dx\right] + \frac{s_o}{EF_k}$$

wo

$$(2)\qquad s_o = 2l_o\left(1 + \frac{16}{3}\frac{f_o^2}{l_o^2} + \frac{e^2}{l_o^2}\right) + l\left(1 + \frac{16}{3}\frac{f^2}{l^2}\right) + 2s'\sec\alpha'.$$

s' bedeutet die Länge einer Rückhaltkette $C_0R_0T_0$ und α' den Neigungswinkel des obersten Gliedes C_0R_0, vergl. Seite 169. Für die beiden Integrale ergeben sich die Werthe

$$\int_0^{l_1}\eta^2 dx = \int_0^{l_1}\left(y - c\frac{x}{l_1}\right)^2 dx = \frac{8}{15}f_1^2 l_1 - \frac{2cf_1 l_1}{3} + \frac{c^2 l_1}{3}$$

$$\int_0^{l}\eta^2 dx = \int_0^{l}(y-c)^2 dx = \frac{8}{15}f^2 l - \frac{4cfl}{3} + c^2 l$$

und es folgt schliesslich mit Beachtung von Gleich. (1) die Formel

$$(3)\qquad \frac{EFh^2}{2}\delta_{cc} = \frac{8}{15}(2f_1^2 l_1 + f^2 l) - \frac{c^2}{3}(2l_1 + 3l) + \frac{s_o h^2}{2}\frac{F}{F_k}.$$

Die δ_{mc}-Linie ist die Biegungslinie des Balkens für den Belastungszustand $X_c = -1$. Die endlichen Gewichte w_c ersetzen wir durch

$$dw_c = (M_c^o + M_c^u)\frac{dx}{EFh^2} = \frac{2\eta dx}{EFh^2}$$

und erhalten die Werthe $\frac{EFh^2}{2}\delta_{mc}$ als Ordinaten einer Seillinie die mit der Polweite 1 zu der in Fig. 394 schraffirte Belastnungsfläche gezeichnet ist. Wird die Polweite gleich $\frac{EFh^2}{2}\delta_{cc}$ gewählt, so ist die

Seillinie die Einflusslinie für X_c. Da die Belastungsfläche aus Dreiecken, Parabelabschnitten und einem Rechtecke besteht, führt die Rechnung ebenfalls schnell zum Ziele. Mit der Bezeichnung

$$(4) \qquad \frac{8}{15}(2f_1{}^2 l_1 + f^2 l) - \frac{c^2}{3}(2l_1 + 3l) + \frac{s_o h^2}{2}\frac{F}{F_k} = k^3$$

ergiebt sich für die Seitenöffnung, deren Belastungsfläche gleich dem Unterschiede des Parabelabschnittes $C_1 S A_0$ und des Dreiecks $C_1 A_0 A_1$ ist, nach der Tabelle auf Seite 425

$$(5) \qquad X_c = \frac{1}{k^3}\left(\frac{1}{3}\omega_P' f_1 l_1{}^2 - \frac{1}{6}\omega_D c l_1{}^2\right)$$

und für die Mittelöffnung

$$(6) \qquad X_c = \frac{1}{k^3}\left(\frac{1}{3}\omega_P' f l^2 - \frac{1}{2}\omega_R c l^2\right).$$

In Folge einer gleichmässigen Erwärmung um t entsteht

$$(7) \qquad X_{ct} = \frac{\varepsilon t \Sigma S_c s}{\delta_{cc}},$$

wo, für die obere bezw. untere Gurtung des Balkens

$$S_c = -\frac{M_c^u}{h}, \quad S_c = +\frac{M_c^o}{h}$$

und für die Kette

$$S_c = -1 \cdot \sec\alpha.$$

Da $M_c^u = M_c^o$ ist, wird für den Balken $\Sigma S_c s = 0$. Für die Kette ist $\Sigma S_c s = -s_o$, mithin

$$(8) \qquad X_{ct} = -\frac{\varepsilon E F t s_o h^2}{2k^3}.$$

Zahlenbeispiel. Es sei $l_1 = \frac{1}{2}l = 30^m$, $f_1 = \frac{1}{4}f = 2^m$, $e = 9^m$, $h = 1{,}5^m$, $s' = 12^m$, $\sec\alpha' = 1{,}05$. Dann ergiebt sich (wenn $l_o = l_1$ und $f_o = f_1$ gesetzt wird)

$$c = \frac{9}{4}f_1 = 4{,}5^m$$

$$\frac{s_o}{2l_1} = 2 + \frac{16}{3}\left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{16}{3}\left(\frac{2}{15}\right)^2 + \frac{12 \cdot 1{,}05}{30} = 2{,}63$$

$$k^3 = \frac{139}{30}\frac{f_1{}^2 l_1}{\nu} = 556\,\frac{1}{\nu}$$

wo

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{30}{139}\cdot\frac{s_o}{2l_1}\frac{h^2}{f_1{}^2}\frac{F'}{F^k}} = \frac{1}{1 + 0{,}32\,\frac{F}{F_k}}.$$

Man erhält also

für die Seitenöffnung $X_c = (1{,}079\,\omega_P' - 1{,}214\,\omega_D)\,\nu$

für die Mittelöffnung $X_c = (17{,}266\,\omega_P' - 14{,}568\,\omega_D)\,\nu$

und ist nun im Stande, die X_c-Linie mit Hilfe der auf Seite 425 stehenden Tabelle für verschiedene Werthe von ν schnell zu berechnen.

Die Angriffsmomente für den Versteifungsbalken sind

$$M^o = M^u = M_o - X_c \eta,$$

wo M_o das Moment für den nicht an der Kette hängenden, zweifach statisch unbestimmten durchlaufenden Balken bedeutet. Die Momente M_o werden am zweckmässigsten nach dem in No. 160 angegebenen Verfahren ermittelt; sie sind unabhängig von ν.

Gleichmässige Erwärmung erzeugt

$$X_{ct} = -\varepsilon E F_k t \frac{30}{139} \frac{s_o}{2 l_1} \frac{h^2}{f_1^2} \frac{F}{F_k} \nu$$

und dieser Ausdruck lässt sich umformen in

$$X_{ct} = -\varepsilon E F_k t\,(1 - \nu).$$

Für	$F : F_k =$	0,4	0.5	0,6	0,7
erhält man	$\nu =$	0,89	0,86	0,84	0,82
und mit	$\varepsilon E =$	250,	$t = 35°$		
	$-\frac{X_{ct}}{F_k} =$	963,	1225,	1400,	1575.

Den einzusetzenden Werth ν ermittle man mit Hilfe von Versuchsrechnungen. ν hängt u. A. von dem Verhältniss der ständigen Belastung zur Verkehrslast ab und ist für Kabelbrücken kleiner als für Kettenbrücken.

171. Ganz in derselben Weise wird das in Fig. 395 dargestellte Tragwerk untersucht. Der durchlaufende Balken ist nur in der Mittel-

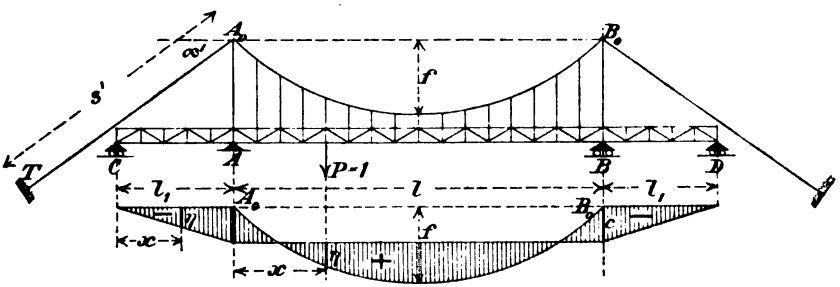


Fig. 395.

öffnung mit der Kette durch Hängestangen befestigt. Die Gleichung zur Berechnung von c lautet

$$2c(l_1 + l) + cl = -\frac{zl^3}{4} = -2fl$$

und liefert, absolut genommen,

$$(1) \qquad c = \frac{2fl}{2l_1 + 3l}.$$

Weiter wird

$$(2) \qquad s_o = l\left(1 + \frac{16}{8}\frac{f^2}{l^2}\right) + 2s' \sec \alpha'$$

wo s' die Länge einer Rückhaltkette $A_o T$ bedeutet.

Ueber der Seitenöffnung wird $\eta = c\frac{x}{l_1}$, mithin ist

$$\int_0^{l_1} \eta^2 dx = \frac{c^2 l_1}{3}$$

und

$$k^3 = \frac{EFh^2\delta_{cc}}{2} = \frac{2c^2 l_1}{3} + \frac{8}{15}f^2 l - \frac{4cfl}{3} + c^2 l + \frac{s_o h^2 F}{2F_h}$$

wofür man mit Rücksicht auf Gleich. 1 auch setzen darf

$$(3) \qquad k^3 = \frac{4}{15}f^2 l\,\frac{4l_1 + l}{2l_1 + 3l} + \frac{s_o h^2 F}{2F_h}.$$

Die Gleichung der X_o-Linie lautet

$$(4) \quad \begin{cases} \text{für die Seitenöffnung } X_o = -\frac{1}{6}\omega_D \frac{cl_1^2}{k^3} \\ \quad " \quad " \text{ Mittelöffnung } X_o = \frac{1}{k^3}\left(\frac{1}{8}\omega_P' f l^2 - \frac{1}{2}\omega_R c l^2\right). \end{cases}$$

Der Einfluss einer gleichmässigen Erwärmung um $t°$ ist

$$(5) \qquad X_{ot} = -\frac{\varepsilon EFt s_o h^2}{2k^3}.$$

Bei der Berechnung der Seitenöffnung achte man darauf, dass sich die Einflusslinien für sämmtliche Stabkräfte nach dem im § 18 beschriebenen Verfahren aus der Einflusslinie für den Widerstand C der Endstütze herleiten lassen; und diese Linie findet man mit Hilfe der Einflusslinie für das Stützenmoment.

172. Die Kettenbrücke über zwei Oeffnungen mit durchlaufendem Versteifungsbalken, Fig. 396, wird in derselben Weise behandelt. Die Strecke c ist bestimmt durch die Gleichung

$$(1) \qquad 2c(l + l) = -2fl - 2fl, \text{ woraus } c = -f.$$

Weiter erhält man

$$(2) \qquad s_o = 2l\left(1 + \frac{16}{8}\frac{f_o^2}{l_o^2} + \frac{e^2}{l_o^2}\right) + 2s' \sec \alpha'$$

$$2\int_0^l \eta^2 dx = 2\int_0^l \left(y - f\frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{2}{5}f^2 l$$

$$(3) \qquad k^3 = \frac{2}{5} f^2 l + \frac{s_o h^2 F}{2 F_k}$$

$$X_c = \frac{1}{k^3}\left(\frac{1}{3}\omega_P' f l^2 - \frac{1}{6}\omega_D f l^2\right)$$

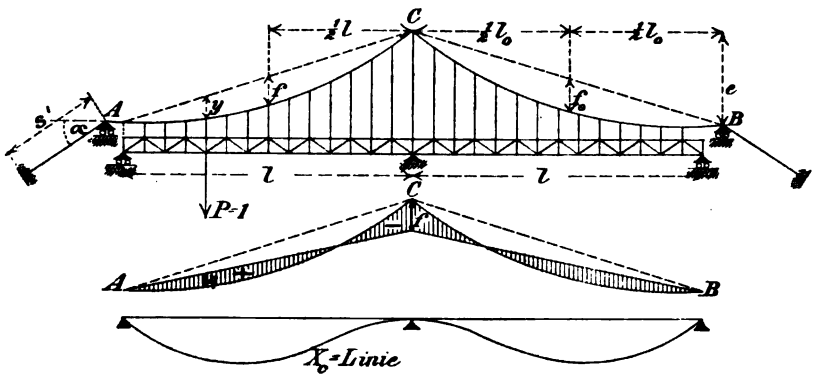


Fig. 396.

und dieser Werth lässt sich umformen in

$$(4) \qquad X_c = \frac{5}{12}\frac{l}{f}(2\omega_P' - \omega_D)\nu$$

wo

$$(5) \qquad \nu = -\frac{1}{1 + \frac{5}{4}\frac{s_o}{l}\frac{h^2}{f^2}\frac{F}{F_k}}.$$

Der Einfluss einer gleichmässigen Temperaturänderung um t^0 ist

$$(6) \qquad X_{ct} = -\varepsilon E F_k t (1 - \nu).$$

§ 17.

Aufgaben über statisch unbestimmte mehrtheilige Fachwerkbalken.

173. Im ersten Bande (No. 229 bis 230) haben wir die angenäherte Berechnung statisch unbestimmter mehrtheiliger Fachwerke nach dem zur Zeit fast allein üblichen Verfahren der Zerlegung in statisch bestimmte Theilsysteme gezeigt und bereits dort darauf hingewiesen, dass die genauere Berechnung nicht immer entbehrt werden kann, weil diese Zerlegung öfter zu wenig befriedigenden Ergebnissen führt. Es soll daher die strengere Untersuchung dieser in neuerer Zeit wieder mehr in den Vordergrund getretenen Systeme an zwei Beispielen erläutert

werden. Vorweg heben wir hervor, dass die Längenänderungen der Füllungsstäbe nicht vernachlässigt werden dürfen. Bei den vom Verfasser untersuchten mehrtheiligen Netzwerken lieferte eine zuerst auf Grund der Zerlegung in statisch bestimmte Theilsysteme durchgeführte Berechnung Stabquerschnitte, die sich zur Einführung in den genaueren Rechnungsgang eigneten. Denn es kommt bei der Aufstellung der Elasticitätsgleichungen nicht auf die Querschnittsinhalte selbst an, sondern nur auf das gegenseitige Verhältniss dieser Inhalte. Die Spannungszustände $X = -1$ sind namentlich für Netzwerke mit parallelen Gurtungen ganz ausserordentlich einfach, so dass die genaue Berechnung dieser Fachwerke keineswegs umständlicher ist, als die vieler anderer mehrfach statisch unbestimmter Systeme.

1. Untersuchung eines zweitheiligen Netzwerks mit gebrochenen Gurtungen.

Figuren auf Tafel 7.

174. Es soll der in Fig. 397 dargestellte Fachwerkträger untersucht werden. Stützweite 36^m, Höhe in der Mitte 6^m, an den Enden 2^m, Feldweite 3,6^m. Die Knotenpunkte der Gurtungen liegen in Parabeln. Der Träger ist *einfach* statisch unbestimmt. Als statisch nicht bestimmbare Grösse möge die Spannkraft X des Stabes ll' eingeführt werden.

Zuerst wurden in Fig. 400 die Spannkräfte (S_i) für den Zustand $X = -1$ ermittelt, und zu diesem Zwecke der Reihe nach die Kräftepolygone für die Knotenpunkte l, l', k, k', i, i', ... gezeichnet. Zugkräfte wurden blau, Drücke roth ausgezogen. Die Gurtkräfte wechseln von Fach zu Fach die Vorzeichen, ebenso die Spannkräfte in den Schrägstäben. Es genügte, die Stabkräfte der linken Trägerhälfte darzustellen; rechts von der Mitte ergeben sich dieselben Werthe, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die Ergebnisse wurden in die Figur 402 eingeschrieben (blaue Zahlen).

Die nächste Arbeit bestand in der Aufzeichnung der Biegungslinie für den Zustand $X = -1$. — Ist nämlich

δ_{ll} die gegenseitige Verschiebung des Punktpaares l, l' in Folge $X = -1$ und im Sinne $X = -1$,

δ_{ml} die Verschiebung des Angriffspunktes m einer Last P_m im Sinne von P_m und in Folge von $X = -1$,

so ist der Einfluss von P_m auf X:

$$(1) \qquad X = P_m \frac{\delta_{ml}}{\delta_{ll}}.$$

Wird also die Lasteinheit durch eine Strecke von der Länge δ_{ll} dargestellt, so erzeugt eine in m angreifende Last Eins im überzähligen Stabe die Spannkraft $X = \delta_{ml}$. Die fragliche Biegungslinie ist dann gleichbedeutend mit der X-Linie; ihre Ermittlung muss durch eine Querschnittsabschätzung eingeleitet werden, und zwar kommt es hierbei nur auf das gegenseitige Verhältniss der Stabquerschnitte an, weil in Gleich. (1) nur das Verhältniss zwischen zwei Ordinaten der Biegungslinie vorkommt. Aus demselben Grunde darf, falls E für sämmtliche Stäbe den gleichen Werth besitzt, was hier vorausgesetzt wird, $E = 1$ angenommen werden. Die Zahlen in der linken Hälfte der Figur 401 geben nun die Stablängen in dm an, in der rechten Hälfte die abgeschätzten Querschnittsverhältnisse und die rothen Zahlen in Figur 402 schliesslich die hiernach berechneten Längenänderungen der Stäbe für den Zustand $X = -1$. Beispielsweise entspricht einem Schrägstabe des dritten Faches:

$$\Delta s_l = -\frac{S_l s}{EF} = +\frac{0{,}50 \cdot 61}{1 \cdot 0{,}6} = +5{,}1.$$

Die Einheiten sind gleichgültig, da es sich nur um das Verhältniss $\delta_{ml} : \delta_{ll}$ handelt. Die Bestimmung der Biegungslinie erfolgte mit Hilfe eines Williotschen Verschiebungsplanes. Zuerst wurde Punkt a, und die Richtung des Stabes aa' festliegend angenommen und aa' gleich der Längenänderung $\Delta 0$ des Stabes 0 gemacht. An a und a' wurde b mit Hilfe von $\Delta 1$ und $\Delta 2$ angeschlossen, hierauf der in Bezug auf die Wagerechte durch die Mitte von aa' symmetrisch zu b liegende Punkt b' bestimmt, sodann c fest gelegt mittels $\Delta 3$ und $\Delta 4$, nunmehr c' symmetrisch zu c liegend gefunden u. s. w.*) Man vergleiche die ausführliche Beschreibung des Williotschen Verfahrens im § 1 und namentlich die Untersuchung in No. 34 (Fig. 39), in welcher die Herleitung der Biegungslinie aus dem Verschiebungsplane eingehend erörtert worden ist. In Figur 398 stellt die ausgezogene Zickzacklinie die Biegungslinie für den Fall *Fahrbahn unten* vor, die strichpunktirte für den Fall *Fahrbahn oben*, beide bezogen auf die Gerade al als Nullachse. Da im Verschiebungsplan der Punkt l' oberhalb l liegt (also ebenso wie im Fachwerke), so ist die gegenseitige Verschiebung δ_{ll} des Punktpaares l, l' positiv, und es entsprechen daher nach Gleichung (1) den positiven δ_{ml}, d. h. den abwärts gerichteten Verschiebungen, auch positive Werthe X. In Figur 398 sind die positiven und negativen Zweige der als X-Linien aufzufassenden Biegungslinien durch blaue

*) Die Hilfslinien sind mit Ausnahme der zur Bestimmung von a dienenden wieder weggelöscht worden. Der Maassstab wurde so gewählt, dass eine Längenänderung $\Delta s = 10$ durch eine Strecke von 5^{mm} Länge dargestellt wird.

bezieh. rothe Schraffirung besonders kenntlich gemacht. Da sich die Strecke $\delta_{ll} = 42{,}7^{mm}$ ergab, so ist der Maassstab für die X-Linien: $1' = 42{,}7^{mm}$.

Nach Aufzeichnung der X-Linien lassen sich die Einflusslinien für die übrigen Stabkräfte leicht bestimmen. Wir begnügen uns damit, die Untersuchung eines Füllungsstabes und eines Gurtstabes durchzuführen.

1. Ermittlung der Spannkraft D im Füllungsstabe $h'g$, Fig. 403. Bezeichnet D_0 den Werth von D für den Fall, dass das Fachwerk durch Beseitigung des Stabes ll' statisch bestimmt gemacht wird, so gilt für jeden Belastungszustand die Gleichung:

$$(2) \qquad D = D_0 - S_i X = D_0 + 0{,}43\, X.$$

Zur Bestimmung der D_0-Linie wurde das Band I No. 215 beschriebene Verfahren benutzt und zu diesem Zwecke das statisch bestimmte Hauptsystem durch Beseitigung des Stabes $h'g$ in eine zwangläufige kinematische Kette verwandelt. Es wurde zunächst die starre gegliederte Scheibe $aa'g'hga$ ruhend angenommen, dem Punkte h' eine Geschwindigkeit von vorläufig willkürlicher Grösse ertheilt und nun der Reihe nach die Geschwindigkeit von i, von i' u. s. w. nach dem Williot'schen Verfahren bestimmt. Die Punkte g, g', h des Geschwindigkeitsplanes Fig. 404[a] fallen mit dem Pole zusammen; $g'h'$ ist rechtwinklig zur Richtung des Stabes $g'h'$ ebenso $h'i \perp h'i$, $hi \perp hi$ u. s. w. Die ausgezogene Zickzacklinie in Fig. 404[b] liefert — bezogen auf die Nullachse la — die senkrechten Seitengeschwindigkeiten der Punkte der unteren Fachwerksgurtung, die strichpunktirte diejenigen der Punkte der oberen Gurtung. Entspricht dem Punkte i beispielsweise die Ordinate δ_i, und bezeichnet δ die Projektion der Geschwindigkeit $g'h'$ auf die Richtung des Füllungsstabes D, so ist der Einfluss einer in i angreifenden senkrechten Last 1^t auf die Spannkraft D_0 (nach dem Gesetz der virtuellen Verschiebungen): durch die Gleichung bestimmt:

$$D_0 \delta + 1 \cdot \delta_i = 0$$

und man erhält — für den Kräftemaassstab $1^t = \delta$ —

$$D_0 = -\delta_i.$$

Die beiden Linienzüge in Fig. 404[b] sind also die Einflusslinien für D_0, der ausgezogene für *Fahrbahn unten*, der strichpunktirte für *Fahrbahn oben*. Rechts von g, g' fallen beide Einflusslinien zusammen. Die positiven und negativen Zweige dieser Linien wurden wieder durch blaue bezieh. rothe Schraffirung kenntlich gemacht. Der Maassstab lautet: $25^{mm} = 1^t$.

In den Figuren 405[a] und 406[a] sind nun die aus den D_0-Linien mittels der Gleichung (2) abgeleiteten D-Linien dargestellt worden. Dabei geschah die Ermittlung der Werthe $0{,}43\,X$ mit Hilfe einer Geraden, welche in Fig. 398[b] auf die Weise bestimmt wurde, dass durch den oberen Endpunkt von δ_{ll} parallel zur Nullachse eine Gerade gezogen und auf dieser von der Senkrechten durch a aus die dem Stabe $h'g$ entsprechende Spannkraft $S_l = 0{,}43$ abgesetzt wurde. Diese Spannkraft ist dem ebenfalls im Maassstabe $25^{mm} = 1^t$ gezeichneten Kräfteplane des Zustandes $X = -1$, Figur 400, entnommen worden. Der Verschiedenheit der Maassstäbe der X-Linien in Figur 398 und der D-Linien ist hierdurch Rechnung getragen, und es konnten daher die Ordinaten der D_0-Linien mit denjenigen der $0{,}43\,X$-Linie ohne Weiteres (mit Berücksichtigung der Vorzeichen!) addirt werden. Beispielsweise ist, absolut genommen,

$$\eta_i = \delta_i - \delta_i' \text{ (Fig. 405[a], 404[b] und 398[a])}$$

und η_i negativ, weil $\delta_i > \delta_i'$.*)

Dem hiermit erledigten genaueren Verfahren ist nun folgendes Näherungsverfahren gegenübergestellt worden. Es wurde vorausgesetzt, dass Diagonale hg' spannungslos sei, dass also der durch $h'g$ geführte senkrechte Schnitt im ganzen nur drei beanspruchte Stäbe treffe. Die Einflusslinie besteht dann sowohl für *Fahrbahn unten* als auch für *Fahrbahn oben* aus drei Geraden AL_1, L_1L_2, L_2B (Fig. 405[b] und 406[b]) und wird erhalten, indem man Strecke AJ gleich der Spannkraft D_A macht, welche im fraglichen Füllungsstabe durch einen Auflagerwiderstand $A = 1$ hervorgerufen wird, und indem man ferner die Strecke L_2H gleich der Seitenkraft $[D]$ macht, die in Fig. 407 durch Zerlegung der Lasteinheit nach den Richtungen U und D gewonnen wurde. Die Bestimmung von D_A erfolgte in Fig. 407 nach dem Culmann'schen Schnittverfahren; die Schnittpunkte (U, A) und (O, D) in Figur 403 wurden durch die Gerade (L) verbunden, hierauf wurde $A = 1^t$ nach den Richtungen U und L zerlegt, schliesslich L nach den Richtungen O und D. Nachdem auf diese Weise der Linienzug AL_1L_2B festgelegt war, wurde angenommen, dass Lasten, welche in den Knotenpunkten k, i', h, g', f, e', d, c', b des die fragliche Diagonale D nicht enthaltenden Strebenzuges angreifen, auch keinen Einfluss auf die Spannkraft D haben — sie wirken gewissermaassen auf das andere Theilfach-

*) Für den Fall obenliegender Fahrbahn werden die Ordinaten der D-Linie bei l' und a' nicht genau gleich Null; sie ergaben sich aber — selbst in der vom Verfasser im doppelten Maassstabe hergestellten Zeichnung — so klein, dass sie $= 0$ gesetzt werden durften.

werk — und aus dieser Annahme ergeben sich schliesslich die in den Figuren 405[b] und 406[b] schraffirten angenäherten D-Flächen.

Wir wollen nun die Ergebnisse der genaueren und genäherten Rechnungsweise prüfen und setzen hierbei einen Zug von Lokomotiven mit den aus den Figuren ersichtlichen Radständen und Achsenbelastungen voraus. Die Mittelachse des Tenders ist von der Mittelachse der Lokomotive um die doppelte Feldweite entfernt — eine sehr ungünstige Annahme. Den eingezeichneten Zugstellungen entsprechen die folgenden Werthe:

	Fahrbahn unten.	*Fahrbahn oben.*
genau	$_{max}D_p = \Sigma P\eta = +31^t$	$_{max}D_p = +24^t$
	$_{min}D_p = \overset{+}{\underset{-}{\Sigma}} P\eta = +11^t$	$_{min}D_p = -19^t$
angenähert	$_{max}D_p = +25{,}5^t$ (Fehler 21%)	$_{max}D_p = +19^t$ (Fehler 21%)
	$_{min}D_p = -11^t$	$_{min}D_p = -20^t$.

Die ständige Belastung sei $g = 1{,}74^t$ f. d. Mtr. also $= 1{,}74 \cdot 3{,}6 = 6{,}3^t$ für jeden Knotenpunkt. Es stellt sich heraus, dass die genaueren und genäherten Einflusslinien dieselben Ergebnisse liefern, nämlich:

für *Fahrbahn unten* $D_g = 6{,}3 \cdot 0{,}62 = 4^t$
für *Fahrbahn oben* $D_g = 0$.

2. *Spannkraft in einem Gurtstabe.* Der einzuschlagende Weg ist derselbe wie bei Untersuchung der Füllungsstäbe. Durch Beseitigung des Stabes $i'h'$, nach dessen Spannkraft O (Fig. 408) gefragt sei, wurde das statisch bestimmte Hauptnetz in eine zwangläufige kinematische Kette verwandelt und nun wurden mit Hilfe eines Geschwindigkeitsplanes (Band I, Seite 508 u. Fig. 499[b]) die O_0-Linien für die beiden Fälle *Fahrbahn unten* und *Fahrbahn oben* gezeichnet. Die Geschwindigkeit hi' des Punktes i' wurde so gewählt, dass die Projektion von hi' auf die Richtung von O gleich 25^{mm} ist. Der Kräftemaassstab für die O_0-Linien lautet dann: $1^t = 25^{mm}$.

Dem Stabe $i'h'$ entspricht $S_i = -0{,}30$, weshalb

$$O = O_0 - S_i X = O_0 + 0{,}30\, X,$$

und hierdurch ist die O-Linie gegeben; sie wurde in kleinerem Maassstabe ($1^t = 12{,}5^{mm}$) gezeichnet — für *Fahrbahn unten* in Fig. 410[a], für *Fahrbahn oben* in Fig. 411[a].*)

Die Figuren 410[b] und 411[b] enthalten die Ergebnisse der Näherungstheorie; es wird genügen, die Entwicklung von 410[b] zu geben.

*) Zur Umsetzung der Strecken aus dem Maassstabe $1^t = 25^{mm}$ in den Maassstab $1^t = 12{,}5^{mm}$ diente der Winkel oberhalb Fig. 400.

Der fragliche Gurtstab liegt in dem einen der beiden Theilfachwerke dem Knotenpunkte h gegenüber, in dem anderen dem Knoten i. Bedeuten M_h, M_i die Angriffsmomente, bezogen auf h bezieh. i und r_h, r_i die Lothe von h und i auf O, so ergiebt sich — jenachdem die Spannkraft im Stabe ih' oder im Stabe $i'h$ gleich Null angenommen wird —

$$-O = \frac{M_h}{r_h} \text{ oder } -O = \frac{M_i}{r_i}.$$

Die Einflusslinie für $M_h : r_h$ besteht aus den Geraden $A'H$ und HB'; sie ist bestimmt durch

$$\overline{HH'} = \frac{x_h x_h'}{l r_h} = \frac{(3 \cdot 3{,}6)(7 \cdot 3{,}6)}{(10 \cdot 3{,}6) \cdot 5{,}34} = 1{,}42$$

während die aus den Geraden $A'J$ und JB' bestehenden $(M_i : r_i)$-Linie durch die Strecke

$$\overline{J'J} = \frac{x_i x_i'}{l r_i} = \frac{(2 \cdot 3{,}6)(8 \cdot 3.6)}{(10 \cdot 3{,}6) \cdot 4{,}51} = 1{,}28$$

gegeben ist. Mit Hilfe der $(M_h : r_h)$-Linie wird der Einfluss der in den Knotenpunkten k, h, f, d, b angreifenden Lasten gefunden, mittels der $(M_i : r_i)$-Linie der Einfluss der übrigen Knotenlasten; schliesslich werden die Endpunkte der auf diese Weise bestimmten Ordinaten durch gerade Linien verbunden. Ganz ebenso wird die Fig. 411[b] erhalten. Den in die Figuren eingezeichneten Zugstellungen sowie der ständigen Last $g = 1{,}74^t$ entsprechen die Werthe:

	Fahrbahn unten.	*Fahrbahn oben.*
genau	$O_p = -\Sigma P\eta = -125^t$ $O_g = -g\lambda\Sigma\eta = -43^t$	$O_p = -\Sigma P\eta = -114^t$ $O_g = -g\lambda\Sigma\eta = -41^t$
angenähert	$O_p = -119^t$ (Fehler 5%) $O_g = -43^t$	$O_p = -112^t$ $O_g = -42^t$.

Die Uebereinstimmung zwischen der angenäherten und genaueren Rechnung ist also hier eine befriedigende.

Die gewöhnliche Zerlegung in zwei Theilfachwerke, von denen jedes für die Hälfte der Belastung zu berechnen ist, würde wenn in jedem Theilfachwerke die wirkliche Richtung des Gurtstabes $i'h'$ beibehalten wird, zu der Formel

$$(3) \qquad O = -\frac{1}{2}\left(\frac{M_i}{r_i} + \frac{M_h}{r_h}\right)$$

führen und hierein wird man zweckmässig, um allen überflüssigen Feinheiten aus dem Wege zu gehen, für M_i und M_h gleichzeitig die Grösstwerthe einführen, trotzdem diese bei verschiedenen Zugstellungen entstehen. Wir würden dann

nach Band I, Seite 142*) erhalten

$$M_i = 702^{tm} \quad M_h = 918^{tm} \text{ also}$$

$$O = -\frac{1}{2}\left(\frac{702}{4{,}51} + \frac{918}{5{,}34}\right) = -164^t = +U$$

während sich vorhin ergab

für *Fahrbahn unten* $O = -125 - 43 = -168^t$
für *Fahrbahn oben* $O = -114 - 41 = -155^t$.

Es leuchtet ein, dass Formel 3 jedenfalls der Abschätzung der Querschnittsabmessungen zu Grunde gelegt werden darf, falls eine schärfere Untersuchung verlangt werden sollte. Nach Ansicht des Verfassers ist die Gleich. 3 aber auch für die endgiltige Berechnung genügend genau.

Wesentlich anders verhält es sich mit den Füllungsstäben. Hier befriedigte schon das Ergebniss der genäherten Einflusslinien nicht sonderlich, und noch ungenauer wird die Rechnung auf Grund der Zerlegung in Theilfachwerke mit den halben Lasten.

Betrachten wir beispielsweise behufs Bestimmung von $_{max}D_p$ im Stabe $h'g$ das Theilfachwerk $lk'ih'g$ . . ., Fig. 412. Der Eisenbahnzug sei bis h' vorgeschoben und die den Schrägstab D auf Druck beanspruchende Belastung des Knotens i sei vernachlässigt — eine jedenfalls sehr ungünstige Voraussetzung. Es entsteht am linken Auflager $A = 26^t$ und

$$_{max}D_p = +22^t,^{**})$$

während sich vorhin $_{max}D_p = +31^t$ ergab. Der Fehler beträgt also 41%.

Hinzugefügt werde noch, dass sich nach Aufzeichnung der X-Linie die übrigen Einflusslinien ausser auf die vorhin beschriebene Art noch nach verschiedenen anderen Verfahren zeichnen lassen. So könnte man nach Ermittlung der O-Linien und U-Linien die D-Linien auf die in Band I, Seite 242 angegebene Weise bestimmen, desgl. nach Seite 176 des vorliegenden Bandes. Drittens ist es möglich, mit Hilfe der für die Knotenpunkte l', l, k', k, . . . aufzustellenden Gleichgewichtsbedingungen schrittweise die Einflusslinien für die Spannkräfte in den Stäben 19′, 20′, 19, 20 u. s. w. herzuleiten.

Ein viertes Verfahren besteht darin, die Lasteinheit der Reihe nach in den sämmtlichen Knoten anzunehmen und für jeden dieser Belastungsfälle einen das ganze Fachwerk umfassenden Kräfteplan zu zeichnen.

---

*) An der angezogenen Stelle sind die Maximalmomente eines Balkens von 36^m Stützweite und 3,6^m Feldweite berechnet worden. g ist $= 1{,}74^t$ f. d. Meter. Der Eisenbahnzug stimmt mit dem im vorliegenden Beispiele eingeführten nicht ganz überein; man wird aber auch, falls man Gleichung 3 anwendet, mit den sonst üblichen Radständen rechnen, nicht mit den besonderen auf Tafel 7 angenommenen.

**) Wir haben in Fig. 412 $_{max}D_p$ kinematisch ermittelt. Beseitigt man D und schreibt man dem Punkte h'' die lothrechte Geschwindigkeit $h'h''$ zu, so entsprechen den Punkten i und l die Geschwindigkeiten ii'' und ll''. Wählt man h'', so dass das Loth von h'' auf D gleich A ist, so ist das Loth von l'' auf A gleich $_{max}D_p$.

Die so gewonnenen Pläne enthalten dann die Ordinaten aller Einflusslinien. In Figur 899 auf Tafel 7 ist ein Theil eines solchen Planes gezeichnet worden; er entspricht einer in h angreifenden Last 1.

2. Untersuchung eines dreifach statisch unbestimmten viertheiligen Netzwerks.

175. Allgemeines über die Berechnung der Formänderungen. Das in Fig. 413 dargestellte viertheilige Netzwerk von 30^m Spann-

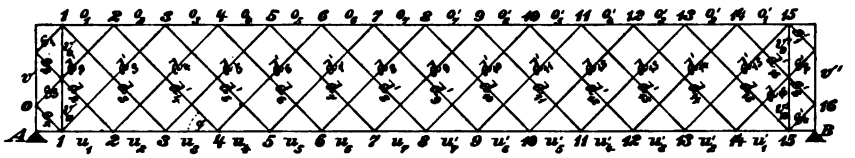


Fig. 413.

weite, 2^m Feldlänge, 4^m Höhe und unten liegender Fahrbahn ist im I. Bande in No. 230 nach dem angenäherten Verfahren der Zerlegung in vier statisch bestimmte Systeme berechnet worden und soll nunmehr

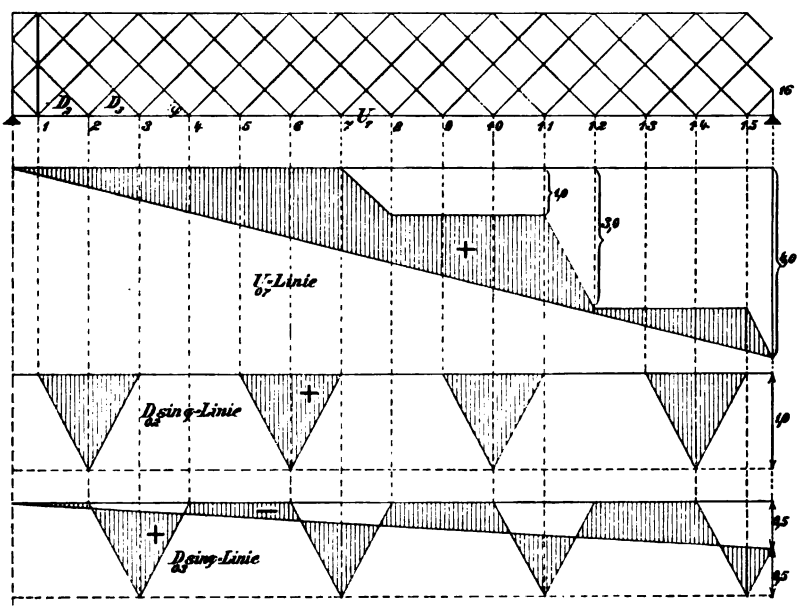


Fig. 414.

genauer untersucht werden. Als statisch bestimmtes Hauptsystem betrachten wir den in Fig. 414 abgebildeten, durch Beseitigung der drei Vertikalen v', v_o' und v_u' erhaltenen Träger; seine Knotenpunkte sind der

Reihe nach zweistäbig an die linke, aus aneinander gereihten Dreiecken bestehende steife Endscheibe angeschlossen, und es lassen sich daher die elastischen Verschiebungen der Knotenpunkte leicht zeichnerisch ermitteln, am besten wohl mit Hilfe eines Williot'schen Verschiebungsplanes. Aber auch die analytische Berechnung der Verschiebungen gestaltet sich sehr einfach und möge hier, ihrer grösseren Genauigkeit wegen, bevorzugt werden.

Zunächst ändern wir die Stützung des Hauptsystems in der Weise, dass wir den unteren Knotenpunkt 0 des Stabes v und die Richtung dieses Stabes festhalten und berechnen die vertikalen Verschiebungen $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_m \ldots$ der Knoten 1, 2, .. m, ... der unteren Gurtung, nach dem in No. 9, Seite 13 und 14 entwickelten, zu der Gleichung $\delta_m = \Sigma S' \Delta s$ führenden Verfahren. Fig. 413 giebt Aufschluss über die Bezeichnung der Stablängen*); in die Figuren 415, 416, 417, 418 und 419 sind die Spannkräfte eingetragen worden,

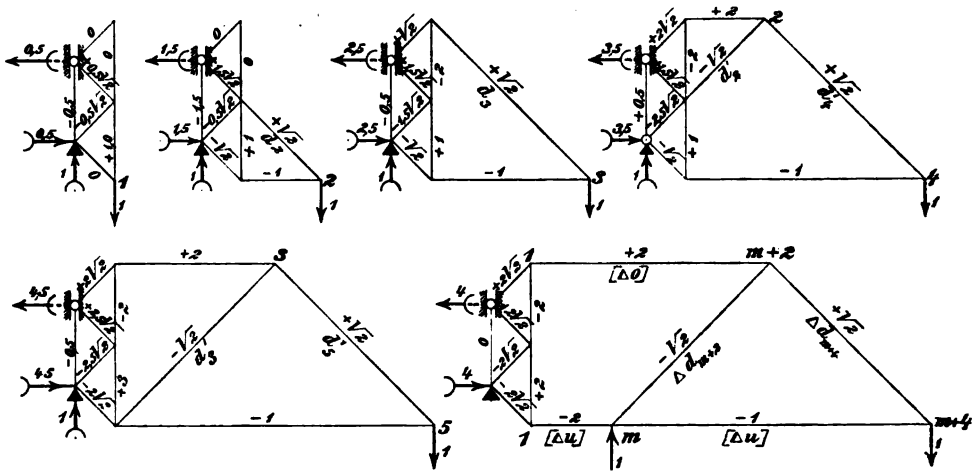


Fig. 415 bis 420.

welche eine der Reihe nach in den Knotenpunkten 1, 2, 3, 4, 5 angenommene Last 1 in den Stäben des Hauptsystems erzeugt. Mit Hilfe dieser Werthe erhält man

---

*) Die Bezeichnung ist so gewählt worden, dass die vier, die beiden Endscheiben verbindenden Strebenzüge

$$d_2\, d_4\, d_6 \ldots d_{16}, \quad d_3\, d_5\, d_7 \ldots d_{15}$$

und

$$d'_2\, d'_4\, d'_6 \ldots d'_{16}, \quad d'_3\, d'_5\, d'_7 \ldots d'_{15}$$

gut hervortreten.

$$\eta_1 = 0{,}5\sqrt{2}\,(\Delta s_2 - \Delta s_3) + \Delta v_u - 0{,}5\,\Delta v,$$

$$\eta_2 = 1{,}5\sqrt{2}\,\Delta s_2 - 0{,}5\sqrt{2}\,\Delta s_3 - \sqrt{2}\,\Delta s_4 + \Delta v_u - 1{,}5\,\Delta v + \sqrt{2}\,\Delta d_2 - \Delta u_1,$$

$$\eta_3 = \sqrt{2}\,(\Delta s_1 - \Delta s_4) + 1{,}5\sqrt{2}\,(\Delta s_2 - \Delta s_3) + \Delta v_u - 2\,\Delta v_o - 0{,}5\,\Delta v + \sqrt{2}\,\Delta d_3 - (\Delta u_1 + \Delta u_2),$$

$$\eta_4 = 2\sqrt{2}\,\Delta s_1 + 1{,}5\sqrt{2}\,\Delta s_2 - 2{,}5\sqrt{2}\,\Delta s_3 - \sqrt{2}\,\Delta s_4 - 2\,\Delta v_o + \Delta v_u + 0{,}5\,\Delta v + \sqrt{2}\,(\Delta d_4' - \Delta d_2') - (\Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3) + 2\,\Delta o_1,$$

$$\eta_5 = 2\sqrt{2}\,(\Delta s_1 - \Delta s_4) + 2{,}5\sqrt{2}\,(\Delta s_2 - \Delta s_3) - 2\,\Delta v_o + 3\,\Delta v_u - 0{,}5\,\Delta v + \sqrt{2}\,(\Delta d_5' - \Delta d_3') - (\Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3 + \Delta u_4) + 2\,(\Delta o_1 + \Delta o_2).$$

Die übrigen Verschiebungen η findet man mit Hilfe der mittels Fig. 420 abgeleiteten Formel

$$\eta_{m+4} - \eta_m = 2\sqrt{2}\,(\Delta s_1 + \Delta s_2 - \Delta s_3 - \Delta s_4) + 2\,(\Delta v_u - \Delta v_o) + \sqrt{2}\,(\Delta d_{m+4} - \Delta d_{m+2}) - (\Delta u) + 2\,\{[\Delta o] - [\Delta u]\}$$

wo (Δu) die Längenänderung der Strecke $\overline{m\,(m+4)}$

$[\Delta o]$ „ „ „ „ $\overline{1\,(m-2)}$

$[\Delta u]$ „ „ „ „ $\overline{1\,m}$

bedeutet.

Zur Berechnung von $\eta_{16} - \eta_{15}$ betrachten wir den in Fig. 421 dargestellten Belastungszustand. In den Diagonalen entstehen die

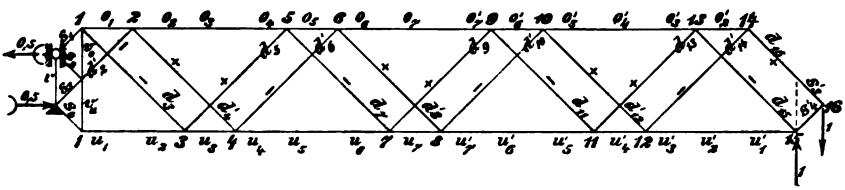


Fig. 421.

Spannkräfte $\pm 0{,}5\sqrt{2}$; in der oberen Gurtung werden die Stäbe o_1, o_5, o_6', o_2' mit $+1$ beansprucht, in der unteren Gurtung die Stäbe u_3, u_7 und u_4' mit -1; die übrigen Gurtstäbe sind spannungslos. Von den Stäben der Endscheiben werden nur die folgenden beansprucht:

s_1 und s_3' mit $+0{,}5\sqrt{2}$

s_3 „ s_4' „ $-0{,}5\sqrt{2}$ und v mit $+0{,}5$.

Es ergiebt sich daher

$$\eta_{16} - \eta_{15} = 0{,}5\sqrt{2}\,(\Delta s_1 + \Delta s_3' - \Delta s_3 - \Delta s_4') + 0{,}5\,\Delta v + \Delta o_1 + \Delta o_5 + \Delta o_6' + \Delta o_2' - \Delta u_3 - \Delta u_7 - \Delta u_4' + 0{,}5\sqrt{2}\,(-\Delta d_2' + \Delta d_4' - \Delta d_6' + \ldots + \Delta d_{16}') + 0{,}5\sqrt{2}\,(-\Delta d_3 + \Delta d_5 - \Delta d_7 + \ldots - \Delta d_{15}).$$

176. Berechnung von X_a, X_b und X_c. Als statisch unbestimmte Grössen führen wir nicht die Spannkräfte V_o', V_u', V' in den drei überzähligen Stäben v_o', v_u', v' sondern drei Werthe X_a, X_b, X_c ein, die mit den Grössen V_o', V_u', V' durch die Gleichungen

$$V_o' = -X_a - X_b - X_c$$
$$V_u' = +X_a - X_b - X_c$$
$$V' = 2X_c$$

verbunden sind.*) Im Belastungsfalle $X_a = -1$ ist also

$$V_o' = +1 \quad V_u' = -1 \quad V' = 0.$$

Dem Zustande $X_b = -1$ entsprechen die Werthe

$$V_o' = +1 \quad V_u' = +1 \quad V' = 0$$

und der Zustand $X_c = -1$ erzeugt

$$V_o' = +1 \quad V_u' = +1 \quad V' = -2.$$

Die Tabelle I enthält die Werthe S_a, S_b und S_c für sämmtliche Stäbe und man erkennt sofort, dass

$$\delta_{ab} = \Sigma S_a S_b \frac{s}{EF} = 0$$

ist, weil sich für die einander entsprechenden Stäbe der linken und rechten Hälfte des Trägers gleiche Spannkräfte S_b und entgegengesetzt gleiche Spannkräfte S_a ergeben. Weiter findet man

$$\delta_{br} = \Sigma S_b S_c \frac{s}{EF} = 0,$$

während δ_{ac} im allgemeinen einen endlichen Werth annimmt.

Um die Rechnung thunlichst weit mit Buchstaben durchführen zu können, haben wir die Querschnittsverhältnisse $F_c : F$ für die Gurtungen mit α_1, α_2, ... für die Diagonalen mit $\frac{\beta_2}{\sqrt{2}}$, $\frac{\beta_3}{\sqrt{2}}$, ... und für die Glieder der Endscheiben mit ν, ν', $\frac{\nu''}{\sqrt{2}}$ bezeichnet und diese Zeichen in die Tabelle eingetragen.**) F_c ist ein beliebiger, konstanter Querschnittsinhalt. Zwei in einem unbelasteten Knotenpunkte zusammenstossende Diagonalen erhalten gleiche Querschnitte also auch gleiche Werthe β. Die Querschnitte der einander entsprechenden Stäbe der

*) Vergl. No. 13, Seite 25.

**) Die Querschnittsverhältnisse $F_c : F$ runde man gut ab. Die Einführung runder Werthe $F_c\sqrt{2} : F$ für die Diagonalen erleichtert die Rechnung ausserordentlich.

Tabelle I.

a) Gurtungen und Ständer.

	$\frac{F_c}{F}$	$\frac{F_c}{F}$	$\frac{s}{s_c}$	S_a	S_b	S_c		$\frac{F_c}{F}$	$\frac{F_c}{F}$	$\frac{s}{s_c}$	S_a	S_b	S_c
o_1	α_1	1,0	1	−1	+1	+1	u_1	α_1	1,0	1	+1	+1	+1
o_2	α_2	0,6	1	+1	+1	−1	u_2	α_2	0,6	1	−1	+1	−1
o_3	α_3	0,4	1	−1	−1	−1	u_3	α_3	0,4	1	+1	−1	−1
o_4	α_4	0,4	1	+1	−1	+1	u_4	α_4	0,4	1	−1	−1	+1
o_5	α_5	0,3	1	−1	+1	+1	u_5	α_5	0,3	1	+1	+1	+1
o_6	α_6	0,3	1	+1	+1	−1	u_6	α_6	0,3	1	−1	+1	−1
o_7	α_7	0,3	1	−1	−1	−1	u_7	α_7	0,3	1	+1	−1	−1
o_7'	α_7	0,3	1	+1	−1	+1	u_7'	α_7	0,3	1	−1	−1	+1
o_6'	α_6	0,3	1	−1	+1	+1	u_6'	α_6	0,3	1	+1	+1	+1
o_5'	α_5	0,3	1	+1	+1	−1	u_5'	α_5	0,3	1	−1	+1	−1
o_4'	α_4	0,4	1	−1	−1	−1	u_4'	α_4	0,4	1	+1	−1	−1
o_3'	α_3	0,4	1	+1	−1	+1	u_3'	α_3	0,4	1	−1	−1	+1
o_2'	α_2	0,6	1	−1	+1	+1	u_2'	α_2	0,6	1	+1	+1	+1
o_1'	α_1	1,0	1	+1	+1	−1	u_1'	α_1	1,0	1	−1	+1	−1
v	ν	0,6	1	0	0	+2	v'	ν	0,6	1	0	0	−2
v_o	ν'	1,5	1	−1	+1	−1	v_o'	ν'	1,5	1	+1	+1	+1
v_u	ν'	1,5	1	+1	+1	−1	v_u'	ν'	1,5	1	−1	+1	+1

b) Diagonalen.

	$\frac{F_c\sqrt{2}}{F}$	$\frac{F_c\sqrt{2}}{F}$	$\frac{s}{s_c\sqrt{2}}$	$\frac{S_a}{\sqrt{2}}$	$\frac{S_b}{\sqrt{2}}$	$\frac{S_c}{\sqrt{2}}$		$\frac{F_c\sqrt{2}}{F}$	$\frac{F_c\sqrt{2}}{F}$	$\frac{s}{s_c\sqrt{2}}$	$\frac{S_a}{\sqrt{2}}$	$\frac{S_b}{\sqrt{2}}$	$\frac{S_c}{\sqrt{2}}$
d_2	β_2	1,3	1	−1	0	−1	d_2'	β_4	1,8	1	+1	0	−1
d_4	β_6	2,4	2	+1	0	+1	d_4'	β_4	1,8	2	−1	0	+1
d_6	β_6	2,4	2	−1	0	−1	d_6'	β_8	4,2	2	+1	0	−1
d_8	β_{10}	5,7	2	+1	0	+1	d_8'	β_8	4,2	2	−1	0	+1
d_{10}	β_{10}	5,7	2	−1	0	−1	d_{10}'	β_8	4,2	2	+1	0	−1
d_{12}	β_6	2,4	2	+1	0	+1	d_{12}'	β_8	4,2	2	−1	0	+1
d_{14}	β_6	2,4	2	−1	0	−1	d_{14}'	β_4	1,8	2	+1	0	−1
d_{16}	β_2	1,3	1	+1	0	+1	d_{16}'	β_4	1,8	1	−1	0	+1
d_3	β_3	1,5	2	+1	−1	0	d_3'	β_5	2,1	2	−1	−1	0
d_5	β_7	3,3	2	−1	+1	0	d_5'	β_5	2,1	2	+1	+1	0
d_7	β_7	3,3	2	+1	−1	0	d_7'	β_9	4,8	2	−1	−1	0
d_9	β_9	4,8	2	−1	+1	0	d_9'	β_9	4,8	2	+1	+1	0
d_{11}	β_9	4,8	2	+1	−1	0	d_{11}'	β_7	3,3	2	−1	−1	0
d_{13}	β_5	2,1	2	−1	+1	0	d_{13}'	β_7	3,3	2	+1	+1	0
d_{15}	β_5	2,1	2	+1	−1	0	d_{15}'	β_3	1,5	2	−1	−1	0
s_1	ν''	1,2	0,5	0	0	+1	s_1'	ν''	1,2	0,5	0	0	−1
s_2	ν''	1,2	0,5	0	0	−1	s_2'	ν''	1,2	0,5	0	0	+1
s_3	ν''	1,2	0,5	0	0	−1	s_3'	ν''	1,2	0,5	0	0	+1
s_4	ν''	1,2	0,5	0	0	+1	s_4'	ν''	1,2	0,5	0	0	−1

oberen und unteren Gurtung unterscheiden sich von einander so wenig, dass es stets zulässig ist, ihnen gleiche Werthe $F_c : F$ beizulegen. Die dritte Spalte der Tabelle enthält die Verhältnisszahlen $s : s_c$, wo s_c die Feldlänge, d. i. die Länge eines Gurtstabes, bedeutet.

Mit diesen Bezeichnungen ergiebt sich nun

$$\frac{EF_c}{s_c}\,\delta_{ac} = \Sigma S_a S_c \frac{s}{s_c}\cdot\frac{F_c}{F} = 8\,(\beta_2 + 4\,\beta_6 + 2\,\beta_{16} - 3\,\beta_4 - 4\,\beta_8)$$

und dieser Werth wird gleich Null sobald

$$+\,\beta_2 + 4\,\beta_6 + 2\,\beta_{10} = 3\,\beta_4 + 4\,\beta_8$$

ist, eine Bedingung, welche sich stets durch geringfügige und für die Endergebnisse der Untersuchung belanglose Aenderungen der auf Grund der angenäherten Berechnung gewonnenen Querschnittsflächen erfüllen lassen.*) Die Zahlenwerthe der vierten Spalte der Tabelle genügen der vorstehenden Bedingung, und es sind daher die drei Elasticitätsgleichungen von einander unabhängig. Der Einfluss einer im Knotenpunkte m angreifenden Last $P_m = 1$ auf die statisch unbestimmten Grössen ist also

$$X_a = \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}},\quad X_b = \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}},\quad X_c = \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}},$$

und hierein ist, mit den Bezeichnungen

$$\beta_3 + 2\,\beta_5 + 2\,\beta_7 + 2\,\beta_9 = \psi_1$$
$$\beta_2 + 4\,\beta_6 + 2\,\beta_{10} = 3\,\beta_4 + 4\,\beta_8 = \psi_2$$

zu setzen:

$$\frac{EF_c}{s_c}\,\delta_{aa} = \Sigma S_a^2 \frac{s}{s_c}\frac{F_c}{F} = 4\sum_1^7 \alpha_m + 4\nu' + 8\,(\psi_1 + \psi_2)$$
$$\frac{EF_c}{s_c}\,\delta_{bb} = \Sigma S_b^2 \frac{s}{s_c}\frac{F_c}{F} = 4\sum_1^7 \alpha_m + 4\nu' + 8\,\psi_1$$
$$\frac{EF_c}{s_c}\,\delta_{cc} = \Sigma S_c^2 \frac{s}{s_c}\frac{F_c}{F} = 4\sum_1^7 \alpha_m + 4\nu' + 8\,(\nu + \nu'') + 8\,\psi_2.$$

---

*) Die zunächst nach der Näherungstheorie berechneten Stabquerschnitte und die ihnen entsprechenden Werthe α, β und ν sind in der Tabelle VIII zusammengestellt worden; F_c wurde gleich 100 qcm gewählt. Es ergaben sich die nur wenig von einander abweichenden Werthe

$$\beta_2 + 4\beta_6 + 2\beta_{10} = 1{,}33 + 4\cdot 2{,}57 + 2\cdot 5{,}66 = 22{,}93 \text{ und}$$
$$3\beta_4 + 4\beta_8 = 3\cdot 1.77 + 4\cdot 4{,}04 = 21{,}47.$$

Der Querschnitt von d_9 wurde nun gleich 29 qcm (statt 25) angenommen; sodann wurden die Werthe β, ν und ν' so abgerundet, dass sie den Theiler 3 erhielten. Ebenso wurde dafür gesorgt, dass $\sum_1^7 \alpha$ ohne Rest durch 3 getheilt werden konnte. Diese Maassnahmen erleichtern die Zahlenrechnungen, da η_{ha}, η_{hb} und η_{hc} durch 30 getheilt werden müssen.

Man erhält

$$\sum_1^7 \alpha_m = 3{,}3, \quad \psi_1 = 21{,}9, \quad \psi_2 = 22{,}2.$$

$$\frac{EF_o}{s_o}\delta_{aa} = 372{,}0, \quad \frac{EF_o}{s_o}\delta_{bb} = 194{,}4, \quad \frac{FF_o}{s_o}\delta_{cc} = 211{,}2.$$

An Stelle der Durchbiegungen δ_m berechnen wir die Werthe $\frac{EF_o}{s_o}\delta_m$, indem wir die Längenänderungen $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$ ersetzen durch $\frac{EF_o}{s_o}\Delta s = S\frac{s}{s_o}\cdot\frac{F_o}{F}$. Den sich hebenden Faktor $\frac{EF_o}{s_c}$ streichen wir. Zunächst nehmen wir das statisch bestimmte Hauptsystem auf die in Fig. 421 angegebene Art gestützt an, berechnen für die Zustände $X_a = -1$, $X_b = -1$ und $X_c = -1$ die Durchbiegungen η und finden dann für den im Abstande x_m vom linken Stützpunkte liegenden Knotenpunkt m

$$\delta_m = \eta_m - \delta_{16}\frac{x_m}{l}.$$

Die senkrechten Verschiebungen der Stützpunkte A und B stimmen mit denen der Knotenpunkte 0 und 16 überein, weil die Ständer $\overline{0A}$ und $\overline{16B}$ in den hier in Frage kommenden drei Belastungsfällen spannungslos sind.

Mit Hilfe der auf Seite 449 abgeleiteten Formeln ergeben sich die folgenden Werthe η.

Zustand $X_a = -1$

$\eta_{1a} = \nu' = 1{,}5$

$\eta_{2a} = \nu' - 2\beta_2 - \alpha_1 = -2{,}1$

$\eta_{6a} = \eta_{2a} + 4\nu' - 8\beta_6 - 4\alpha_1 + 3(\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_4 - \alpha_5) = -18{,}6$

$\eta_{10a} = \eta_{6a} + 4\nu' - 8\beta_{10} - 4\alpha_1 + 4(\alpha_2 - \alpha_3) + 4(\alpha_4 - \alpha_6) + 2(\alpha_6 - \alpha_7) = -61{,}0$

$\eta_{14a} = \eta_{10a} + 4\nu' - 8\beta_6 - 4\alpha_1 + 3(\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_4 - \alpha_5) = -77{,}5$

$\eta_{3a} = +3\nu' + 4\beta_3 - (\alpha_1 - \alpha_2) = +10{,}1$

$\eta_{7a} = \eta_{3a} + 4\nu' + 8\beta_7 - 4(\alpha_1 - \alpha_2) - 3(\alpha_3 - \alpha_4) - (\alpha_5 - \alpha_6) = +40{,}9$

$\eta_{11a} = \eta_{7a} + 4\nu' + 8\beta_9 - 4(\alpha_1 - \alpha_2) - 4(\alpha_3 - \alpha_4) - 3(\alpha_5 - \alpha_6) = +83{,}7$

$\eta_{15a} = \eta_{11a} + 4\nu' + 8\beta_5 - 3(\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_3 - \alpha_4) = +105{,}3$

$\eta_{4a} = +3\nu' - 6\beta_4 - 3\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) = -9{,}1$

$\eta_{8a} = \eta_{4a} + 4\nu' - 8\beta_8 - 4\alpha_1 + 4(\alpha_2 - \alpha_3) + 3(\alpha_4 - \alpha_5) + (\alpha_6 - \alpha_7) = -39{,}6$

$\eta_{12a} = \eta_{8a} + 4\nu' - 8\beta_8 - 4\alpha_1 + 4(\alpha_2 - \alpha_3) + 3(\alpha_4 - \alpha_5) + (\alpha_6 - \alpha_7) = -70{,}1$

$$\eta_{5a} = +5\nu' + 8\beta_5 - 3(\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_3 - \alpha_4) = +23{,}1$$
$$\eta_{9a} = \eta_{5a} + 4\nu' + 8\beta_9 - 4(\alpha_1 - \alpha_2) - 4(\alpha_3 - \alpha_4) - 3(\alpha_5 - \alpha_6) = +65{,}9$$
$$\eta_{13a} = \eta_{9a} + 4\nu' + 8\beta_7 - 4(\alpha_1 - \alpha_2) - 3(\alpha_3 - \alpha_4) - 3(\alpha_5 - \alpha_6) = +96{,}7$$
$$\eta_{16a} - \eta_{15a} = -\sum_1^7 \alpha - 2(\psi_1 + \psi_2) = -91{,}5$$
$$\eta_{16} = 105{,}3 - 91{,}5 = 13{,}8$$

Zustand $X_b = -1$

$$\eta_{1b} = \nu' = 1{,}5$$
$$\eta_{2b} = \nu' - \alpha_1 = +0{,}5$$
$$\eta_{6b} = \eta_{2b} + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 = +0{,}8$$
$$\eta_{10b} = \eta_{6b} = +0{,}8, \quad \eta_{14b} = \eta_{2b} = +0{,}5$$

$$\eta_{3b} = -\nu' - 4\beta_3 - (\alpha_1 + \alpha_2) = -9{,}1$$
$$\eta_{7b} = \eta_{3b} - 8\beta_7 - (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) = -36{,}9$$
$$\eta_{11b} = \eta_{7b} - 8\beta_9 - (\alpha_7 + \alpha_7 + \alpha_6 + \alpha_5) = -76{,}5$$
$$\eta_{15b} = \eta_{11b} - 8\beta_5 - (\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) = -95{,}7$$

$$\eta_{4b} = -\nu' + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = -0{,}7$$
$$\eta_{8b} = \eta_{4b} - \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 + \alpha_7 = -0{,}8$$
$$\eta_{12b} = \eta_{4b} = -0{,}7$$

$$\eta_{5b} = \nu' + 8\beta_5 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = +20{,}7$$
$$\eta_{9b} = \eta_{5b} + 8\beta_9 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_7 = +60{,}3$$
$$\eta_{13b} = \eta_{9b} + 8\beta_7 + \alpha_6 + \alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_3 = +88{,}1$$
$$\eta_{16b} - \eta_{15b} = \sum_1^7 \alpha + 2\psi_1 = 47{,}1$$
$$\eta_{16b} = -95{,}7 + 47{,}1 = -48{,}6$$

Zustand $X_c = -1$

$$\eta_{1c} = -\nu' - \nu = -2{,}1$$
$$\eta_{2c} = -2\nu'' - 3\nu - \nu' - 2\beta_2 - \alpha_1 = -9{,}3$$
$$\eta_{6c} = \eta_{2c} - 8\beta_6 - (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) = -30{,}2$$
$$\eta_{10c} - \eta_{6c} - 8\beta_{10} - (\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_7 + \alpha_5) = -77{,}0$$
$$\eta_{14c} = \eta_{10c} - 8\beta_6 - (\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) = -97{,}9$$

$$\eta_{3c} = \nu' - \nu - \alpha_1 + \alpha_2 = +0{,}5$$
$$\eta_{7c} = \eta_{3c} - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 = +0{,}5$$
$$\eta_{11c} = \eta_{7c} - \alpha_6 + \alpha_5 = +0{,}5$$
$$\eta_{15c} = \eta_{11c} - \alpha_4 + \alpha_3 - \alpha_2 + \alpha_1 = +0{,}9$$

$$\eta_{4c} = 2\nu'' + \nu' + \nu + 6\beta_4 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = +17{,}3$$
$$\eta_{8c} = \eta_{4c} + 8\beta_8 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = +52{,}2$$
$$\eta_{12c} = \eta_{8c} + 8\beta_8 + \alpha_7 + \alpha_6 + \alpha_5 + \alpha_4 = +87{,}1$$

$$\begin{aligned}
\eta_{5c} &= -\nu' - \nu + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = -1{,}7\\
\eta_{9c} &= \eta_{5c} + \alpha_5 - \alpha_6 = -1{,}7\\
\eta_{13c} &= \eta_{9c} + \alpha_6 - \alpha_5 + \alpha_4 - \alpha_3 = -1{,}7
\end{aligned}$$

$$\eta_{16c} - \eta_{15c} = \nu + 2\nu'' + \sum_1^7 \alpha + 2\psi_2 = 50{,}7$$

$$\eta_{16c} = 0{,}9 + 50{,}7 = 51{,}6.$$

Die aus den Werthen η berechneten Grössen

$$X_a = \frac{1}{\delta_{aa}}\left(\eta_{ma} - \frac{x}{l}\eta_{16a}\right)$$

$$X_b = \frac{1}{\delta_{bb}}\left(\eta_{mb} - \frac{x}{l}\eta_{16b}\right)$$

$$X_c = \frac{1}{\delta_{cc}}\left(\eta_{mc} - \frac{x}{l}\eta_{16c}\right)$$

sowie die in der weiteren Untersuchung gebrauchten Ausdrücke

$$Y_1 = X_a + X_b \qquad Y_3 = X_a + X_c$$
$$Y_2 = X_a - X_b \qquad Y_4 = X_a - X_c$$

sind in der Tabelle II zusammengestellt worden.

Tabelle II.

m	X_a	X_b	X_c	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
1	+ 0,003	+ 0,016	− 0,018	+ 0,019	− 0,013	− 0,015	+ 0,021
2	− 0,009	+ 0,027	− 0,068	+ 0,018	− 0,036	− 0,077	+ 0,059
3	+ 0,021	− 0,006	− 0,038	+ 0,015	+ 0,027	− 0,017	+ 0,059
4	− 0,033	+ 0,055	+ 0,025	+ 0,022	− 0,088	− 0,008	− 0,058
5	+ 0,051	+ 0,181	− 0,081	+ 0.232	− 0,130	− 0,030	+ 0,132
6	− 0,064	+ 0,096	− 0,232	+ 0,032	− 0,160	− 0,296	+ 0,168
7	+ 0,094	− 0,081	− 0,104	+ 0,013	+ 0,175	− 0,010	+ 0,198
8	− 0,125	+ 0,121	+ 0,125	− 0,004	− 0,247	0	− 0,250
9	+ 0,156	+ 0,452	− 0,146	+ 0,608	− 0,296	+ 0,010	+ 0,302
10	− 0,186	+ 0,162	− 0,518	− 0,024	− 0,348	− 0,704	+ 0,332
11	+ 0,199	− 0,219	− 0,169	− 0,020	+ 0,418	+ 0,030	+ 0,368
12	− 0,217	+ 0,188	+ 0,225	− 0,029	− 0,405	+ 0,008	− 0,442
13	+ 0,229	+ 0,662	− 0,212	+ 0,891	− 0,433	+ 0,017	+ 0,441
14	− 0,241	+ 0,228	− 0,682	− 0,013	− 0,469	− 0,923	+ 0,441
15	+ 0,247	− 0,251	− 0,232	− 0,004	+ 0,498	+ 0,015	+ 0,479

177. Spannkräfte in den Stäben der Endscheiben. Für die Spannkräfte in den Stäben v_1', v_o', v_u', s_1', s_2', s_3', s_4' der rechten Endscheibe gelten die Formeln

$$(1)\quad \begin{cases} V' = -2X_c,\ V_o' = -X_a - X_b - X_c,\ V_u' = +X_a - X_b - X_c \\ S_1' \sin\varphi = -S_2' \sin\varphi = +X_c \\ S_4' \sin\varphi = -S_3' \sin\varphi = \frac{1}{2}(B + V') = 0{,}5\,B - X_c, \end{cases}$$

wo B den Widerstand der rechten Stütze bedeutet. Die Einflusslinien für die Spannkräfte V und S der linken Endscheibe sind die Spiegelbilder der Einflusslinien der entsprechenden Kräfte V' und S' der rechten Scheibe. In der Tabelle III sind die Ordinaten der Linien für V_o, V_u und S_4 zusammengestellt worden. Die $S_4 \sin\varphi$-Linie und die V_u-Linie

Tabelle III.

m	V_u	V_o	$S_4 \sin\varphi$	m	V_u	V_o	$S_4 \sin\varphi$
1	+ 0,730	+ 0,236	+ 0,251	9	+ 0,279	+ 0,091	+ 0,113
2	+ 0,213	+ 0,695	— 0,232	10	+ 0,072	+ 0,200	— 0,049
3	— 0,221	— 0,679	+ 0,205	11	— 0,049	— 0,151	+ 0,069
4	— 0,630	— 0,196	+ 0,608	12	— 0,113	— 0,047	+ 0,142
5	+ 0,587	+ 0.189	+ 0,181	13	+ 0,065	+ 0,023	+ 0,045
6	+ 0,170	+ 0 542	— 0,201	14	+ 0,032	+ 0,050	— 0,018
7	— 0,150	— 0,462	+ 0,137	15	+ 0,005	— 0,001	— 0,001
8	— 0,372	— 0,121	+ 0,375				

zeigt Fig. 422; vergleicht man sie mit den im I. Bande auf Seite 529 nach dem Näherungsverfahren gewonnenen Linien, so findet man eine recht gute Uebereinstimmung. Um die Vergleichung zu erleichtern, haben wir die Geraden, in denen die Punkte der angenäherten Einflusslinien liegen, mit eingezeichnet; sie schneiden auf der Senkrechten durch A die Strecken 0,25, 0,50 und 0,75 ab.*) Als Lasten sind drei- oder vierachsige Lokomotiven von 1,2^m Radstand und 16^t Achsdruck angenommen worden. Die ständige Belastung beträgt $g = 1{,}6\,^t/_m$ also 3,2^t für jeden der Knotenpunkte 2 bis 14 und 2,4^t für jeden der Punkte 1 und 14. Den Einfluss des Eigengewichts ermittelt man in der Weise, dass man

$$X_{ag} = +0{,}20^t,\quad X_{bg} = +5{,}41^t,\quad X_{cg} = +6{,}60^t$$

bestimmt und hierauf die Formeln 1 benutzt. Man erhält auf diesem Wege die folgenden grössten Stabkräfte, denen die nach dem Näherungsverfahren gewonnenen in Klammer beigefügt worden sind.

$$\begin{aligned} {}_{min}V &= {}_{min}V_p + V_g = -108{,}5 - 13{,}2 = -122^t\ (-122^t) \\ {}_{max}V_u &= {}_{max}V_{up} + V_{ug} = +42{,}2 + 1{,}4 = +44^t\ (+45^t) \\ {}_{max}V_o &= {}_{max}V_{op} + V_{og} = +41{,}8 + 1{,}0 = +42^t\ (+43^t) \\ {}_{max}S_4 \sin\varphi &= +42{,}5 + 5{,}0 = +47{,}5^t\ (+47{,}5^t) \\ {}_{min}S_1 \sin\varphi &= \tfrac{1}{2}V = -61^t\ (-61^t). \end{aligned}$$

*) Man achte darauf, dass wir im I. Bande die S_1-Linie, jetzt aber die $S_1 \sin\varphi$-Linie dargestellt haben.

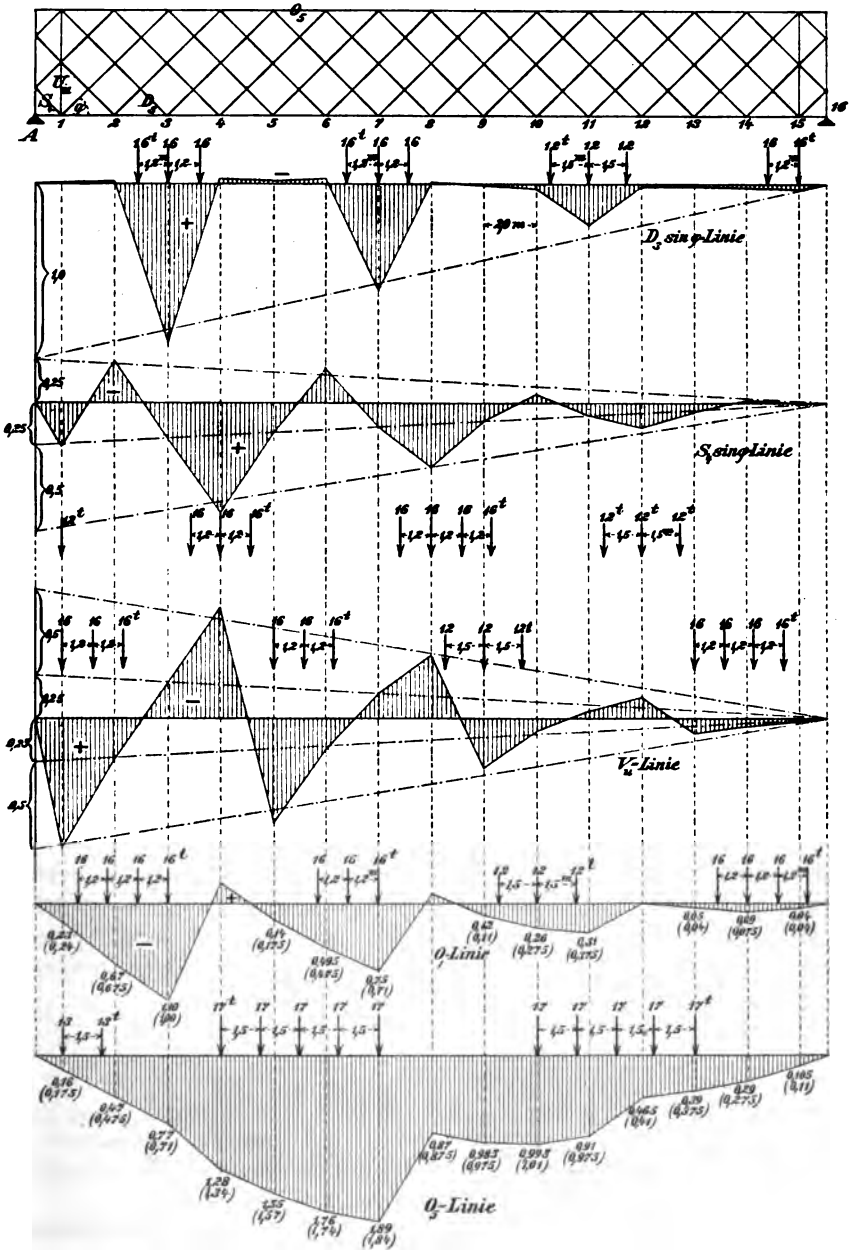


Fig. 422.

Die Uebereinstimmung der genauen und angenäherten Werthe ist eine ganz vorzügliche, und es folgt daraus ohne weiteres, dass auch die O, U und D nach dem Näherungsverfahren berechnet werden dürfen. Wir wollen aber trotzdem die genauere Berechnung auch für die übrigen Stäbe durchführen und noch verschiedene Vergleichungen mit den angenäherten Ergebnissen vornehmen.*)

178. Die Spannkräfte in den Diagonalen ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte. Für die Spannkräfte D_2, D_3, D_4', D_5' gelten die Formeln

$$\begin{aligned}
D_2 \sin\varphi &= D_{o2} \sin\varphi + X_a + X_c = D_{o2} \sin\varphi + Y_3\\
D_3 \sin\varphi &= D_{o3} \sin\varphi - X_a + X_b = D_{o3} \sin\varphi - Y_2\\
D_4' \sin\varphi &= D_{o4}' \sin\varphi + X_a - X_c = D_{o4}' \sin\varphi + Y_4\\
D_5' \sin\varphi &= D_{o5}' \sin\varphi - X_a - X_b = D_{o5}' \sin\varphi - Y_1.
\end{aligned}$$

Die D_o-Linien lassen sich nach dem im I. Bande angegebenen Verfahren ermitteln. Fig. 414 zeigt die Einflusslinien für $D_{o2}\sin\varphi$ und $D_{o3}\sin\varphi$.

Die übrigen Kräfte D sind durch die Gleichungen bestimmt

$$D_2' = -D_4', \quad D_3' = -D_5', \quad D_4' = -D_6, \text{ u. s. w.}$$

$$\begin{aligned}
D_6 \sin\varphi &= -D_4 \sin\varphi = D_2 \sin\varphi - P_2\\
D_7 \sin\varphi &= -D_5 \sin\varphi = D_3 \sin\varphi - P_3\\
D_8' \sin\varphi &= -D_6' \sin\varphi = D_4' \sin\varphi - P_4\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

wo P_2, P_3 . . die in 2 oder 3 u. s. w. angreifende Knotenlast bedeutet. Die Tabelle IV enthält die Ordinaten der Einflusslinien für alle linkssteigenden Diagonalen. Die $D_3 \sin\varphi$-Linie ist in Fig. 422 dargestellt worden; sie weicht nur unwesentlich von der im I. Bande nach dem genäherten Verfahren der Zerlegung des Netzwerks in statisch bestimmte Theilsysteme gewonnenen ab. Für die $_{m,n}D \sin\varphi$ ergeben sich die folgenden Werthe, denen die nach dem Näherungsverfahren gewonnenen in Klammern beigefügt worden sind.**)

---

*) Herr Professor *G. Mehrtens* hat in der Deutschen Bauzeitung 1902, Seite 75, die von mir im ersten Bande dieses Werkes durchgeführte Näherungsberechnung als einen „unzureichenden Nothbehelf" bezeichnet und damit nur gezeigt, dass er selbst die Spannkräfte eines derartigen Systems noch nie genau untersucht hat.

**) Vergl. Band I, Seite 529 und 530. Die dort angenommene Belastung haben wir etwas geändert, indem wir der Einfachheit wegen die Mittelachse des Tenders an einen Knotenpunkt rückten.

Tabelle IV.

m	$D_2 \sin\varphi$	$D_3 \sin\varphi$	$D_4' \sin\varphi$	$D_5' \sin\varphi$	$D_6 \sin\varphi$	$D_7 \sin\varphi$	$D_8' \sin\varphi$	$D_9' \sin\varphi$	$D_{10} \sin\varphi$
1	− 0,015	− 0,004	+ 0,004	− 0,019	− 0,015	− 0,004	+ 0,004	− 0,019	− 0,015
2	+ 0,923	− 0,014	+ 0,009	− 0,018	− 0,077	− 0,014	+ 0,009	− 0,018	− 0,077
3	− 0,017	+ 0,890	− 0,024	− 0,015	− 0,017	− 0,110	− 0,024	− 0,015	− 0,017
4	− 0,008	− 0,029	+ 0,825	− 0,022	− 0,008	− 0,029	− 0,175	− 0,022	− 0,008
5	− 0,030	− 0,020	− 0,018	+ 0,768	− 0,030	− 0,020	− 0,018	− 0,232	− 0,030
6	+ 0,704	− 0,023	− 0,015	− 0,032	+ 0,704	− 0,023	− 0,015	− 0,032	− 0,296
7	− 0,010	+ 0,608	− 0,019	− 0,013	− 0,010	+ 0,608	− 0,019	− 0,013	− 0,010
8	0	− 0,008	+ 0,500	+ 0,004	0	− 0,008	+ 0,500	+ 0,004	0
9	+ 0,010	+ 0,013	+ 0,019	+ 0,392	+ 0,010	+ 0,013	+ 0,019	+ 0,392	+ 0,010
10	+ 0,296	+ 0,031	+ 0,015	+ 0,024	+ 0,296	+ 0,031	+ 0,015	+ 0,024	+ 0,296
11	+ 0,030	+ 0,232	+ 0,018	+ 0,020	+ 0,030	+ 0,232	+ 0,018	+ 0,020	+ 0,030
12	+ 0,008	+ 0,022	+ 0,175	+ 0,029	+ 0,008	+ 0,022	+ 0,175	+ 0,029	+ 0,008
13	+ 0,017	+ 0,016	+ 0,024	+ 0,109	+ 0,017	+ 0,016	+ 0,024	+ 0,109	+ 0,017
14	+ 0,077	+ 0,019	− 0,009	+ 0,013	+ 0,077	+ 0,019	− 0,009	+ 0,013	+ 0,077
15	+ 0,015	+ 0,019	− 0,004	+ 0,004	+ 0,015	+ 0,019	− 0,004	+ 0,004	+ 0,015

$$_{max}D_2 \sin\varphi = {}_{max}D_{2,p} \sin\varphi + D_{2,g} \sin\varphi = 54{,}4 + 6{,}4 = 60{,}8^t\,(60{,}0^t)$$
$$_{max}D_3 \sin\varphi = 47{,}8 + 5{,}6 = 53{,}4^t\,(52{,}1^t)$$
$$_{max}D_4 \sin\varphi = 41{,}3 + 4{,}8 = 46{,}1^t\,(45{,}5^t)$$
$$_{max}D_5' \sin\varphi = 35{,}5 + 4{,}0 = 39{,}5^t\,(39{,}6^t)$$
$$_{max}D_6 \sin\varphi = 28{,}1 + 3{,}2 = 31{,}3^t\,(31{,}0^t)$$
$$_{max}D_7 \sin\varphi = 22{,}5 + 2{,}4 = 24{,}9^t\,(24{,}9^t)$$
$$_{max}D_8' \sin\varphi = 17{,}9 + 1{,}6 = 19{,}5^t\,(20{,}2^t)$$
$$_{max}D_9' \sin\varphi = 13{,}4 + 0{,}8 = 14{,}2^t\,(16{,}3^t)$$
$$_{max}D_{10} \sin\varphi = 10{,}2 + 0 = 10{,}2^t\,(12{,}4^t).$$

179. Die Spannkräfte in der oberen Gurtung. Man erhält, da $\varphi = 45°$ ist,

$$O_1 = S_1 \sin\varphi - D_3 \sin\varphi$$
$$O_2 = O_1 + D_2' \sin\varphi - D_4' \sin\varphi = O_1 - 2D_4' \sin\varphi$$
$$O_3 = O_2 - 2D_5' \sin\varphi,\quad O_4 = O_3 - 2D_6 \sin\varphi,\ \text{u. s. w.}$$

Tabelle V enthält die nach diesen Formeln berechneten Ordinaten der O-Linien. In Tabelle VI haben wir diese Linien nach dem Näherungsverfahren berechnet und zwar für eine Lasteinheit von $P = 120$. Die angenäherte $S_1 \sin\varphi$-Linie zeigt Fig. 428; die Werthe $D \sin\varphi$ sind der Tabelle auf Seite 530 des ersten Bandes entnommen worden; sie mussten mit 4 multiplicirt werden, da jene frühere Untersuchung die Lasteinheit $P = 30$ voraussetzte. Dieses Näherungsverfahren führt ausserordentlich rasch zum Ziele und liefert vorzügliche Ergebnisse. Bei der Berechnung von O_1 wurden dieselben Achslasten und Rad-

stände angenommen, wie bei der Ermittlung der V, S und D. Die übrigen Werthe O sind für den neuen preussischen Belastungszug (Band I, Seite 338) berechnet worden. Man vergleiche die Figur 422,

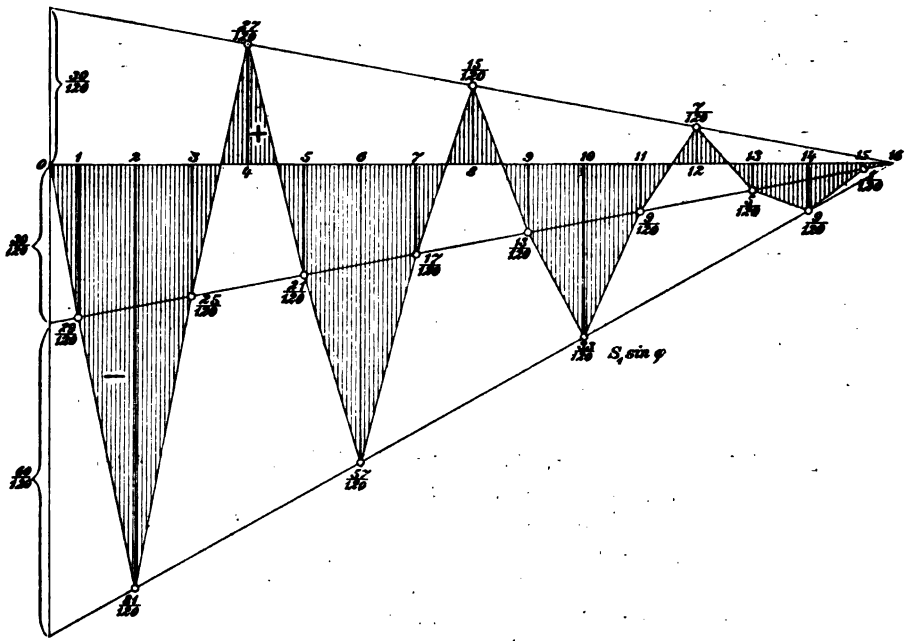


Fig. 423.

Tabelle V.

m	$-O_1$	$-O_2$	$-O_3$	$-O_4$	$-O_5$	$-O_6$	$-O_7$
1	0,228	0,236	0,198	0,168	0,160	0,168	0,130
2	0,668	0,686	0,650	0,496	0,468	0,486	0,450
3	1,102	1,054	1,024	0,990	0,770	0,746	0,716
4	— 0,254	1,396	1,352	1,336	1,278	0,928	0,884
5	0,149	0,113	1,649	1,589	1,549	1,513	1,049
6	0,495	0,465	0,401	1,809	1,763	1,733	1,669
7	0,754	0,716	0,690	0,670	1,886	1,848	1,822
8	— 0,128	0,872	0,880	0,880	0,874	1,874	1,882
9	0,117	0,155	0,939	0,959	0,985	1,023	1,807
10	0,263	0,293	0,341	0,933	0,995	1,025	1,073
11	0,313	0,349	0,389	0,449	0,913	0,949	0,989
12	— 0,003	0,347	0,405	0,421	0,465	0,815	0,873
13	0,054	0,102	0,320	0,354	0,386	0,434	0,652
14	0,087	0,069	0,095	0,249	0,287	0,269	0,295
15	0,037	0,029	0,037	0,067	0,105	0,097	0,105

Tabelle VI ($P = 120$).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$S_1 \sin\varphi$	— 29	— 81	— 25	+ 23	— 21	— 57	— 17	+ 15	— 13	— 33	— 9	+ 7	— 5	— 9	— 1
$-D_3 \sin\varphi$			— 100				— 68				— 36				— 4
O_1	— 29	— 81	— 125	+ 23	— 21	— 57	— 85	+ 15	— 13	— 33	— 45	+ 7	— 5	— 9	— 5
$-2D_4 \sin\varphi$				— 184				— 120				— 56			
O_2	— 29	— 81	— 125	— 161	— 21	— 57	— 85	— 105	— 13	— 33	— 45	— 49	— 5	— 9	— 5
$-2D_5 \sin\varphi$	+ 8				— 168				— 104				— 40		
O_3	— 21	— 81	— 125	— 161	— 189	— 57	— 85	— 105	— 117	— 33	— 45	— 49	— 45	— 9	— 5
$-2D_6 \sin\varphi$		+ 24				— 152				— 88				— 24	
O_4	— 21	— 57	— 125	— 161	— 189	— 209	— 85	— 105	— 117	— 121	— 45	— 49	— 45	— 33	— 5
$-2D_7 \sin\varphi$			+ 40				— 136				— 72				— 8
O_5	— 21	— 57	— 85	— 161	— 189	— 209	— 221	— 105	— 117	— 121	— 117	— 49	— 45	— 33	— 13
$-2D_8 \sin\varphi$				+ 56				— 120				— 56			
O_6	— 21	— 57	— 85	— 105	— 189	— 209	— 221	— 225	— 117	— 121	— 117	— 105	— 45	— 33	— 13
$-2D_9 \sin\varphi$	+ 8				+ 72				— 104				— 40		
O_7	— 13	— 57	— 85	— 105	— 117	— 209	— 221	— 225	— 221	— 121	— 117	— 105	— 85	— 33	— 13

in der die Einflusslinien für O_1 und O_5 abgebildet sind. Alle eingeklammerten Zahlen sind Ergebnisse der angenäherten Berechnung. Man erhält

$$\begin{aligned}
{}_{min}O_1 &= {}_{min}O_{1p} + O_{1g} = -85{,}4 - 12{,}2 = -98^t\ (-95^t)\\
{}_{min}O_2 &= -121{,}0 - 21{,}8 = -143^t\ (-139^t)\\
{}_{min}O_3 &= -157{,}9 - 29{,}8 = -188^t\ (-187^t)\\
{}_{min}O_4 &= -184{,}9 - 36{,}2 = -221^t\ (-221^t)\\
{}_{min}O_5 &= -204{,}1 - 39{,}4 = -244^t\ (-245^t)\\
{}_{min}O_6 &= -219{,}4 - 42{,}6 = -262^t\ (-258^t)\\
{}_{min}O_7 &= -213{,}2 - 44{,}2 = -257^t\ (-254^t).
\end{aligned}$$

180. Die Spannkräfte in der unteren Gurtung wurden mit Hilfe der Formeln

$$\begin{aligned}
U_1 &= S_4 \sin\varphi - D_3' \sin\varphi\\
U_2 &= U_1 + D_2 \sin\varphi - D_4 \sin\varphi = U_1 + 2\,D_2 \sin\varphi - P_2\\
U_3 &= U_2 + 2\,D_3 \sin\varphi - P_3 \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

untersucht. Zur Probe wurde U_7 noch mittels der Gleichung

$$U_7 = U_{o7} - X_a + X_b + X_c$$

berechnet. Tabelle VII enthält die Ordinaten der Einflusslinien. Man findet

$$\begin{aligned}
{}_{max}U_1 &= {}_{max}U_{1p} + U_{1g} = 70{,}1 + 9{,}0 = 79^t\\
{}_{max}U_2 &= 92{,}7 + 18{,}6 = 111^t\\
{}_{max}U_3 &= 126{,}1 + 26{,}6 = 153^t\\
{}_{max}U_4 &= 147{,}8 + 33{,}0 = 181^t\\
{}_{max}U_5 &= 167{,}1 + 37{,}8 = 205^t\\
{}_{max}U_6 &= 197{,}7 + 41{,}0 = 239^t\\
{}_{max}U_7 &= 215{,}9 + 42{,}6 = 258^t
\end{aligned}$$

Tabelle VII.

m	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
1	0,232	0,202	0,194	0,202	0,164	0,134	0,126
2	— 0,250	0,596	0,568	0,586	0,550	0,396	0,368
3	0,190	0,156	0,936	0,888	0,858	0,824	0,604
4	0,586	0,570	0,512	1,162	1,118	1,102	1,044
5	0,949	0,089	0,849	0,813	1,849	1,289	1,249
6	— 0,238	1,175	1,129	1,099	1.035	1,443	1,397
7	0,124	0,104	1,320	1,282	1,256	1,236	1,452
8	0,379	0,379	0,373	1,373	1,381	1,381	1,375
9	0,505	0,525	0,551	0,589	1,373	1,393	1,419
10	— 0,025	0,567	0,629	0,659	0,707	1,299	1.361
11	0,089	0,149	0,613	0,649	0,689	0,749	1,213
12	0,171	0,187	0,231	0,581	0,639	0,655	0,699
13	0,154	0,188	0,220	0,268	0,486	0,520	0.552
14	— 0,005	0,149	0,187	0,169	0,195	0.349	0,387
15	0,003	0,033	0,071	0,063	0,071	0,101	0.139

181. Eine sehr schnell zum Ziele führende angenäherte Berechnung der grössten Gurtspannkräfte ist die folgende. Man ermittle mit Hilfe der im I. Bande auf Seite 539 abgedruckten Tabelle der grössten Biegungsmomente den Werth

$$\frac{{}_{max}M_{8p}}{h} = \frac{832}{4{,}0} = 208^t,$$

ferner den Werth

$$\frac{M_{8g}}{h} = \frac{gl^2}{8h} = \frac{1{,}6 \cdot 30^2}{8 \cdot 4{,}0} = 45^t,$$

zeichne über der Stützweite l eine Parabel vom Pfeile 45^t und stelle die ${}_{max}M_p : h$-Linie nach Band I Fig. 526 durch zwei Parabelstücke und eine gerade Linie von der Länge $0{,}12\,l = 3{,}6^m$ dar. Dann setze man $O_7 = -\frac{M_8}{h}$, $O_6 = -\frac{M_7}{h}$, u. s. w. Man erhält, Fig. 424:

$$O_7 = -253^t,\ O_6 = -252^t,\ O_5 = -244^t,\ O_4 = -225^t,$$
$$O_3 = -194^t,\ O_2 = -153^t,\ O_1 = -100^t,$$

das sind Zahlen, die von den vorhin ermittelten nur wenig abweichen.

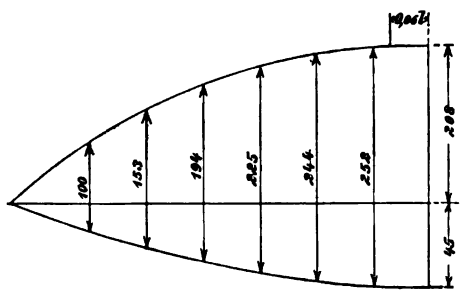


Fig. 424.

182. Einfluss einer ungleichmässigen Erwärmung. Schreibt man allen Stäben der unteren Gurtung die Temperatur t_u, den Stäben der oberen Gurtung die Temperatur t_o und den Ständern (v) und Streben (s u. d) die Temperatur t_s zu, so entsteht

$$X_{at} = \frac{\Sigma \varepsilon t S_a s}{\Sigma {S_a}^2 \frac{s}{EF}} = \frac{EF_c}{s_c} \frac{\varepsilon t_u \underset{u}{\Sigma} S_a s + \varepsilon t_o \underset{o}{\Sigma} S_a s + \varepsilon t_s \underset{s}{\Sigma} S_a s}{\Sigma {S_a}^2 \frac{s}{s_o} \frac{F_c}{F}}$$

wo $\underset{u}{\Sigma}$, $\underset{o}{\Sigma}$, $\underset{s}{\Sigma}$ sich der Reihe nach auf die untere und die obere Gurtung und auf die Füllungsglieder beziehen; und ähnliche Ausdrücke erhält man für X_b und X_c.

Mit Hilfe der Tabelle I findet man nun

$$\begin{aligned} &\sum_u S_a s = 0, \quad \sum_o S_a s = 0, \quad \sum_s S_a s = 0, \\ &\sum_u S_b s = 2{,}0, \quad \sum_o S_b s = 2{,}0, \quad \sum_s S_b s = -4, \\ &\sum_u S_c s = 0, \quad \sum_o S_c s = 0, \quad \sum_s S_c s = 0, \end{aligned}$$

mithin

$$X_{at} = 0, \quad X_{ct} = 0$$

$$X_{bt} = \frac{\varepsilon E F_c}{s_c} \frac{2t_o + 2t_u - 4t_s}{4\sum_1^7 \alpha + 4\nu' + 8\psi_1}.$$

Für unser Zahlenbeispiel ergiebt sich, wegen $F_c = 0{,}01\ qm$, $s_c = 2{,}0^m$ und $\varepsilon E = 250^t/_{qm}$

$$X_{bt} = \frac{1{,}25\,(2t_o + 2t_u - 4t_s)}{194{,}4}.$$

Macht man die wohl am nächsten liegende Annahme

$$t_s = \frac{1}{2}(t_o + t_u),$$

so erhält man $X_{bt} = 0$. Nimmt man an: $t_u = 0$, $t_o = 25°$, $t_s = 5°$, so erhält man trotz der sehr ungünstigen Voraussetzung den vernachlässigbaren Werth $X_{bt} = 0{,}2^t$. Temperaturänderungen spielen also gar keine Rolle.

183. Untersuchung der Durchbiegungen. Uebungsaufgaben. Wir beginnen mit der Berechnung der Biegungslinie für den in Fig. 425

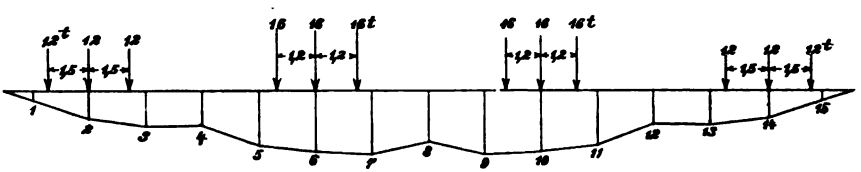


Fig. 425.

dargestellten Belastungsfall. Dieser ist so gewählt, dass die vier verschiedenen Theilsysteme möglichst ungleichmässig belastet werden. Der Strebenzug $d_2' d_4' d_6' \ldots$ wird sogar nur durch das Eigengewicht beansprucht. Die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Lasten sind, einschliesslich des Eigengewichts, der Reihe nach

$$11{,}4^t\ 21{,}2^t\ 12{,}2^t\ 3{,}2^t\ 12{,}8^t\ 32{,}0^t\ 12{,}8^t\ 3{,}2^t\ 12{,}2^t\ 21{,}2^t\ 11{,}4^t;$$

sie erzeugen in den Ständern die mittels der Einflusslinien berechneten Spannkräfte

$$V = -102{,}0^t, \quad V_u = +24{,}4^t, \quad V_o = 28{,}8^t.$$

Die übrigen Spannkräfte sind mit Hilfe der für die einzelnen Knotenpunkte aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen berechnet und in der Tabelle VIII, Spalte S', zusammengestellt worden; sie erzeugen die Längenänderungen

$$\Delta' s = \frac{S' s}{E F}.$$

Tabelle VIII.

a) Gurtungen und Ständer.

	S_{max}	F	$\frac{F_c}{F}$	$\frac{s}{s_c}$	S'	$\frac{E F_c \Delta' s}{s_c}$		S_{max}	F	$\frac{F_c}{F}$	$\frac{s}{s_c}$	S'	$\frac{E F_c \Delta' s}{s_c}$
o_1	98	125	0,80	1	− 73	− 58	u_1	79	100	1,00	1	+ 18	+ 18
o_2	143	180	0,56	1	− 83	− 46	u_2	111	140	0,71	1	+ 103	+ 73
o_3	188	275	0,36	1	− 114	− 41	u_3	153	228	0,44	1	+ 136	+ 66
o_4	221	275	0,36	1	− 178	− 64	u_4	181	228	0,44	1	+ 142	+ 62
o_5	244	328	0,30	1	− 198	− 59	u_5	205	260	0,38	1	+ 160	+ 61
o_6	262	328	0,30	1	− 201	− 60	u_6	239	325	0,31	1	+ 192	+ 60
o_7	257	328	0,30	1	− 207	− 62	u_7	258	325	0,31	1	+ 200	+ 62
v	122	166	0,60	1	− 102	− 61							
v_o	42	66	1,51	1	+ 28,8	+ 43							
v_u	44	66	1,51	1	+ 24,4	+ 37							
	t	qcm			t	t							

$F_c = 100\ qcm$

b) Diagonalen.

	S_{max}	F	$\frac{F_c\sqrt{2}}{F}$	$\frac{s}{s_c\sqrt{2}}$	$\frac{S'}{\sqrt{2}}$	$\frac{E F_c \Delta' s}{s_c \sqrt{2}}$		S_{max}	F	$\frac{F_c\sqrt{2}}{F}$	$\frac{s}{s_c\sqrt{2}}$	S'	$\frac{E F_c \Delta' s}{s_c \sqrt{2}}$
d_2	86	108	1,31	1	+ 53,2	+ 70	d_2'	64	80	1,77	1	− 4,8	− 8
d_4	44	55	2,57	2	− 32,0	− 16	d_4'	64	80	1,77	2	+ 4,8	+ 17
d_6	44	55	2,57	2	+ 32,0	+ 16	d_6'	28	35	4,04	2	− 1,6	− 13
d_8	14	25	5,66	2	0	0	d_8'	28	35	4,04	2	+ 1,6	+ 13
d_3	76	95	1,49	2	+ 22,2	+ 66	d_3'	56	70	2,02	2	− 15,6	− 63
d_5	35	44	3,22	2	− 10,0	− 64	d_5'	56	70	2,02	2	+ 15,6	+ 63
d_7	35	44	3,22	2	+ 10,0	+ 64	d_7'	20	25	5,66	2	− 2,8	− 31
d_9	20	25	5,66	2	+ 2,8	+ 31	d_9'	20	25	5,66	2	+ 2,8	+ 31
s_1	86	115	1,23	0,5	− 51	− 31							
s_2	86	115	1,23	0,5	+ 51	+ 31							
s_3	67	115	1,23	0,5	− 2,6	− 2							
s_4	67	115	1,23	0,5	+ 2,6	+ 2							

Die erste Spalte der Tabelle VIII giebt die absoluten Werthe der für die Querschnittsberechnung massgebenden grössten Spannkräfte an, sie enthält also eine Zusammenstellung der in No. 177 bis 180 berech-

neten Werthe. An Stelle der $\Delta' s$ wurden die Werthe $\frac{EF_c\Delta' s}{s_c}$ bezieh. $\frac{EF_c\Delta' s}{\sqrt{2}s_c}$ in Tonnen angegeben. Mit Hilfe dieser Zahlen findet man nun mittels der in No. 175 abgeleiteten Formeln die Verschiebungen

$\eta_1 = 0{,}5 \cdot 2\,(31 + 2) + 37 + 0{,}5 \cdot 61 = 100{,}5$

$\eta_2 = 1{,}5 \cdot 2 \cdot 31 + 0{,}5 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 37 + 1{,}5 \cdot 61 + 2 \cdot 70 - 18$
$= 280{,}5$

$\eta_3 = 2\,(-31 - 2) + 1{,}5 \cdot 2\,(31 + 2) + 37 - 2 \cdot 43 + 0{,}5 \cdot 61 + 2 \cdot 66$
$- (18 + 73) = 85{,}5$

$\eta_4 = -2 \cdot 2 \cdot 31 + 1{,}5 \cdot 2 \cdot 31 + 2{,}5 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 43 + 37$
$- 0{,}5 \cdot 61 + 2\,(17 + 8) - (18 + 73 + 66) - 2 \cdot 58 = -327{,}5$

$\eta_5 = 2 \cdot 2\,(-31 - 2) + 2{,}5 \cdot 2\,(31 + 2) - 2 \cdot 43 + 3 \cdot 37 + 0{,}5 \cdot 61$
$+ 2\,(63 + 63) - (18 + 73 + 66 + 62) - 2\,(58 + 46) = -56{,}5$

$\eta_6 = \eta_2 - 12^*) + 2\,(16 + 16) - (73 + 66 + 62 + 61)$
$+ 2\,(-58 - 46 - 41 - 18) = -255{,}5$

$\eta_7 = \eta_3 - 12 + 2\,(64 + 64) - (66 + 62 + 61 + 60)$
$+ 2\,(-58 - 46 - 41 - 64 - 18 - 73) = -519{,}5$

$\eta_8 = \eta_4 - 12 + 2\,(13 + 13) - (62 + 61 + 60 + 62)$
$+ 2\,(-58 - 46 - 41 - 64 - 59 - 18 - 73 - 66) = -1382{,}5$

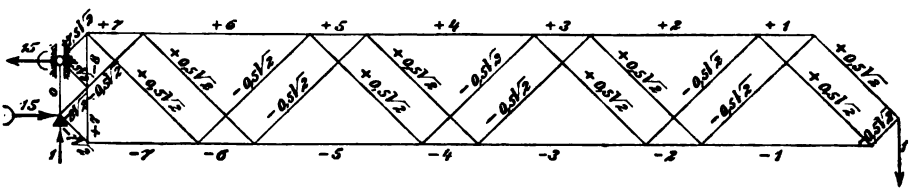


Fig. 426.

Für η_{16} ergiebt sich mit Hilfe des in Fig. 426 dargestellten Belastungsfalles der allgemeine Ausdruck

$\eta_{16} = 7{,}5\sqrt{2}(\Delta s_1 + \Delta s_2) - 8\sqrt{2}\Delta s_3 - 7\sqrt{2}\Delta s_4 + 0{,}5\sqrt{2}(\Delta s'_3 - \Delta s'_4)$
$- 8\,\Delta v_o + 7\,\Delta v_u + 7\,\Delta o_1 + 6\,(\Delta o_2 + \Delta o_3 + \Delta o_4) + 5\,\Delta o_5$
$+ 4\,(\Delta o_6 + \Delta o_7 + \Delta o_7') + 3\,\Delta o_6' + 2\,(\Delta o_5' + \Delta o_4' + \Delta o_3') + \Delta o_2'$
$- 7\,(\Delta u_1 + \Delta u_2) - 6\,\Delta u_3 - 5\,(\Delta u_4 + \Delta u_5 + \Delta u_6) - 4\,\Delta u_7$
$- 3\,(\Delta u_7' + \Delta u_6' + \Delta u_5') - 2\,\Delta u_4' - (\Delta u_3 + \Delta u_2 + \Delta u_1)$
$+ 0{,}5\sqrt{2}\,(\Delta d_3 - \Delta d_5 + \Delta d_7 - \Delta d_9 + \Delta d_{11} - \Delta d_{13} + \Delta d_{15})$
$- 0{,}5\sqrt{2}(\Delta d_2' - \Delta d_4' + \Delta d_6' - \Delta d_8' + \Delta d_{10}' - \Delta d_{12}' + \Delta d_{14}' - \Delta d_{16}')$.

Da nun ein symmetrischer Belastungsfall vorliegt und ausserdem

*) $2\,(\Delta v_u - \Delta v_o) = 2\,(37 - 43) = -12$.

$\Delta s_1 = -\Delta s_2$, und $\Delta s_3 = -\Delta s_4$ ist, so geht die vorstehende Formel über in

$$\eta_{16} = -8\Delta v_o + 7\Delta v_u + 7(+\Delta o_1 + \Delta o_2 - \Delta u_3 - \Delta u_4 + \Delta o_5 + \Delta o_6 - \Delta u_7) + 8(-\Delta u_1 - \Delta u_2 + \Delta o_3 + \Delta o_4 - \Delta u_5 - \Delta u_6 + \Delta o_7) + 0{,}5\sqrt{2}(+\Delta d_3 - \Delta d_5 + \Delta d_7 - \Delta d_9 + \Delta d_7' - \Delta d_5' + \Delta d_3').$$

Die Einsetzung der Zahlenwerthe liefert

$$\eta_{16} = -8 \cdot 43 + 7 \cdot 37 + 7(-58 - 46 - 66 - 62 - 59 - 60 - 62) + 8(-18 - 73 - 41 - 64 - 61 - 60 - 62) + 0{,}5 \cdot 2(+66 + 64 + 64 - 81 - 31 - 63 - 63)$$

d. i. abgerundet $\eta_{16} = -6000$.

Der mit $A = 107{,}2^t$ belastete untere Theil des Endständers, dessen Querschnitt 180 qcm beträgt, wird um

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} = \frac{107{,}2 \cdot 100}{2150 \cdot 180} = 0{,}03^{cm}\text{*)}$$

verkürzt, und es ergeben sich daher die Senkungen δ der Knotenpunkte aus der Formel

$$\delta_m = \frac{s_o}{EF_o}\left(\eta_m - \eta_{16}\frac{x_m}{l}\right) + 0{,}03^{cm},$$

wo

$$\frac{EF_o}{s_o} = \frac{2150 \cdot 100}{200}.$$

Man findet der Reihe nach

$$\delta = 3{,}1^{mm}\ 8{,}5^{mm}\ 10{,}4^{mm}\ 10{,}3^{mm}\ 16{,}5^{mm}\ 18{,}4^{mm}\ 19{,}7^{mm}\ 15{,}4^{mm}$$

und erkennt, dass sich bei den unbelasteten Knotenpunkten 4 und 8 in der Gurtung Knicke von $\frac{1}{2}(10{,}4 + 16{,}5) - 10{,}3 = 3{,}2^{mm}$ bezieh. $19{,}7 - 15{,}4 = 4{,}3^{mm}$ Pfeil bilden, die bei der kurzen Feldweite genügen, um in einer gelenklosen steifen Gurtung erhebliche Biegungsspannungen hervorzurufen. Aus diesem Grunde ist das untersuchte Netzwerk nur für Träger mit Bolzengelenken zu empfehlen.

Weiter möge noch die Durchbiegung δ_8 für den in Fig. 427 abgebildeten Belastungsfall angegeben werden. Da δ_8 nur von den Längenänderungen des den Strebenzug d_2', d_5', d_7', d_9' . . . . enthaltenden Theilsystems abhängig ist, so wenden wir die Formel

$$\delta_8 = \Sigma S' \frac{Ss}{EF}$$

auf die wirklichen Spannkräfte S und auf die Spannkräfte S' in Folge

*) Es wurde für Flusseisen $E = 2150000\ ^{kg}/_{qcm} = 2150\ ^{t}/_{qcm}$ gesetzt.

einer am Theilsysteme in 8 angreifenden Last 1 an. Ersetzen wir diese Last 1 durch eine Last von der Grösse 8, so nehmen die S' die in die linke Hälfte der Figur eingeschriebenen Werthe an und wir erhalten daher

$$\begin{aligned} 8\delta_8 = \Sigma S' \Delta s = 2[1 \cdot \Delta o_1 - 7(\Delta o_2 + \Delta o_3 + \Delta o_4 + \Delta o_5) - 15(\Delta o_6 + \Delta o_7) \\ + 3(\Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3) + 11(\Delta u_4 + \Delta u_5 + \Delta u_6 + \Delta u_7) \\ + 4\sqrt{2}(-\Delta d_2' + \Delta d_4' - \Delta d_6' + \Delta d_8') - \Delta v_0 - 3\Delta v_4 \\ + 2\Delta v + \sqrt{2}(\Delta s_1 - \Delta s_2) - 3\sqrt{2}(\Delta s_3 - \Delta s_4)] + \delta_0. \end{aligned}$$

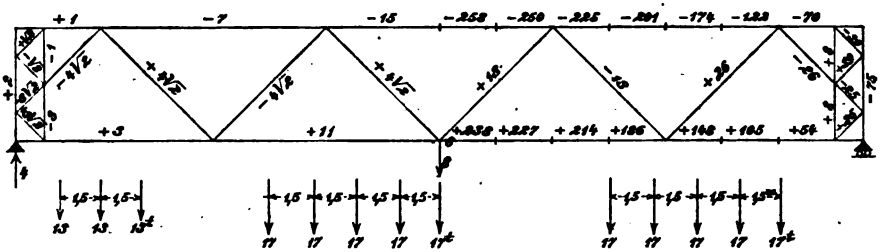


Fig. 427.

Hierin sind Δo, Δu, Δd, ... Mittelwerthe aus den Längenänderungen der einander entsprechenden Stäbe der linken und rechten Trägerhälfte. Beispielsweise erfährt der Stab o_1 durch die angegebene Verkehrslast und durch das Eigengewicht einen Druck von 75', Stab o_1' einen solchen von 65'; wir schreiben also beiden Stäben den Druck $\frac{1}{2}(75 + 65) = 70'$ zu. Auf diese Weise sind die in die rechte Hälfte des Trägernetzes eingetragenen Spannkräfte bestimmt worden. Die für die geneigten Stäbe angegebenen Werthe sind noch mit $\sqrt{2}$ zu multipliciren. δ_0 bedeutet die Verkürzung des untersten Theiles des Endständers. Man erhält schliesslich

$$\delta_8 = 23^{mm} = \frac{1}{1300}\, l.$$

Die in Fig. 425 dargestellte Biegungslinie lässt sich durch Hinzufügung eines Mittelständers, der mit den ihn kreuzenden Diagonalen befestigt werden muss, erheblich verbessern. Es werden gewissermassen die vier Theilsysteme an der Stelle 8 mit einander verbunden und gezwungen, sich bei 8 gleichstark durchzubiegen. Die Berechnung dieses fünffach statisch unbestimmten Systems ist ziemlich einfach und keineswegs zeitraubend, sie sei dem Leser als Uebungsaufgabe empfohlen. Mit der Anzahl eingeschalteter Ständer bessert sich einerseits die

Uebereinstimmung der Biegungslinien der Theilsysteme, während andererseits die Schwierigkeiten der genauen Berechnung wachsen.

Als weitere Uebungsaufgaben empfehlen wir die Untersuchung des in Fig. 429 dargestellten fünffach statisch unbestimmten sechstheiligen Netzwerks, dessen Elasticitätsbedingungen sich leicht von

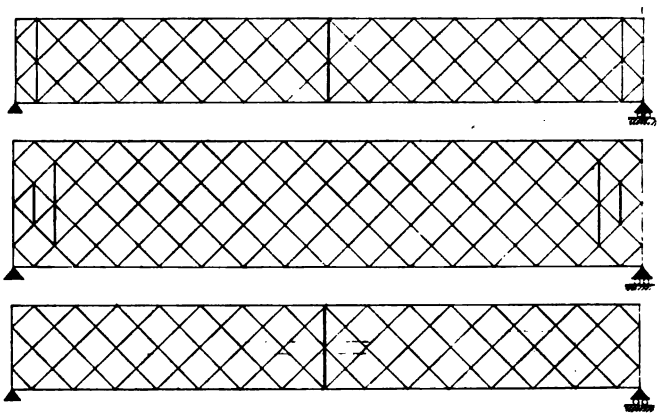


Fig. 428.

Fig. 429.

Fig. 430.

einander unabhängig machen lassen und schliesslich des in Fig. 430 abgebildeten einfach statisch unbestimmten Systemes, dessen Hauptsystem im Band I, No. 228, untersucht worden ist.

§ 18.

Untersuchung der Formveränderung eines viertheiligen statisch bestimmten Netzwerks Mehrtens'scher Bauart.

184. Die Besprechung des Verschiebungsplanes des in Fig. 432 dargestellten Netzwerks muss ich durch eine Bemerkung einleiten, die sich auf einen zwischen Herrn Professor G. Mehrtens und mir in der Deutschen Bauzeitung stattgehabten Meinungsaustausch bezieht.*) Die Veranlassung hierzu gab die im ersten Bande dieses Werkes an einem mehrtheiligen Fachwerke Mehrtens'scher Bauart von mir geübte Kritik. Ich hob auf Grund einer allgemeinen Untersuchung des statisch bestimmten mehrtheiligen Netzwerks und der Berechnung eines Sonderfalles (I, No. 227) hervor, dass der Schlusssatz einer von Herrn Mehrtens über derartige Fachwerke veröffentlichten Abhandlung in allen Punkten unrichtig sei, und betonte besonders, dass von dem seitens des Herrn Mehrtens den Netzwerken seiner Bauart zugeschriebenen Vorzuge, alle Lasten *gleichmässig* über das gesammte Stabwerk zu vertheilen, gar keine Rede sein könne. Ich zeigte, dass in der Diagonale D_2 des als Beispiel untersuchten *vier*theiligen Trägers sogar eine Spannkraft erzeugt wird, die ebenso gross ist, als in der Diagonale eines *ein-*

*) Deutsche Bauzeitung 1901, No. 80 u. No. 90 und 1902, No. 12.

theiligen Systems gleicher Spannweite und wies darauf hin, dass man mit mehrtheiligen Fachwerken vor allem das Streben nach Verkleinerung der Bean-

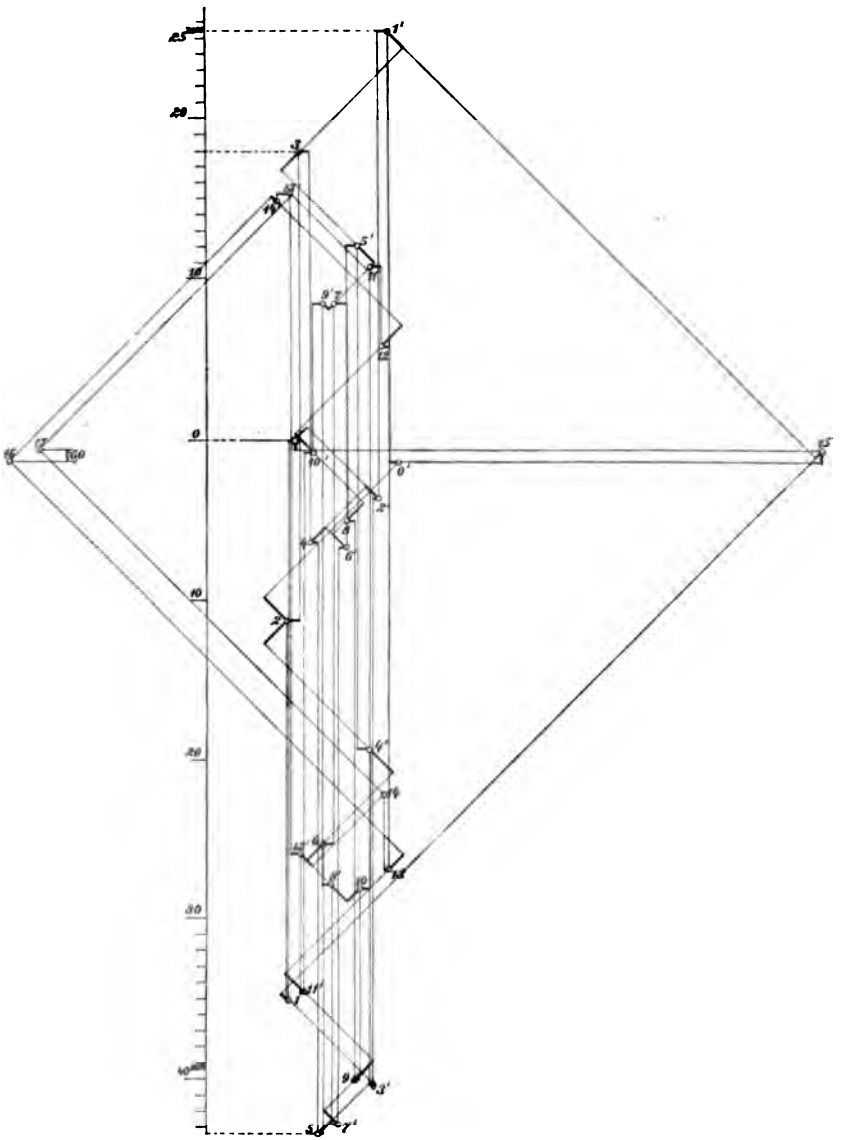


Fig. 431.

spruchung der Wandglieder verbinden müsse. Nach einem erfolglosen Versuche, die Behauptung einer gleichmässigen Beanspruchung seines Stabwerks zu recht-

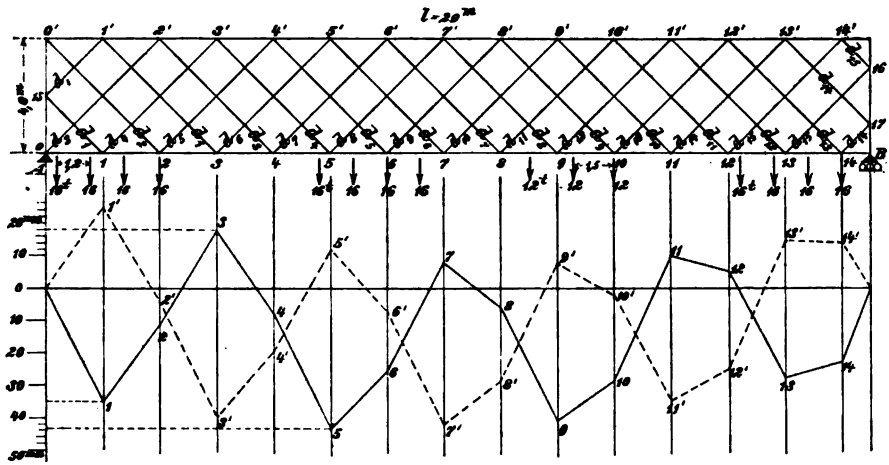


Fig. 432.

	S_{max}	F	s	S'	$\frac{S's}{F}$		S_{max}	F	s	S'	$\frac{S's}{F}$
o_1	111	140	200	— 108	— 154	u_1	76	95	200	— 40	— 84
o_2	177	235	200	— 162	— 138	u_2	138	175	200	— 14	— 16
o_3	188	235	200	— 83	— 71	u_3	178	225	200	+ 177	+ 157
o_4	233	325	200	— 80	— 49	u_4	230	290	200	+ 228	+ 157
o_5	257	325	200	— 245	— 151	u_5	212	290	200	+ 142	+ 98
o_6	302	380	200	— 293	— 154	u_6	254	325	200	+ 113	+ 70
o_7	275	380	200	— 210	— 111	u_7	258	325	200	+ 246	+ 151
o_8	286	380	200	— 146	— 77	u_8	288	360	200	+ 281	+ 156
o_9	262	380	200	— 248	— 131	u_9	233	310	200	+ 180	+ 116
o_{10}	300	380	200	— 270	— 142	u_{10}	248	310	200	+ 107	+ 69
o_{11}	209	285	200	— 159	— 112	u_{11}	208	290	200	+ 190	+ 131
o_{12}	226	285	200	— 68	— 48	u_{12}	231	290	200	+ 209	+ 144
o_{13}	138	200	200	— 133	— 133	u_{13}	102	150	200	+ 80	+ 107
o_{14}	160	200	200	— 149	— 149	u_{14}	119	150	200	— 40	+ 53
d_1*)	53	70	283 566	+ 38	+ 154 + 307	d_{10}	61	80	566	+ 16	+ 111
						d_{11}	97	125	566	— 78	— 353
d_2	157	200	566	+ 153	+ 433	d_{12}	79	100	566	— 64	— 362
d_3	108	135	566	— 56	— 235	d_{13}	85	115	566	+ 46	+ 226
d_4	37	50	566	— 3	— 34				141		+ 14
d_5	117	150	566	+ 117	+ 441	d_{14}	90	115	424	+ 11	+ 40
d_6	48	60	566	+ 34	+ 321				566		+ 54
d_7	95	125	566	— 65	— 294				141		— 99
d_8	57	80	566	— 39	— 276	d_{15}	142	150	424	— 105	— 297
d_9	96	125	566	+ 72	+ 326				566		— 396

$V_1 = O_1,\ V_2 = O_2,\ V_3 = O_{14}$

*) Die Spannkraft D ist für eine $\frac{\text{linkssteigende}}{\text{rechtssteigende}}$ Diagonale als $\frac{\text{Zug}}{\text{Druck}}$ positiv angenommen. Vergl. Band I, Seite 516.

fertigen*), erklärt Herr Mehrtens schliesslich: „Er habe durchaus nicht an eine gleichmässige *Spannkraft*vertheilung gedacht, sondern die konstruktiven Mängel der ungleichmässigen Formänderungen im Auge gehabt, die daraus entspringen, dass die einzelnen Theilsysteme der Wand bei den in Vergleich gezogenen unbestimmten Anordnungen die wandernden Einzellasten nicht gleichmässig übertragen. Bei der üblichen Zerlegung in Theilsysteme erscheine sogar nur dasjenige Wandsystem gespannt, in welchem die Knotenlast P liegt; alle anderen Wandsysteme seien spannungslos.“ Mit seinen mehrtheiligen Wandgliederungen behauptet nun Herr Mehrtens, bessere Wirkungen zu erzielen; dass er sich aber auch in diesem Punkte irrt, beweist der in Fig. 431 für einen Träger seiner Bauart (Fig. 432) — dasselbe viertheilige Netzwerk, dessen Beanspruchung in Band I, No. 227 untersucht worden ist — gezeichnete Verschiebungsplan. Die beigegebene Tabelle enthält die absoluten Werthe der mittels Einflusslinien und auf Grund der im Band I angegebenen Belastungen gefundenen grössten Spannkräfte S, ferner die Querschnitte und Längen der Stäbe, die Spannkräfte S' in Folge der in Fig. 432 dargestellten Belastung (Zugstellung für $_{max}D_3$) einschliesslich der Wirkung des Eigengewichts und die Werthe $E\Delta s = \frac{S's}{F}$ in $t:cm$. Das feste Auflager liegt bei Stütze 0. Die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte 1 und 2 wurden mit Hilfe der Formel $\delta = \Sigma S' \Delta s$ berechnet, ihre wagerechten Verschiebungen sind Δu_1 und $\Delta u_1 + \Delta u_2$. Zur Bestimmung der Verschiebungen der übrigen Knotenpunkte wurde das Williot'sche Verfahren benutzt. Als Zeichnungsproben standen die Bedingungen zur Verfügung, dass die gegenseitige senkrechte Verschiebung der Knotenpunkte 16 und 17 gleich der Längenänderung des Stabes 16—17 und die Senkung des Punktes 17 gleich der Verkürzung des Stabes $17B$ sein muss. Ausserdem wurde die Senkung des Knotenpunktes 5 nachträglich noch gerechnet; sie stimmte mit der zeichnerisch gefundenen genau überein.

Das Ergebniss dieser Untersuchung ist ausserordentlich ungünstig. Die grösste Durchbiegung beträgt 43^{mm}, also $\frac{1}{700}$ der Stützweite. Die in Fig. 432 dargestellten Biegungslinien der Gurtungen bilden einen Zickzack, gegen den sich die Knicke in der für das unbestimmte System gefundenen und in demselben Massstabe gezeichneten Linie recht winzig ausnehmen. Neun Knotenpunkte bewegen sich aufwärts. Die Strecke, um die Punkt 1′ nach oben rückt, ist grösser als die grösste Durchbiegung des vorhin untersuchten unbestimmten Systems. Die gegenseitige senkrechte Verschiebung der Punkte 1 und 1′ beträgt 60^{mm} d. i. $\frac{1}{480}$ der Stützweite. Und ebenso gross ist auch die gegenseitige senkrechte Verschiebung der nur 4^{m} von einander entfernt liegenden Knotenpunkte 3 und 5. Der erste Knotenpunkt neben dem festen Auflager senkt sich bereits um 35^{mm}. Dies hat eine ganz unzulässige Drehung des Stabdreiecks 0—15—1 zur Folge und bewirkt, dass sich der Knotenpunkt 15 um rund 40^{mm} in wagerechter Richtung verschiebt. Da nun die wagerechte Verschiebung des oberen Endpunktes 0′

*) S. Deutsche Bauzeitung 1901, No. 80. Dort verlangt Herr Mehrtens, dass man eine gleichmässige Vertheilung der Lasten immer dann anerkenne, wenn sämmtliche Stäbe an deren Uebertragung theilnehmen, ohne Rücksicht auf das Gesetz, das diese Theilnahme regelt und ohne zu prüfen, ob hierbei nicht etwa die grösste Unregelmässigkeit herrscht.

des Endständers verhältnissmässig gering ist, so zeigt der nur 4^m hohe Endständer in der Mitte einen Knick von rund 35^{mm} Pfeil. Beim Anblick dieser beiden merkwürdigen Biegungslinien wird man unwillkürlich an die bekannte Nürnberger Scheere erinnert.

Unsere Untersuchung zeigt, dass der in Fig. 432 dargestellte Träger in jeder Hinsicht eine verfehlte Konstruktion ist. Zu den ungünstigen statischen Eigenschaften tritt noch — bei der Vergleichung mit dem unbestimmten Netzwerke — trotz der kleineren Spannweite ein Mehrgewicht von etwa 25 v. H., ferner der aus der unsymmetrischen Gestalt für Zeichenstube und Werkstatt entspringende, die Herstellungskosten unnöthig erhöhende grössere Arbeitsaufwand.

§ 19.

Herleitung der Biegungslinien aus den Momentenlinien.

185. Wir schliessen unsere Untersuchung des ebenen Fachwerks mit der Angabe eines Verfahrens: die Biegungslinien in der Weise aus den Momentenlinien herzuleiten, dass die Ermittlung der Durchbiegungen für eine Reihe von Belastungsfällen immer nur die Neubestimmung der Momentenlinie erfordert, während alle von den Querschnittsabmessungen und Stablängen abhängigen Grössen nur einmal berechnet werden müssen.

Zu diesem Zweck setzen wir voraus, es seien die Stabkräfte durch die auf die Knotenpunkte . . . $(m-1)$, m, $(m+1)$ . . . bezogenen Angriffsmomente . . . M_{m-1}, M_m, M_{m+1}, . . . ausgedrückt und auf die Form

$$(1)\quad S = \ldots\ldots + \psi_{m-1} M_{m-1} + \psi_m M_m + \psi_{m+1} M_{m+1} + \ldots\ldots$$

gebracht, unter ψ Werthe verstanden, welche von dem jeweiligen Belastungszustande unabhängig sind. Es ist dann nach Seite 115 der Einfluss der Aenderung Δs einer Stablänge s auf die Gewichte w:

$$(2)\quad \ldots\ldots,\ w_{m-1} = \psi_{m-1}\Delta s,\ w_m = \psi_m \Delta s,\ w_{m+1} = \psi_{m+1}\Delta s, \ldots\ldots$$

oder, wenn $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$ gesetzt und S mittels Gleich. (1) bestimmt wird:

$$w_{m-1} = \frac{\psi_{m-1} s}{EF}\,(\ldots \psi_{m-1} M_m + \psi_m M_m + \psi_{m+1} M_{m+1} \ldots)$$

$$w_m = \frac{\psi_m s}{EF}\,(\ldots \psi_{m-1} M_m + \psi_m M_m + \psi_{m+1} M_{m+1} \ldots)$$

Bildet man auf diese Weise die Beiträge, welche die einzelnen Stäbe zu den Gewichten w liefern, so gelangt man schliesslich zu Ausdrücken von der Form:

$$w_m = \ldots\ldots + \frac{M_{m-1}}{a_{(m-1)m}} + \frac{M_m}{a_{m,m}} + \frac{M_{m+1}}{a_{(m+1)m}} + \ldots\ldots$$

worin die Werthe a von der Gestalt des Fachwerks und den Querschnittsabmessungen abhängig sind, nicht aber von dem Belastungszustande.

Anstatt nun die Durchbiegungen mit Hilfe eines Seilpolygons zu bestimmen, welches mit der Polweite *Eins* zu den Gewichten w gezeichnet wird, kann man auch in der Weise verfahren, dass man das Gewicht w_m (und ebenso alle übrigen w) durch die Gewichte

$$\ldots\ldots M_{m-1},\ M_m,\ M_{m+1},\ \ldots\ldots$$

in den Abständen

$$\ldots\ldots a_{(m-1)m},\ a_{(m+1)m}\ \ldots\ldots$$

vom Pole O ersetzt. Denn die nach den Endpunkten der Gewichte $\ldots\ldots M_{m-1},\ M_m,\ M_{m+1},\ \ldots\ldots$ gezogenen Strahlen zerlegen w_m in die Abschnitte:

$$\ldots\ldots,\ M_{m-1}\frac{1}{a_{(m-1)m}},\quad M_m\frac{1}{a_{mm}},\quad M_{m+1}\frac{1}{a_{(m+1)m}},\ \ldots\ldots$$

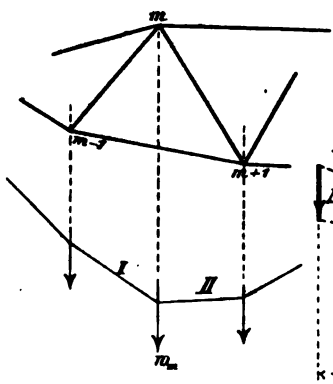


Fig. 433a.

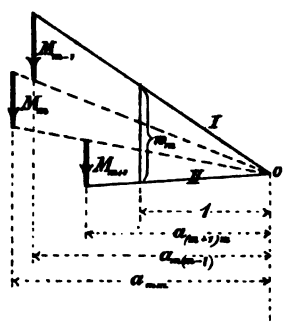


Fig. 433b.

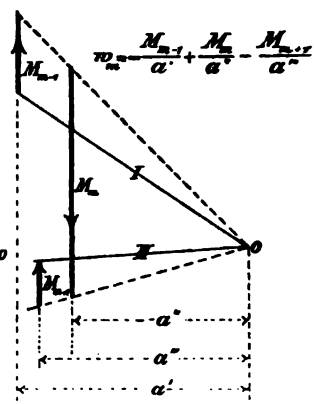


Fig. 433c.

Vergl. Fig. 433b, in der ein von drei Momenten abhängiges Gewicht w vorausgesetzt wurde. Treten negative Werthe a auf, so werden die entsprechenden M als negative Gewichte aufgefasst, wie dies die in der Regel vorliegende Figur 433c angiebt.

Durch die im Vorstehenden beschriebene Aenderung des Kräftezuges ist das gesteckte Ziel erreicht. Die von den Lasten unabhängigen Werthe a werden ein für allemal berechnet, und die Untersuchung eines neuen Belastungszustandes erfordert nur die Aufzeichnung der neuen Momentenlinie. Ein Beispiel möge das Verfahren erläutern.

186. *Zahlenbeispiel.* Es liege der in Fig. 435 dargestellte Hauptträger einer Eisenbahnbrücke von 86^m Spannweite mit 10 Feldern vor.

Die Spannkraft in einem Stabe der oberen Gurtung ist (Fig. 434):

$$O_m = -\frac{M_m}{r_m}$$

und die Aenderung der Stablänge o_m hat nur Einfluss auf w_m; sie erzeugt:

$$w_m = -\frac{\Delta o_m}{r_m} = -\frac{O_m o_m}{EF_m r_m} = +\frac{M_m o_m}{EF_m r_m^2}$$

und man erhält, mit den in der folgenden Zusammenstellung angegebenen Querschnittsabmessungen, zunächst für $E = 1$ die nachstehenden Beiträge zu den Gewichten w_1, w_2, w_5.

Stab	o_m	r_m	F_m	
o_1	7,31	3,58	0,0160	$w_1 = 35{,}64\, M_1$
o_2	7,23	4,58	0,0320	$w_2 = 10{,}77\, M_2$
o_3	7,20	4,92	0,0320	$w_5 = 9{,}30\, M_5$
	Meter		*qm*	

Dem Untergurtstabe u_k entspricht (wegen $r_k = h_k$)

$$w_k = \frac{M_k u_k}{EF_k h_k^2}, \text{ d. i.}$$

Stab	u_k	r_k	F_k	
u_2	7,20	4,28	0,0240	$w_2 = 16{,}38\, M_2$
u_4	7,20	4,92	0,0320	$w_4 = 9{,}30\, M_4$

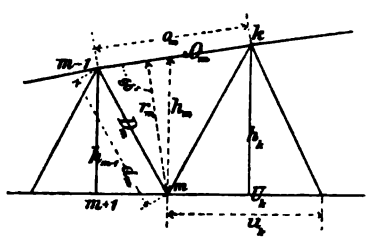


Fig. 434.

Für die Diagonale des m^{ten} Feldes ergiebt sich:

$$D_m = \left(\pm\frac{M_m}{h_m} \mp \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right)\frac{d_m}{\lambda_m}$$

wobei die oberen Vorzeichen für eine linkssteigende, die unteren für eine rechtssteigende Diagonale gelten. Aus der Gleichung für D_m folgt

$$w_m = +\frac{\Delta d_m}{h_m}\cdot\frac{d_m}{\lambda_m} = \pm\frac{D_m d_m}{EF_m h_m}\cdot\frac{d_m}{\lambda_m} = \frac{d_m^2}{EF_m \lambda_m^2 h_m^2} M_m - \frac{d_m^2}{EF_m \lambda_m^2 h_{m-1} h_m} M_{m-1}$$

$$w_{m-1} = \mp\frac{\Delta d_m}{h_{m-1}}\frac{d_m}{\lambda_m} = \mp\frac{D_m d_m}{EF_m h_{m-1}}\frac{d_m}{\lambda_m} = -\frac{d_m^2}{EF_m \lambda_m^2 h_{m-1} h_m} M_m + \frac{d_m^2}{EF_m \lambda_m^2 h_{m-1}^2} M_{m-1}$$

Stab	d_m	F_m	
d_1	4,69	0,0210	$w_1 = 28{,}61\,M_1$
d_2	5,59	0,0150	$w_2 = 49{,}05\,M_2 - 57{,}68\,M_1$; $w_1 = -57{,}68\,M_2 + 67{,}82\,M_1$
d_3	5,59	0,0070	$w_3 = 90{,}99\,M_3 - 97{,}80\,M_2$; $w_2 = -97{,}80\,M_3 + 105{,}11\,M_2$
d_4	6,10	0,0060	$w_4 = 120{,}59\,M_4 - 128{,}98\,M_3$; $w_3 = -128{,}98\,M_4 + 137{,}95\,M_3$
d_5	6,10	0,0060	$w_5 = 120{,}59\,M_5 - 120{,}59\,M_4$; $w_4 = -120{,}59\,M_5 + 120{,}59\,M_4$

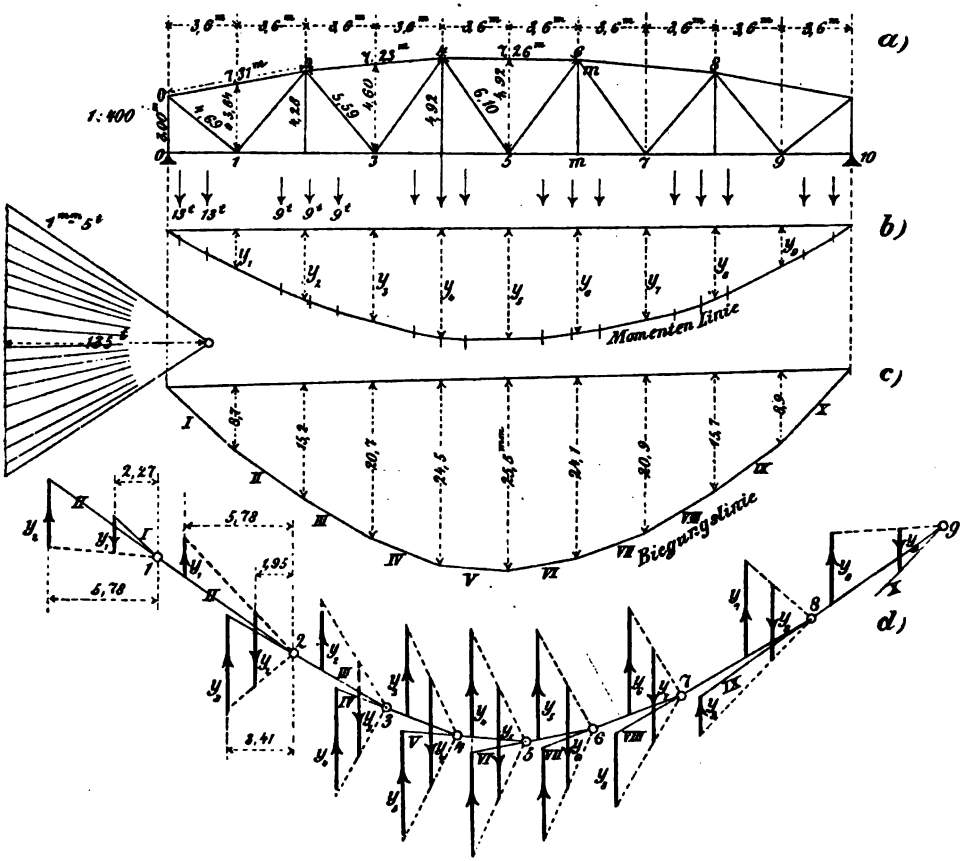


Fig. 435.

Dem linken Endständer entspricht

$$V_0 = -\frac{M_1}{\lambda} \text{ also } w_1 = -\frac{\Delta h_0}{\lambda} = -\frac{V_0 h_0}{E F_0 \lambda} = +\frac{M_1 h_0}{E F_0 \lambda^2}$$

und mit $F_0 = 0{,}0160\ qm$:

$$w_1 = 14{,}47\,M_1.$$

Für den Pfosten mm in Fig. 435 würde man, wenn K_m die Belastung des Knotens m bedeutet, erhalten:

$$V_m = + K_m = Q_{m+1} - Q_m = \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda} - \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda}$$

mit $$w_{m+1} = \frac{\Delta h_m}{\lambda},\ w_m = -\frac{2}{\lambda}\Delta h_m,\ w_{m-1} = +\frac{\Delta h_m}{\lambda},$$

worein zu setzen:

$$\Delta h_m = \frac{V_m h_m}{EF} = \frac{h_m}{EF\lambda}\ (M_{m+1} - \angle M_m - M_{m-1}).$$

Eine derartige umständliche Berücksichtigung der Längenänderungen Δh der Zwischenpfosten ist jedoch im vorliegenden Falle entbehrlich. Man denke sich diese Stäbe vielmehr beseitigt, zeichne eine Biegungslinie, welche die lothrechten Verschiebungen der Knoten 1, 3, 5, 7, 9 der unteren Gurtung und der Knoten 0, 2, 4, 6, 8, 10 der oberen Gurtung angiebt und beachte schliesslich, dass sich die Verschiebungen von zwei durch einen lothrechten Stab verbundenen Knoten um die Längenänderungen dieses Stabes unterscheiden (vgl. S. 103).

Die Zusammenzählung der an denselben Knotenpunkten angreifenden Gewichte w ergiebt nun:

$w_1 = 35{,}64\ M_1 + 28{,}61\ M_1 - 57{,}68\ M_2 + 67{,}82\ M_1 + 14{,}47\ M_1$, d. i.
$w_1 = 146{,}55\ M_1 - 57{,}68\ M_2$ und ebenso:
$w_2 = -\ 57{,}68\ M_1 + 170{,}54\ M_2 - 97{,}80\ M_3$
$w_3 = -\ 97{,}80\ M_2 + 239{,}71\ M_3 - 128{,}98\ M_4$
$w_4 = -\ 128{,}98\ M_3 + 250{,}48\ M_4 - 120{,}59\ M_5$
$w_5 = -\ 120{,}59\ M_4 + 250{,}48\ M_5 - 120{,}59\ M_6$,*)

und zwar gelten diese Werthe für $E = 1$. Wird beispielsweise $E = 1\,800\,000^t/qcm = 18\,000\,000^t/qm$ gesetzt, so sind sämmtliche w durch 18000000 zu dividiren.

Die Momente M werden zweckmässig mit Hilfe eines Seilpolygons auf die Form

$$M_m = H y_m$$

gebracht, wo H die Polweite bedeutet. Wird H in Tonnen ausgedrückt, so müssen die y im Längenmaassstabe der Trägerzeichnung gemessen und in Metern ausgedrückt werden. Die Gewichte w sind Zahlen.

In unserem Beispiele wählen wir für den Träger den Maassstab 1 : 400 und für die Durchbiegungen den Maassstab 1 : 1; ferner $H = 135^t$. Wir müssen dann in die für die Gewichte w gefundenen Ausdrücke setzen:

$$M_m = \frac{135 \cdot y_m}{18\,000\,000} \cdot \frac{400}{1} = \frac{3 y_m}{1000}$$

und erhalten:

$$w_1 = 146{,}55\,\frac{3 \cdot y_1}{1000} - 57{,}68\,\frac{3 y_2}{1000} = \frac{y_1}{2{,}27} - \frac{y_2}{5{,}78}$$

und auf dieselbe Weise:

$$w_2 = -\frac{y_1}{5{,}78} + \frac{y_2}{1{,}95} - \frac{y_3}{3{,}41} \qquad w_6 = -\frac{y_5}{2{,}76} + \frac{y_6}{1{,}33} - \frac{y_7}{2{,}76}$$

$$w_3 = -\frac{y_2}{3{,}41} + \frac{y_3}{1{,}39} - \frac{y_4}{2{,}58} \qquad w_7 = -\frac{y_6}{2{,}58} + \frac{y_7}{1{,}39} - \frac{y_8}{2{,}58}$$

$$w_4 = -\frac{y_3}{2{,}58} + \frac{y_4}{1{,}33} - \frac{y_5}{2{,}76} \qquad w_8 = -\frac{y_7}{3{,}41} + \frac{y_8}{1{,}95} - \frac{y_9}{3{,}41}$$

$$w_5 = -\frac{y_4}{2{,}76} + \frac{y_5}{1{,}33} - \frac{y_6}{2{,}76} \qquad w_9 = -\frac{y_8}{5{,}78} + \frac{y_9}{2{,}27}.$$

*) Bei Berechnung von w_6 denke man an den Einfluss von D_6.

Die in den Nennern stehenden Zahlen geben die Polweiten a der Gewichte y in Metern an, sie werden im Maassstabe 1 : 400 aufgetragen.

Nach Erledigung dieser vorbereitenden Rechnungen, welche für jedes Fachwerk nur einmal auszuführen sind, ist man im Stande, die Biegungslinien *I, II, III* . . . . für irgend einen Belastungszustand schnell aus dem die Momentenlinie vorstellenden Seilpolygone abzuleiten.

Die Richtung der Seite *I* wird willkürlich angenommen. Mit Hilfe von y_1 und y_2 wird die Richtung der Seite *II* festgestellt, hierauf mittels y_1, y_2, y_3 die Richtung von *II* u. s. w. Man vergleiche Fig. 435[d], welche durch wiederholte Anwendung des in Fig. 433[c] dargestellten Verfahrens entstanden ist und einer weiteren Erläuterung kaum bedarf. Die Punkte 1, 2, 3, . . . dieser Figur sind in so grossen Abständen von einander angenommen worden, dass die den einzelnen Knoten entsprechenden Kräftezüge y_{m-1}, y_m, y_{m+1} gut überschaut werden können.

187. Das in No. 184 beschriebene Verfahren zur Ermittlung der Biegungslinien gilt auch für den Fall beliebig gerichteter äusserer Kräfte, denn seine Anwendung erheischt nur die Bestimmung der Stabkräfte mit Hilfe der Angriffsmomente. Für das in Fig. 436 dargestellte Ständerfachwerk gelten die in No. 83 und No. 124 abgeleiteten Formeln, die wir hier noch einmal übersichtlich zusammenstellen wollen.

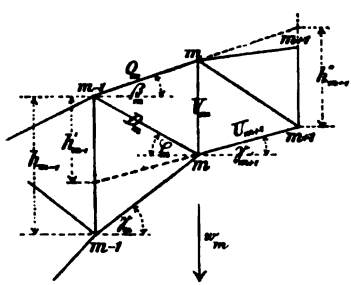


Fig. 436.

(1) $$O_m = -\frac{M^u_m}{h_m \cos\beta_m}; \quad U_m = +\frac{M^o_{m-1}}{h_{m-1}\cos\gamma_m}$$

(2) $$D_m \cos\varphi_m = \frac{M^o_m}{h_m} - \frac{M^o_{m-1}}{h_{m-1}} = \frac{M^u_m}{h_m} - \frac{M^u_{m-1}}{h_{m-1}}$$

gültig für Fahrbahn oben und Fahrbahn unten.

(3) $$V_m = \frac{M^o_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M^o_m h'_{m-1}}{\lambda_m h_m} \quad \text{(Fahrbahn oben.)}$$

(4) $$V_m = \frac{M^u_m h''_{m-1}}{\lambda_{m+1} h_m} - \frac{M^u_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \quad \text{(Fahrbahn unten.)}$$

Die Strecken h'_{m-1} und h''_{m+1} sind durch die Verlängerungen von O_m und U_{m+1} bestimmt. Aus den Gleichungen 1—4 ergeben sich die folgenden Einflüsse der Längenänderungen Δo_m, Δu_m, Δd_m, Δh_m auf die Gewichte w_m

$$w_m = -\frac{\Delta o_m}{h_m \cos\beta_m}; \quad w_{m-1} = +\frac{\Delta u_m}{h_{m-1}\cos\gamma_m}$$

$$w_m = \frac{\Delta d_m}{h_m}, \quad w_{m-1} = -\frac{\Delta d_m}{h_{m-1}}$$

gültig für die Biegungslinien der oberen und unt. Gurtung.

$$w_{m-1} = + \frac{\Delta h_m}{\lambda_m}$$

$$w_m = - \frac{\Delta h_m}{\lambda_m} \frac{h'_{m-1}}{h_m}$$

} nur für die Biegungslinie der oberen Gurtung gültig.

$$w_m = + \frac{\Delta h_m h''_{m+1}}{\lambda_{m+1} h_m}$$

$$w_{m+1} = - \frac{\Delta h_m}{\lambda_{m+1}}$$

} nur für die Biegungslinie der unteren Gurtung gültig.

Mit Hilfe dieser Gleichungen ist es möglich, die Gewichte w_m durch die Momente M' und M'' auszudrücken.

Literatur zum II. Abschnitt.

Mohr, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover 1874 S. 509 u. 1875 S. 17. Grundlegende Arbeit, welche bereits am Schluss unserer Einleitung erwähnt worden ist.

Fränkel, *Anwendung der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes auf die Bestimmung der Formänderung von Fachwerken u. s. w.* Civilingenieur 1875, S. 121.

Winkler, *Beitrag zur Theorie der Bogenträger.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1879, S. 199.

Mohr, *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkträger.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1881, S. 243.

Müller-Breslau, *Theorie der durch einen Balken versteiften Kette.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1881 S. 57 und 1883 S. 347. Enthält die erste genauere Theorie dieser Trägerart.

Müller-Breslau, *Theorie des durch einen Balken verstärkten steifen Bogens.* Civilingenieur 1883, S. 18. Sonderdruck im Verlag von Arthur Felix in Leipzig.

Müller-Breslau, *Influenzlinien für continuirliche Träger mit drei Stützpunkten.* Wochenblatt f. Archit. u. Ing. 1883, S. 353.

Müller-Breslau, *Zur Theorie der Versteifung labiler und flexibler Bogenträger.* Zeitschr. f. Bauwesen 1883, S. 312.

Swain, *On the application of the principle of virtual velocities to the determination of the deflection and stresses of frames.* Journal of the Franklin Institute 1883, Febr. bis April, S. 102, 194, 250.

Stelzel, *Berechnung der Ferdinandsbrücke in Graz.* Enthalten in der Schrift: v. Gabriely u. Winter, Ferdinandsbrücke in Graz, Mittheilungen des Polytechnischen Klubs in Graz 1883.

Müller-Breslau, *Beitrag zur Theorie des durch einen Balken versteiften Bogens.* Zeitschr. f. Bauwesen 1884, S. 323.

Krohn, *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Anwendung desselben zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkträger.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover 1884, S. 269. Verwerthet den Maxwell'schen Satz in Verbindung mit dem Williot'schen Verschiebungsplan.

Müller-Breslau, *Vereinfachung der Theorie der statisch unbestimmten Bogenträger.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover 1884, S. 575. Ein Sonderdruck erschien bei Schmorl u. von Seefeld in Hannover.

Müller-Breslau, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover 1885. Enthält die Zurückführung der Einflusslinien statisch unbestimmter Grössen auf Biegungslinien, ohne hinsichtlich dieser Grössen einschränkende Voraussetzungen zu machen.

Melan, *Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Stabsysteme.* Zeitschr. des österr. Archit. u. Ing.-Ver. 1884, S. 100.

Melan, *Theorie der eisernen Bogenbrücken* in Handbuch der Ingenieurwissenschaften, II. Band, IV. Abtheilung. 1888.

Land, *Ueber die Ermittlung und die gegenseitigen Beziehungen der Einflusslinien für Träger.* Zeigt u. A. die Bestimmung der Festpunkte durchgehender Balken mit Hilfe von Biegungslinien (Seite 387, Fig. 368 unseres Buches). Das von uns in Fig. 189 gegebene allgemeine Gesetz wird von Land für einige Sonderfälle entwickelt. Zeitschr. f. Bauwesen 1890, S. 165.

Müller-Breslau, *Ueber einige Aufgaben der Statik, welche auf Gleichungen der Clapeyronschen Art führen.* Enthält die auf Seite 390 dieses Buches gegebene Lösung der Gleichungen $\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r$ nebst verschiedenen Anwendungen. Centralblatt d. Bauverwaltg. 1891. Sonderdruck bei Ernst u. Sohn, Berlin.

Müller-Breslau, *Berechnung statisch unbestimmter Auslegerbogenbrücken,* Centralblatt d. Bauverwaltg., 1898.

Druck von Grimme & Trömel in Leipzig.

Uebersicht und Eintheilung des Werkes

Die Graphische Statik der Bauconstructionen

von

Heinrich F. B. Müller-Breslau.

Hiervon bisher vorliegend:

Band I:

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene. Trägheitsmomente und Centrifugalmomente ebener Querschnitte. Spannungen in geraden Stäben. Theorie der statisch bestimmten Träger mit Ausschluss der Untersuchung der Formänderungen. 3. wesentlich vermehrte Auflage 1901. Mit 541 Textfiguren und 7 lithographischen Tafeln. Brosch. 18 Mk. In Halbfranz geb. 20 Mk.

Band II, Abth. 1:

Formänderung ebener Fachwerke. Das ebene statisch unbestimmte Fachwerk. 3. verbesserte Auflage 1903. Mit 436 Textfiguren und 7 lithographischen Tafeln. Brosch. 16 Mk. In Halbfranz geb. 18 Mk.

Band II, Abth. 2, Lieferung 1:

Formveränderung des geraden Stabes. Der Balken auf mehreren Stützen. Mit 110 Textfiguren und 2 lithograph. Tafeln. Brosch 3 Mk.

Band II Abth. 2 Liefg. 2 (Schluss von Bd. II, Abth. 2), sowie Band III (Theorie des Erddrucks, Untersuchung der Stützmauern, Gewölbetheorie, Steinerne Pfeiler und Widerlager) sollen so bald als möglich nachfolgen.

Als vortrefflich geeignet zur Einführung in die Lehren der Graphischen Statik ist ferner zu empfehlen:

Die Geometrie der Lage.

Vorträge von

Dr. Theodor Reye.

Abth. I. 4. Aufl. Mit 90 Textfiguren. Broschirt 8 Mark. In Halbfranz gbdn. 10 Mark.

Inhalt: Einleitung. 1. Die Methode des Projicirens und Schneidens. Die sechs Grundgebilde der neueren Geometrie. 2. Unendlich ferne Elemente. Das Beziehen der Grundgebilde auf einander. 3. Das Princip der Reciprocität oder Dualität. Einfache und vollständige *n*ecke, *n*seite, *n*kante u. s. w. 4. Das Beziehen vollständiger *n*ecke, *n*seite und *n*kante auf einander. Harmonische Gebilde. 5. Projective Verwandtschaft einförmiger Grundgebilde. 6. Curven, Büschel und Kegel zweiter Ordnung. 7. Folgerungen aus den Lehrsätzen des Pascal und des Brianchon. 8. Pol und Polare in Bezug auf Curven zweiter Ordnung. 9. Durchmesser und Axen der Curven zweiter Ordnung. Gleichungen derselben. 10. Regelschaaren und Regelflächen zweiter Ordnung. 11. Projective Verwandtschaft von Elementargebilden. 12. Involutionen. 13. Metrische Relationen von Involutionen. Brennpunkte der Curven zweiter Ordnung. 14. Aufgaben zweiten Grades. Imaginäre Elemente. 15. Hauptaxen und Symmetrie-Ebenen, Focalaxen und cyclische Ebenen eines Kegels zweiter Ordnung. — **Constructions-Aufgaben und Lehrsätze.** Harmonische Gebilde. Projective Verwandtschaft einförmiger Grundgebilde. Curven, Büschel u. Kegel zweiter Ordnung. Pol und Polare; Durchmesser der Curven zweiter Ordnung. Das Princip der reciproken Radien. Regelschaaren und Regelflächen. Projective Elementargebilde; geradlinige Flächen dritter Ordnung. Involutionen. Brennpunkte der Curven zweiter Ordnung. Aufgaben zweiten Grades. Focalaxen und cyclische Ebenen von Kegeln zweiter Ordnung. Polvierecke und Polvierseite von Kegelschnitten Lineare Systeme und Gewebe von Kegelschnitten. Lineare Kegelschnitt-Systeme und -Gewebe dritter und erster Stufe. Das Kegelschnittnetz und die Schaarschaar.

Abth. II. 3. Aufl. Mit 26 Textfiguren. Broschirt 9 Mark. In Halbfranz gbdn. 11 Mark.

Inhalt: 1. Collineation und Correlation von Grundgebilden zweiter Stufe. 2. Collineare und reciproke ebene Curven. 3. Perspective Lage collinearer Felder und Bündel. Ausgeartete Collineationen und Correlationen. 4. Collineation und Correlation räumlicher Systeme. 5. Flächen zweiter Ordnung, ihre Erzeugung und Classificirung. 6. Polarentheorie der Flächen zweiter Ordnung. Durchmesser, Mittelpunkt und Hauptaxen derselben. 7. Affinität, Aehnlichkeit und Congruenz ebener Felder. Affine Kegelschnitte. 8. Affinität, Aehnlichkeit, Congruenz und Symmetrie räumlicher Systeme. Affine Flächen zweiter Ordnung. 9. Conjective collineare Grundgebilde. Involutorische Collineationen in der Ebene und im Raume. 10. Symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften. Vertauschbare Collineationen und Correlationen. 11. Cyclische Collineationen. 12. Harmonische Verwandtschaften, insbesondere harmonische Projectivitäten und Collineationen. Vertauschbare involutorische Verwandtschaften. 13. Conjective reciproke Felder. Polare Felder und Bündel. 14. Conjective reciproke Räume. Räumliche Polarsysteme. 15. Der Axencomplex eines räumlichen Polarsystemes. Coaxiale Flächen zweiter Ordnung. 16. Die Focalcurven eines räumlichen Polarsystemes. Confocale

Flächen zweiter Classe und ihre Focalaxen. 17. Weitere Eigenschaften der confocalen Flächen hinsichtlich ihrer Krümmungslinien, Focalcurven, Focalaxen, Kreisschnitte und Normalen. 18. Der lineare Strahlencomplex und das Nullsystem. Durchmesser, Hauptaxe und Axencomplex des Nullsystemes. 19. Die lineare Strahlencongruenz. Projective Beziehung des linearen Strahlencomplexes auf den Punktraum. 20. Die Strahlencongruenzen, welche durch collineare Bündel oder Felder erzeugt werden. Raumcurven und Ebenenbüschel dritter Ordnung. 21. Projective Beziehungen und Polarität der cubischen Raumcurven und Ebenenbüschel. 22. Conjugirte Punkte bezüglich einer cubischen Raumcurve. 23. Bündel cubischer Raumcurven. Invariante Beziehungen cubischer Raumcurven zu Polarsystemen und cubischen Ebenenbüscheln. 24. Projective Verwandtschaft einer Congruenz erster Ordnung und eines ebenen Feldes. Biquadratische Regelflächen, erzeugt durch projective Ebenenbüschel zweiter Ordnung. 25. Geometrische Verwandtschaften zweiten Grades. 26. Lineare Strahlencomplexe als Träger anderer linearer Complexe.

Anhang. **Aufgaben und Lehrsätze.** Collineation und Correlation. Flächen zweiter Ordnung. Polare Felder und Bündel; räumliche Polarsysteme. Polfünfecke und Polsechsecke eines räumlichen Polarsystemes. Der Axencomplex, die Normalen und der Focalcomplex einer Fläche zweiter Ordnung. Verschiebungssehnen u. Hauptaxe congruenter Räume und das zugehörige Nullsystem. Cubische Raumcurven und geometrische Verwandtschaften zweiten Grades. Cubische Ordnungscurven eines Nullsystemes oder linearen Strahlencomplexes Zwei merkwürdige periodische Bewegungen eines starren Körpers. Lineare Strahlencomplexe und ihre Büschel, Bündel und Gebüsche. Projective Erzeugung quadratischer Strahlencomplexe.

Abth. III. 3. Aufl. Broschirt 6 M. In Halbfranz gebdn. 8 M.

Inhalt: 1. Strahlencomplexe zweiten Grades, erzeugt durch collineare Räume. 2. Büschel von Flächen zweiter Ordnung; Schaaren von Flächen zweiter Classe. Raumcurven und Ebenenbüschel vierter Ordnung erster Art. 3. Projective Beziehungen der F^2-Büschel und der Kegelschnittbüschel. 4. Erzeugniss eines F^2-Büschels mit einem zu ihm projectiven Ebenenbüschel. Die vier Hauptarten der F^2-Büschel. 5. Aehnliche, concentrisch und ähnlich liegende Flächen zweiter Ordnung und ihre Normalen. 6. Strahlencongruenzen zweiter Classe, erzeugt durch collineare Flächen zweiter Ordnung. 7. Flächen dritter Ordnung, ihre Abbildung auf einer Ebene und die zugehörigen Bündelnetze. 8. Ebene Curven dritter Ordnung. 9. Die 27 Geraden und die Kegelschnitte der allgemeinen cubischen Fläche. 10. Die zweite Steiner'sche Erzeugung der cubischen Fläche. Die Regelfläche dritter Ordnung. 11. Polarentheorie der cubischen Fläche. 12. Polaren von Geraden und Ebenen bezüglich der cubischen Fläche. 13. Die Polhexaëder der cubischen Fläche und das Pentaëder ihrer Kernfläche. 14. Büschel und Bündel collinearer Räume; lineare Complexe von projectiven Ebenenbüscheln und collinearen Bündeln. Die cubische Raumverwandtschaft. 15. Bündel von Flächen zweiter Ordnung. 16. Das F^2-Gebüsch, seine projective Beziehung auf ein räumliches System und die Steiner'sche Fläche vierter Ordnung. 17. Besondere Fälle des F^2-Gebüsches. 18. Die Strahlencongruenz zweiter Ordnung zweiter Classe und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten. 19. Das F^2-Gebüsch mit einer Basisgeraden.

Anhang. **Aufgaben und Lehrsätze.** Tetraëdrale quadratische Strahlencomplexe. Specielle F^2-Büschel und tetraëdrale Complexe. Flächen dritter Ordnung. Die acht associirten Schnittpunkte von drei Flächen zweiter Ordnung. Der F^2-Bündel mit Poltetraëder. Das F^2-Gebüsch; specielle Flächen vierter Ordnung. Das F^2-Gebüsch mit Poltetraëder. Vertauschbare Collineationen und Correlationen, und solche, die eine gegebene Collineation oder Correlation umkehren.

Ferner erschienen in unserm Verlag:

Die neueren Methoden

der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen.

Von **Heinrich F. B. Müller-Breslau,**

Geh. Reg.-Rath und Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule in Berlin, ord. Mitglied der Königl. Akademie des Bauwesens.

Zweite Aufl. Mit 188 Textabb. Gr. 8°. Brosch. 7 M. 20 Pf., in Halbfrz. geb. 9 M. 20 Pf.

Bekanntlich ein ausgezeichnetes Werkchen, wichtig für jeden, welcher sich mit dem jetzigen Standpunkte der Festigkeitslehre vertraut machen will.

Das Centralblatt der Bauverwaltung, Berlin, sagt hierüber in einer Besprechung:
Der mit dem Entwerfen von Tragwerken aller Art beschäftigte Ingenieur wird wohl ausnahmslos die Werke dieses ausgezeichneten Lehrers und Forschers im täglichen Gebrauch haben. Insbesondere möchten wir aber erwähnen, dass ganz besonders das jetzt in zweiter Auflage erschienene Buch: „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre u. s. w." vorzüglich geeignet zur Einführung in diesen Wissenszweig ist.

Handbuch der Fundierungsmethoden im Hochbau, Brückenbau und Wasserbau von L. KLASEN.

Zweite, völlig neu bearbeitete Auflage. Grösstes Lex.-8°. Mit 580 Textabbildungen. Preis broschiert 15 M., in Halbfrz. geb. 17 M.

Diese neue Auflage des vorstehenden anerkannt trefflichen Buches ist völlig umgearbeitet und steht das Werk somit jetzt wieder auf der Höhe der allerneuesten Fortschritte. Die Anzahl der Textbogen hat sich von 12 auf über 20 vermehrt. Die Anzahl der Abbildungen von 166 auf 580.

Inhalt: Der Baugrund. Die zur Verwendung kommenden Maschinen und Apparate. Kalk, Cement und Beton. Spundwände und Fangedämme, Ausführung; auf Sand und Steinschüttung, auf Betonschüttung, auf Pfahlrost und Schraubenpfählen, in Caissons und Schwimmpfeilern, auf Senkbrunnen, Pneumatische Fundierungen. Gefrierverfahren. Sicherung gegen Senkungen und gegen Erdbeben. Kosten der verschiedenen Methoden.

Aug. Ritter,

Geh. Reg.-Rath und Professor an der Königl. Technischen Hochschule Aachen.

Lehrbuch der Analytischen Mechanik.

Dritte Auflage. Mit 224 Textfiguren. Brosch. 8 M., geb. 10 M.

Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik.

Dritte Auflage. Mit 612 Textfiguren. Brosch. 16 M., geb. 18 M.

Lehrbuch der Technischen Mechanik.

Achte, neu durchgesehene und vermehrte Auflage. 1900. Mit fast 900 Textabbild. Brosch. 20 M., geb. 22 M.

Ferner von demselben Verfasser:

Elementare Theorie und Berechnung

Eiserner Dach- und Brücken-Konstruktionen.

Fünfte, neu durchgesehene Auflage. Mit 495 Textabbildungen. Gr. 8°. Brosch. 10 M., in Halbfranz geb. 12 M.

Das Gesetz der statischen Momente lässt sich bekanntlich auf einfache Weise für Bestimmung der Spannungen benutzen, welche durch Belastung hervorgebracht werden. Das Buch behandelt die Resultate dieser Methode, wobei Aufgabenberechnungen und Anwendungen auf ausgeführte Konstruktionen der Natur der Sache nach einen grossen Raum einnehmen. **Hierbei sind alle Arten von Trägern ausführlich und gründlich durchgerechnet.**